Altmeister der geologischen Erforschung dieser Gegenden, welcher alle von mir gefundenen Stücke mit der grössten Güte untersucht und mit der bisher darüber bestehenden Litteratur verglichen hat, Herrn Director Casimir Mösch, meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Ueber den Schnitt zweier Kegel und über eine Steiner'sche Aufgabe betreffend ebene Curven.

Von

Prof. Dr. **A. Beck.**

I. Vorliegende Arbeit beschäftigt sich zunächst mit der Aufgabe, die Singularitäten des Schnittes zweier Kegel zu bestimmen, wenn letztere beliebige Plücker'sche Singularitäten haben. Schneidet man die beiden Kegel und die räumlichen Figuren, welche mit denselben zusammenhängen, durch eine Ebene, so erhält man in derselben zwei Basiscurven und andere mit ihnen zusammenhängende Curven und Punkte, für welche aus den räumlichen Beziehungen mit Leichtigkeit interessante Resultate abgeleitet werden können. So ergeben sich z. B. die Plücker'schen Formeln zwischen den Singularitäten einer ebenen Curve in einfacher Weise aus solchen räumlichen Beziehungen.

Wenn eine ebene Curve gegeben ist und in ihrer Ebene ein fester Pol, welches ist dann der Ort derjenigen Punkte, in welchen sich solche Tangenten der Curve schneiden, deren Berührungspunkte mit dem Pol in gerader Linie liegen? Diese Aufgabe hat Steiner gestellt (Werke Bd. II, S. 599) und für den Fall einer Basiscurve dritter Ordnung hat er über diese Aufgabe und ihre dualistisch entsprechende interessante Sätze aufgestellt (S. 489 und 538). Die allgemeine Bestimmung der Ordnungszahl der gesuchten Curve für eine Basiscurve mit beliebigen Plücker'schen Singularitäten wurde 1886 zuerst von Hrn. Schoute gegeben: «Solution d'un problème de Steiner», Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, t. X, p. 242. Daselbst sind auch die Steiner'schen Sätze für die Basiscurve dritter Ordnung bewiesen. Im XI. Band derselben Zeitschrift fügte Herr Zeuthen noch die Formel für das Geschlecht der Curve und für die Anzahl ihrer dreifachen Punkte hinzu. Das Geschlecht ergab sich durch Anwendung der Verallgemeinerung des Satzes über die Erhaltung des Geschlechts, welche Zeuthen im 3. Bd. der Math. Annalen mitgetheilt hat.

In vorliegender Arbeit sollen, ohne dass von der Zeuthen'schen Geschlechtsformel Gebrauch gemacht wird, die sämmtlichen Singularitäten der gesuchten Curve ganz allgemein bestimmt werden. Für diese Aufgabe eignet sich vortrefflich die Betrachtung räumlicher Beziehungen. Herr Rodenberg hat gezeigt (Math. Annalen Bd. 26, 1886), wie durch eine räumliche Figur die Polarentheorie für ebene Curven geometrisch abgeleitet werden kann. Von derselben Figur, hauptsächlich in ihrer Anwendung auf eine Basiscurve dritter Ordnung, handelt der Aufsatz des Hrn. Prof. W. Fiedler in dieser Zeitschrift: «Geometrische Mittheilungen; über die Durchdringungen perspectivischer Kegel», Jahrgang 36 (1891), S. 87. Ueber der Basiscurve werden zwei Kegel beschrieben, deren

Spitzen mit dem Pol in gerader Linie liegen und die sich also in der Basiscurve und noch in einer Raumcurve durchschneiden. Mit dieser räumlichen Figur hängt auch die Steiner'sche Aufgabe zusammen, nämlich in der Weise, dass der gesuchte Ort die Spur der developpabeln Fläche jener Raumcurve ist. Hierauf hat Herr Fiedler hingewiesen: Darstellende Geom. 3. Aufl., Bd. III (1888), S. 386.

Da es sehr wünschenswerth ist, für die gesuchte ebene Curve einen einfachen Namen zu haben, so möge es gestattet sein, sie als Trasse der Basis für den gegebenen Pol zu bezeichnen ($\mathfrak{T}$).

Die Betrachtung zweier beliebigen Kegel führt aber zu einer Verallgemeinerung der Steiner'schen Aufgabe.

Wenn in einer Ebene zwei Curven $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ gegeben sind und ein Pol P, so soll ein Punkt der einen Curve homolog zu einem Punkte der andern Curve genannt werden, wenn beide Punkte mit P in gerader Linie liegen; die beiden zugehörigen Tangenten sollen als homologe Tangenten bezeichnet werden. Man kann dann fragen: Welches ist der Ort $\mathfrak{T}_{12}$ der Schnittpunkte homologer Tangenten? Dieser Ort möge die gemischte Trasse der beiden Curven für den gegebenen Pol heissen. Offenbar ist er die Spur der developpabeln Fläche derjenigen Raumcurve, in welcher sich zwei Kegel schneiden, die über den beiden Basiscurven stehen und deren Spitzen mit P in gerader Linie liegen.

Wenn nur eine Curve $\mathfrak{C}$ und ein Pol P gegeben ist, so bezeichnen wir solche zwei Punkte von $\mathfrak{C}$, welche mit P in gerader Linie liegen, wieder als homologe Punkte und ihre Tangenten als homologe Tangenten. Dann ist die Steiner'sche Curve oder die Trasse $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{C}$ der Ort der Schnittpunkte homologer Tangenten für den Pol P.

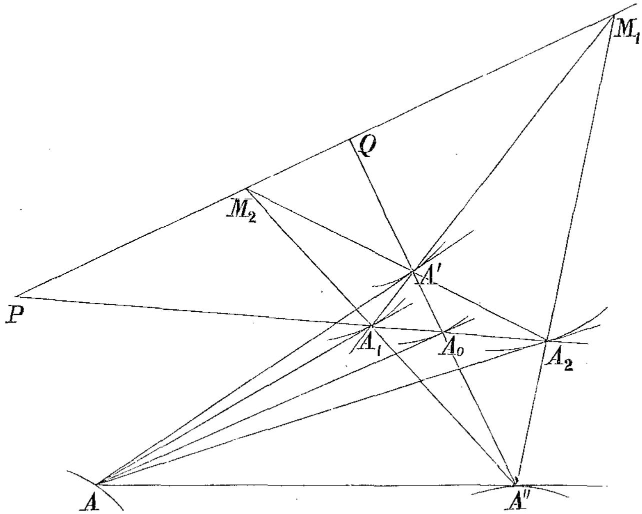
Bei zwei gegebenen Curven $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ denke man sich auf jedem Strahl durch P zu P und jedem Paar homologer Punkte den vierten harmonischen Punkt construiert, conjugiert zu P. Der Ort dieser vierten harmonischen Punkte ist eine Curve $\mathfrak{H}_{12}$, welche die gemischte harmonische Curve von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ für den Pol P heissen möge. Entsprechend nennen wir bei nur einer Curve $\mathfrak{C}$ harmonische Curve $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{C}$ den Ort derjenigen Punkte, welche zu P conjugiert harmonisch sind in Bezug auf irgend ein Paar homologer Punkte. Diese Curve hat schon Steiner behandelt (Werke Bd. II, S. 584). Er nahm den Pol im Unendlichen und setzte eine Basiscurve ohne Doppelpunkte und Spitzen voraus, für welchen Fall er die Ordnung, die Klasse und die Anzahl der Doppelpunkte bestimmte. Dieselbe Curve mit derselben Beschränkung kommt auch vor in dem Aufsatz des Hrn. Sporer: «J. Steiner's Sätze über die Mitten der Abschnitte, welche eine Curve auf einer Geraden bestimmt.», Schlömilch's Zeitschr. für Math. und Physik, Bd. 37 (1892). Im Folgenden werden sich die Singularitäten dieser Curve nebenbei ergeben für eine Basiscurve mit Doppelpunkten und Spitzen.

II. Schnitt zweier Kegel. Die beiden Kegel mit den Spitzen $M_1 M_2$ sollen von einer als Basis- oder Projectionsebene gedachten Ebene in zwei Curven $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2$ geschnitten werden, während die Gerade $M_1 M_2$ den Spurpunkt P habe. Die Singularitäten der Basiscurven: Ordnung, Klasse, Zahl der Doppelpunkte, der Spitzen, der Doppeltangenten, der Inflexionstangenten seien m, n, d, k, t, i mit dem entsprechenden Index.

Die Schnittcurve $\mathfrak{R}$ der beiden Kegel wird construiert, indem man Hülfsebenen durch $M_1 M_2$ legt und die $m_1 m_2$

Schnittpunkte der beiden Gruppen von Erzeugenden aufsucht, welche in jeder solchen Ebene liegen. Die zugehörigen Tangenten von $\mathfrak{R}$ sind die Schnittlinien der zugehörigen, also zu einander homologen Tangentialebenen beider Kegel.

Nun bilde man die zwei andern Kegel $M_1\mathfrak{C}_2$ und $M_2\mathfrak{C}_1$. Dann entsteht eine zweite Raumcurve. Wenn es sich darum handelt, die beiden Raumcurven von einander zu unterscheiden, so möge die letztere mit $\mathfrak{R}''$, die frühere



mit $\mathfrak{R}'$ bezeichnet werden. Zwei homologe Punkte $A_1 A_2$ der Basiscurven geben einen Punkt A' von $\mathfrak{R}'$ und einen Punkt A'' von $\mathfrak{R}''$ und die Verbindungslinie $A'A''$ trifft die Gerade $M_1 M_2$ in einem Punkt Q, welcher mit $P\ M_1\ M_2$ eine harmonische Gruppe bildet, also ein fester Punkt ist. Die Gerade $A'A''$ hat ihren Spurpunkt

A_0 im Schnittpunkt mit $A_1 A_2$. Da die vier Punkte $P A_0$ $A_1 A_2$ wieder eine harmonische Gruppe bilden, ebenso wie $Q A_0 A' A''$, so beschreibt A_0 die gemischte harmonische Curve $\mathfrak{H}_{12}$ und liegen die beiden Raumcurven $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ auf dem Kegel $Q\mathfrak{H}_{12}$ so, dass sie einander conjugiert sind in der involutorischen Collineation, welche Q zum Centrum und die Basisebene zur Involutionsebene hat. Die Tangenten in den fünf Punkten $A_1 A_2 A' A'' A_0$ treffen sich in einem Punkt A der gemischten Trasse $\mathfrak{T}_{12}$, welche die gemeinschaftliche Spurcurve der beiden Developpabeln $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ ist. Die beiden Raumcurven treffen die Basisebene in den $m_1 m_2$ Punkten, in welchen sich $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ schneiden und durch welche auch $\mathfrak{H}_{12}$ hindurchgeht; dabei bilden die Tangenten von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ mit der Tangente von $\mathfrak{H}_{12}$ und der Geraden nach P eine harmonische Gruppe.

Die Raumcurve $\mathfrak{R}$ hat $m_1 d_2 + m_2 d_1$ Doppelpunkte und $m_1 k_2 + m_2 k_1$ Spitzen. Je m_1 (m_2) Doppelpunkte liegen auf einer Doppelerzeugenden des zweiten (ersten) Kegels und die Ebene der beiden Tangenten ist eine Tangentialebene des ersten (zweiten) Kegels. Je m_1 (m_2) Spitzen liegen auf einer Cuspidalerzeugenden des zweiten (ersten) Kegels und die zugehörige Schmiegungsebene ist eine Tangentialebene des ersten (zweiten) Kegels. Jede Inflexionserzéugende des ersten (zweiten) Kegels schneidet den zweiten (ersten) Kegel in m_2 (m_1) Punkten, für welche die Inflexionsebene Schmiegungsebene ist. Durch M_1 (M_2) gehen also $m_2 i_1 (m_1 i_2)$ Schmiegungsebenen dieser Art, die zu je m_2 (m_1) zusammenfallen und ihre Berührungspunkte auf einer Erzeugenden haben.

Für eine Tangente von P aus an eine Basiscurve heisse der Berührungspunkt B und jeder Schnittpunkt mit der andern Basiscurve T mit dem betreffenden Index.

Dann erkennt man, dass durch M_1 nach den Punkten T_1 von $\mathfrak{C}_1$ $m_1 n_2$ Erzeugende gehen, welche Tangenten von $\mathfrak{R}$ sind in Punkten, die zu je m_1 auf einer Erzeugenden $M_2 B_2$ liegen; ebenso gehen durch M_2 nach den Punkten T_2 $m_2 n_1$ Tangenten von $\mathfrak{R}$, deren Berührungspunkte zu je m_2 auf einer Erzeugenden $M_1 B_1$ liegen. Die Ebenen, welche längs den Erzeugenden $M_1 T_1$, $M_2 T_2$ den betreffenden Kegel berühren, sind stationäre Schmiegungsebenen von $\mathfrak{R}$; ihre Spuren, d. h. die Tangenten der Basiscurven in den Punkten T sind also Inflexionstangenten der gemischten Trasse mit den T als Inflexionspunkten.

III. Die Singularitäten der Curve $\mathfrak{R}$ und der Developpabeln $\mathfrak{R}$. Neben der Ordnungszahl $m_1 m_2$ der Raumcurve ist zunächst die Klassenzahl der Developpabeln wichtig. Um die Anzahl der Schmiegungsebenen von $\mathfrak{R}$ zu ermitteln, welche durch einen Punkt gehen, verlegen wir denselben nach M_1. Durch diesen Punkt gehen nun folgende Schmiegungsebenen: 1) $m_1 n_2$ stationäre Schmiegungsebenen; es ist leicht einzusehen, dass jede dieser Ebenen als Schmiegungsebene durch M_1 dreifach zu rechnen ist, denn durch jeden Punkt einer Tangente von $\mathfrak{R}$ gehen zwei unendlich benachbarte Schmiegungsebenen und eine dritte unendlich benachbarte kommt hinzu, wenn die Schmiegungsebene stationär ist; 2) Die $m_2 i_1$ Schmiegungsebenen, welche zu je m_2 in eine Inflexionsebene des ersten Kegels fallen; 3) die $m_1 k_2$ Schmiegungsebenen in denjenigen Spitzen von $\mathfrak{R}$, welche auf den Cuspidalerzeugenden des zweiten Kegels liegen. Durch M_1 gehen also im Ganzen $3\,m_1 n_2 + m_2 i_1 + m_1 k_2$ Schmiegungsebenen und es ist klar, dass weitere nicht vorhanden sind. Auf dieselbe Weise findet man aber für die Gesammtzahl der durch M_2 gehenden Schmiegungsebenen: $3\,m_2 n_1 + m_1 i_2 + m_2 k_1$. Diese zwei Zahlen müssen nun nothwendig einander gleich sein, woraus folgt:

$$3\,(m_1 n_2 - m_2 n_1) = m_1 i_2 - m_2 i_1 + m_2 k_1 - m_1 k_2.$$

Man nehme jetzt für $\mathfrak{C}_2$ eine Curve zweiter Ordnung, setze also $m_2 = n_2 = 2$, $i_2 = k_2 = o$. Dann ergibt sich

$$3\,(m_1 - n_1) = k_1 - i_1.$$

Dies ist nichts anderes als diejenige Plücker'sche Formel, welche gewöhnlich als dritte bezeichnet wird. Dieselbe ist hiemit durch einfache raumgeometrische Betrachtung für jede algebraische ebene Curve bewiesen.

Eliminiert man mit Hülfe dieser Formel aus obiger Zahl der Schmiegungsebenen durch M_1 entweder k_2 oder i_1, so erhält man als Klassenzahl der Developpabeln $\mathfrak{R}$: $3\,m_1 m_2 + m_1 i_2 + m_2 i_1$, oder $3\,(m_1 n_2 + m_2 n_1) - 3\,m_1 m_2 + m_1 k_2 + m_2 k_1$.

Um den **Rang** der Raumcurve oder die Ordnung der Developpabeln zu bestimmen, fragen wir nach der Zahl der Tangenten, welche eine beliebige Gerade, also etwa die Gerade $M_1 M_2$ schneiden. Wir sahen, dass durch M_1 $m_1 n_2$ Tangenten und durch M_2 $m_2 n_1$ Tangenten gehen und es ist klar, dass keine Tangente die Gerade $M_1 M_2$ anderswo als in M_1 oder M_2 treffen kann, weil sonst die beiden Kegel eine gemeinschaftliche Tangentialebene haben müssten. Der gesuchte Rang ist also $= m_1 n_2 + m_2 n_1$. Wir führen hiefür zur Abkürzung die Bezeichnung $[m\,n]$ ein, wie wir auch für $m_1 d_2 + m_2 d_1$, $m_1 k_2 + m_2 k_1$, ... die Symbole $[m\,d]$, $[m\,k]$ ... benutzen.

IV. **Die Projection von $\mathfrak{R}$ (die gemischte harmonische Curve).** Von den Singularitäten, M_{12}, N_{12}, ... derselben sind uns schon bekannt:

$$M_{12} = m_1 m_2$$
$$N_{12} = [m\, n]$$
$$I_{12} = 3\, m_1 m_2 + [m\, i] = 3\, [m\, n] - 3\, m_1 m_2 + [m\, k]$$
$$K_{12} = [m\, k].$$

Die beiden übrigen Singularitäten berechnen wir unter Anwendung der ersten und zweiten Plücker'schen Formel, wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned} 2\, D_{12} &= m_1{}^2 m_2{}^2 - [m\, n] - m_1 m_2 - 3\, [m\, k] \\ &= m_1 m_2\, (m_1 - 1)\ (m_2 - 1) + 2\, [m\, d] \end{aligned}$$
$$2\, T_{12} = [m\, n]^2 - 10\, [m\, n] + 8\, m_1\, m_2 - 3\, [m\, k].$$

Für das Geschlecht P_{12} endlich findet man aus M_{12}, D_{12}, K_{12}:

$$2\, P_{12} = [m\, n] + [m\, k] - 2 m_1\, m_2 + 2.$$

Die Projection von $\mathfrak{R}$ hat die Besonderheit, vielfache Tangenten zu besitzen, welche in die Umrisse der beiden Kegel fallen. Bei beliebigem Projectionscentrum gehen n_1 m_2-fache und $m_1 n_2$ einfache Tangenten der Projection durch die Projection von M_1 (die erstern berühren $\mathfrak{C}_1$) und n_2 m_1-fache nebst $m_2 n_1$ einfachen Tangenten durch die Projection von M_2 (die erstern berühren $\mathfrak{C}_2$). Wird das Projectionscentrum aber nach Q verlegt, wodurch die Projection in die gemischte harmonische Curve übergeht, so gibt es im Bilde durch den Pol n_1 m_2-fache und n_2 m_1-fache Tangenten von $\mathfrak{H}_{12}$, welche in die Tangenten an die Basiscurven fallen. Im Uebrigen sind die Singularitäten der gemischten harmonischen Curve nicht verschieden von den eben gefundenen. Da keine Tangente von $\mathfrak{R}$ durch Q gehen kann, so geben die I_{12} einfachen Schmiegungsebenen durch Q lauter Inflexionstangenten von $\mathfrak{H}_{12}$. Die $[m\, k]$ Spitzen von $\mathfrak{H}_{12}$ liegen auf den Strahlen von P nach den Spitzen der Basiscurven. Von den Doppelpunkten von $\mathfrak{H}_{12}$ liegen $[m\, d]$ auf den Strahlen von P nach den Doppelpunkten der Basiscurven; die übrigen sind solche Punkte, die zu P harmonisch conjugiert sind in Bezug auf zwei verschiedene Paare homologer Punkte.

V. Die Spur der Developpabeln $\mathfrak{R}$ (die gemischte Trasse). Sie hat Spitzen in den $m_1 m_2$ Schnittpunkten von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, weil durch diese Punkte die Cuspidalcurve $\mathfrak{R}$ geht. Jede Inflexionstangente von $\mathfrak{C}_1$ ist eine m_2-fache Tangente von $\mathfrak{T}_{12}$; die Berührungspunkte sind die Schnittpunkte der Inflexionstangente mit ihren homologen Tangenten. In jedem Schnittpunkt einer Spitzentangente der Basiscurven mit einer homologen Tangente ist diese letztere eine Tangente von $\mathfrak{T}_{12}$. In jedem Punkt T einer Basiscurve wird diese letztere von $\mathfrak{T}_{12}$ berührt, wobei $\mathfrak{T}_{12}$ eine Inflexion hat. Jede Inflexionstangente von $\mathfrak{H}_{12}$ ist eine einfache Tangente von $\mathfrak{T}_{12}$.

Von den Singularitäten μ_{12}, ν_{12}, ... der gemischten Trasse können drei sofort angegeben werden:

$$\mu_{12} = [m\,n]$$
$$\nu_{12} = 3\,m_1 m_2 + [m\,i] = 3\,[m\,n] - 3\,m_1\,m_2 + [m\,k]$$
$$\varkappa_{12} = m_1\,m_2.$$

Man findet dann weiter mit Hülfe der Plücker'schen Formeln:

$$\iota_{12} = 10\,m_1\,m_2 - 3\,[m\,n] + 3\,[m\,i] = 6\,[m\,n] - 8\,m_1 m_2 + 3\,[m\,k]$$
$$2\,\delta_{12} = [m\,n]^2 - [m\,n] - 6\,m_1 m_2 - [m\,i]$$
$$2\,\delta_{12} = [m\,n]^2 - 4\,[m\,n] - [m\,k]$$
$$2\,\tau_{12} = (3\,m_1 m_2 + [m\,i])^2 - 33\,m_1 m_2 + 8\,[m\,n] - 10\,[m\,i].$$

Für das Geschlecht erhält man hieraus, wie es sein muss, denselben Werth wie bei der Projection.

VI. Directe Bestimmung von δ_{12}. Die Doppelpunkte D_{12} von $\mathfrak{T}_{12}$ liegen auf der Doppelcurve der Developpabeln $\mathfrak{R}'$; δ_{12} ist also die Ordnungszahl dieser Doppelcurve. Statt der Developpabeln $\mathfrak{R}'$ kann man aber auch die Developpable $\mathfrak{R}''$ nehmen, die zu $\mathfrak{R}'$ involutorisch liegt. Jeder Doppelpunkt D_{12} ist somit ein vierfacher Punkt im Schnitt der beiden Developpabeln. Dieser Schnitt zerfällt aber in die gemischte Trasse $\mathfrak{T}_{12}$ und eine Raumcurve $\mathfrak{S}$ von der Ordnung μ_{12} $(\mu_{12} - 1)$ und für diese Raumcurve $\mathfrak{S}$ ist D_{12} ein Doppelpunkt. Offenbar ist die Curve $\mathfrak{S}$ zu sich selbst involutorisch für Q als Centrum und die Basisebene als Involutionsebene. Die Tangenten an die beiden Aeste von $\mathfrak{S}$ durch D_{12} liegen also in einer Ebene durch Q und entsprechen einander.

Um δ_{12} zu erhalten, hat man von den Schnittpunkten der Raumcurve $\mathfrak{S}$ mit der Basisebene diejenigen abzurechnen, welche nicht Doppelpunkte von $\mathfrak{S}$ sind und die übrig bleibende Anzahl durch 2 zu dividieren. Solcher abzurechnenden Punkte gibt es zweierlei: 1) Da $\mathfrak{S}$ zu sich selbst involutorisch ist, so muss für jeden einfachen Schnittpunkt mit der Basisebene die zugehörige Tangente nach Q gehen. Jede Tangente von $\mathfrak{S}$ ist aber die Schnittlinie zweier Tangentialebenen der Developpabeln $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ und diese Tangentialebenen müssen also jetzt auch durch Q gehen. Es handelt sich somit um die Schmiegungsebenen, welche man von Q aus an $\mathfrak{R}'$ legen kann und deren Anzahl $= J_{12} = \nu_{12}$ ist. Seien in einer solchen Ebene, die mit ihrer entsprechenden von $\mathfrak{R}''$ zusammenfällt, a' b' die zwei unendlich benachbarten Tangenten von $\mathfrak{R}'$, a'' b'' die entsprechenden von $\mathfrak{R}''$, dann sind $(a'\,a'')$, $(b'\,b'')$ zwei unendlich benachbarte Punkte von $\mathfrak{T}_{12}$, die auf einer Inflexionstangente von $\mathfrak{H}_{12}$ liegen, und $(a'\,b'')$, $(a''\,b')$ zwei unendlich benachbarte Punkte von $\mathfrak{S}$ auf einer Geraden nach Q. An diesen Stellen berühren sich die beiden developpabeln Flächen. 2) Jede der $\varkappa_{12}$ Spitzen von $\mathfrak{T}_{12}$ liegt auf $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$. Im Schnitt der beiden Developpabeln entsteht also eine Spitze mit vier Aesten, die eine gemeinschaftliche Tangente haben. Da aber zwei dieser Aeste zu $\mathfrak{T}_{12}$ gehören, so bleibt eine gewöhnliche Spitze von $\mathfrak{S}$ übrig, deren Tangente mit der Spitzentangente von $\mathfrak{T}_{12}$ zusammenfällt und deren Schmiegungsebene durch Q geht. An dieser Stelle wird also $\mathfrak{S}$ von der Basisebene in drei zusammenfallenden Punkten geschnitten. Für δ_{12} findet man somit schliesslich:

$$2\,\delta_{12} = \mu_{12}\,(\mu_{12} - 1) - \nu_{12} - 3\,\varkappa_{12}.$$

Dies ist aber die gewöhnlich als erste bezeichnete Plücker'sche Formel, nach welcher auch in (V.) δ_{12} berechnet wurde.

VII. Doppelpunkte erster, zweiter, dritter Art. Ein Doppelpunkt der gemischten Trasse kann auf zwei verschiedene Arten zu Stande kommen: nämlich entweder dadurch, dass eine Tangente der einen Basiscurve und zwei zu ihr homologe Tangenten der andern Basiscurve durch einen Punkt gehen, oder dadurch, dass zwei Paare homologer Tangenten durch einen Punkt gehen, wobei die zwei Paare der Berührungspunkte auf zwei verschiedenen Strahlen durch P liegen. Im ersten Fall ist noch weiter zu unterscheiden, ob die zuerst genannte Tangente zu $\mathfrak{C}_1$ oder zu $\mathfrak{C}_2$ gehört. So besteht δ_{12} aus drei Zahlen, δ_{12}', δ_{12}'', δ_{12}''', die zu den Doppelpunkten D_{12}', D_{12}'', D_{12}''' gehören und wir stellen uns die Aufgabe, diese drei Zahlen zu bestimmen. Vorläufig lässt sich δ'''_{12} ermitteln durch Anwendung des Correspondenzprincips von Chasles und damit ist dann auch $\delta_{12}' + \delta_{12}''$ bekannt.

Ein Strahl x durch P schneide $\mathfrak{C}_2$ im Punkte A_2; auf der Tangente a_2 desselben bestimme man diejenigen Punkte X, in welchen sich zwei homologe Tangenten schneiden, zu denen aber a_2 nicht gehören soll. Diese Punkte liegen auf der gemischten Trasse und ihre Anzahl für jede Tangente a_2 beträgt $\mu_{12} - m_1$. Von jedem Punkt X aus lege man eine weitere Tangente an $\mathfrak{C}_1$ und ihren Berührungspunkt B_1 verbinde man durch einen Strahl x' mit P. Die Strahlen $x\,x'$ bilden dann eine Correspondenz von folgender Art: Zu jedem Strahl x gehören $m_2\ (\mu_{12} - m_1)\ (n_1 - 1)$ Strahlen x' und zu jedem Strahl x' gehören $m_1\ (\mu_{12} - m_2)\ (n_2 - 1)$ Strahlen x. Man hat somit als Zahl der Coincidenzen:

$$m_2\,(\mu_{12} - m_1)\ (n_1 - 1) + m_1\,(\mu_{12} - m_2)\ (n_2 - 1) =$$
$$\mu_{12}\,[m\,n] - \mu_{12}\ (m_1 + m_2) - m_1\,m_2\,(n_1 + n_2 - 2).$$

Jeder Doppelpunkt D_{12}''' gibt nun Veranlassung zu zwei verschiedenen Coincidenzen in den zwei Strahlen, auf welchen die zwei Paare der Berührungspunkte liegen. Aber es gibt auch Coincidenzen, welchen nicht ein eigentlicher Doppelpunkt entspricht. Dieselben liegen in den Strahlen, welche nach den $m_1 m_2$ Schnittpunkten der beiden Basiscurven gehen. Diese Punkte sind Spitzen von $\mathfrak{T}_{12}$ und von jedem gehen zwei unendlich benachbarte Tangenten an $\mathfrak{C}_1$ und ebenso an $\mathfrak{C}_2$ und diese Tangenten bilden zwei Paare homologer Tangenten, deren Berührungspunkte alle in jenen Punkt hineinfallen. Man erkennt leicht, dass auf diese Weise je zwei unendlich benachbarte Coincidenzen entstehen. Nach Abzug derselben hat man:

$$2\,\delta_{12}''' = [m\,n]^2 - [m\,n]\ (m_1 + m_2) - m_1 m_2\ (n_1 + n_2).$$

Daraus folgt weiter:

$$2\,(\delta_{12}' + \delta_{12}'') = [m\,n]\ (m_1 + m_2 - 4) + m_1\,m_2\ (n_1 + n_2) - [m\,k].$$

Zur Bestimmung von δ_{12}''' kann man auch das Zeuthen'sche Correspondenzprincip in der Ebene anwenden (Comptes rendus 1874). Die Punkte der Ebene können nämlich in folgender Art in Correspondenz gesetzt werden:

Von irgend einem Punkte X lege man zwei Tangenten an $\mathfrak{C}_1$; den Schnittpunkt zweier zu ihnen homologen Tangenten nenne man X'. In dieser Correspondenz (XX') entsprechen jedem Punkt X $\xi' = \frac{1}{2} n_1 (n_1 - 1) m_2^2$ Punkte X', während zu jedem Punkt X' $\xi = \frac{1}{2} n_2 \;(n_2 - 1)\; m_1^2$ Punkte X gehören. Nun ist weiter die Zahl γ zu bestimmen, welche angibt, wie viel Punkte X' auf eine Gerade g' fallen, wenn X eine Gerade g durchläuft. Dazu bilde man folgende Correspondenz (xx') von Strahlen durch P: x schneide $\mathfrak{C}_1$ in A_1; die zugehörige Tangente schneide g in X; von X gehe eine zweite Tangente an $\mathfrak{C}_1$ und eine ihrer homologen Tangenten treffe g' in Y'; von Y' lege man eine zweite Tangente an $\mathfrak{C}_2$ und ihren Berührungspunkt B_2 verbinde man mit P durch x'. Dann gehören zu jedem Strahl x $m_1 m_2 \;(n_1 - 1)\; (n_2 - 1)$ Strahlen x' und umgekehrt. Die Zahl der Coincidenzen ist also das Doppelte dieser Zahl. Aber es ist klar, dass jedes der gesuchten Punktepaare auf g und g' durch zwei verschiedene Coincidenzen erzeugt wird, je nachdem man von der einen oder andern der beiden in X sich schneidenden Tangenten ausgeht. Es ist also

$$\gamma = m_1 m_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1).$$

Nach dem Zeuthen'schen Princip ist nun die Zahl der Coincidenzen $(XX') = \xi + \xi' + \gamma$. Rechnet man wieder die $m_1 m_2$ Punkte ab, welche Spitzen für $\mathfrak{T}_{12}$ werden, so erhält man:

$$\delta_{12}''' = \frac{1}{2} n_1 (n_1 - 1) m_2^2 + \frac{1}{2} n_2 (n_2 - 1) m_1^2 + m_1 m_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1) - m_1 m_2.$$

Dieser Ausdruck ist mit dem oben gefundenen identisch.

VII. Schnitt zweier Kegel mit gemeinschaftlicher Basiscurve. Wenn die Basiscurven $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ miteinander zur Deckung kommen (Curve $\mathfrak{C}$ mit den Singularitäten $m, n, \ldots$), so tritt Folgendes ein: $\mathfrak{C}$ ist ein

Theil des Schnittes beider Kegel, also enthält der vollständige Schnitt noch eine Raumcurve ($\mathfrak{U}$) von der Ordnung $m(m-1)$. Die Punkte von $\mathfrak{U}$ entsprechen einander paarweise der Art, dass je zwei entsprechende Punkte $A' A''$ auf einem Strahl durch den festen Punkt Q liegen. Der Spurpunkt dieses Strahls beschreibt die harmonische Curve $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{C}$ für den Pol P und seine Tangente geht nach dem gemeinschaftlichen Spurpunkt A der beiden Tangenten in A' und A'', welcher die Trasse $\mathfrak{T}$ beschreibt. Die Raumcurve $\mathfrak{U}$ ist zu sich selbst involutorisch für Q als Centrum und für die Basisebene als Involutionsebene, wie ja auch in dieser Involution die beiden Kegel einander entsprechen. Der Kegel $Q\mathfrak{H}$ ist also ein doppelt projicierender Kegel von $\mathfrak{U}$ und die Trasse $\mathfrak{T}$ ist ein Theil der Doppelcurve der Developpabeln $\mathfrak{U}$.

Die Raumcurve $\mathfrak{U}$ hat $2(m-2)d$ Doppelpunkte, für welche die Ebene der beiden Tangenten eine Tangentialebene des einen oder des andern Kegels ist, ferner $2(m-2)k$ Spitzen, für welche die Schmiegungsebene eine Tangentialebene des einen oder des andern Kegels ist und endlich $2(m-1)i$ Punkte, deren Schmiegungsebenen zu je $m-1$ mit einer Inflexionsebene des einen oder des andern Kegels zusammenfallen. Alle diese aufgezählten Punkte liegen in Paaren auf Strahlen durch Q. Die $2(m-2)k$ Spitzen erzeugen zu je zweien in der Trasse einen gewöhnlichen Punkt. Auf diese Weise liegen auf jeder Spitzentangente von $\mathfrak{C}$ $m-2$ Punkte von $\mathfrak{T}$, in welchen die letztere Curve berührt wird von den $m-2$ Tangenten, die zur Spitzentangente homolog sind. Die $2(m-1)i$ Punkte von $\mathfrak{U}$, deren Schmiegungsebenen zu je $m-1$ in eine Inflexionsebene des einen oder des andern Kegels fallen, geben zu je zweien Punkte der Trasse, die zu je $m - 1$ auf einer Inflexionstangente von $\mathfrak{C}$ liegen; jede Inflexionstangente von $\mathfrak{C}$ berührt die Trasse in $m - 1$ Punkten, die auf den $m - 1$ homologen Tangenten liegen.

Die Tangenten von P aus an die Basis bestimmen auf letzterer n Punkte B und $n(m - 2)$ Punkte T. Auf jedem der beiden Kegel gehen nach den Punkten T $n(m - 2)$ Erzeugende, welche Tangenten von $\mathfrak{U}$ sind und ihre Berührungspunkte auf den Erzeugenden des andern Kegels haben, die nach den Punkten B gehen. Die Tangentialebenen der Kegel längs diesen Erzeugenden nach T sind stationäre Schmiegungsebenen von $\mathfrak{U}$.

Die beiden Kegel $M_1\mathfrak{C}$ und $M_2\mathfrak{C}$ haben jetzt n gemeinschaftliche Tangentialebenen, deren Spuren die Tangenten von P an die Basis sind. Die Punkte B sind also Doppelpunkte des Gesammtschnittes der beiden Kegel, also einfache Punkte von $\mathfrak{U}$ und zwar gehen die zugehörigen Tangenten nach Q wegen der involutorischen Collineation von $\mathfrak{U}$ zu sich selbst. Die Schmiegungsebenen von $\mathfrak{U}$ in den Punkten B sind stationär und sind Tangentialebenen des Kegels $Q\,\mathfrak{H}$. Auf jeder Erzeugenden $M_1 B$ $(M_2 B)$ gibt es also im Ganzen $m - 1$ Punkte von $\mathfrak{U}$ mit stationären Schmiegungsebenen; die Tangenten in $m - 2$ derselben gehen nach M_2 (M_1) und die Schmiegungsebene berührt den Kegel M_2 (M_1); die Tangente des übrigen geht nach Q und die Schmiegungsebene berührt den Kegel $Q\,\mathfrak{H}$.

Jedem Doppelpunkt von $\mathfrak{C}$ entsprechen zwei Mäntel des einen Kegels und zwei Mäntel des andern; dies gibt also vier Aeste des Gesammtschnittes, also zwei Aeste von $\mathfrak{U}$, welche einander entsprechen in der Involution. Durch jeden Doppelpunkt von $\mathfrak{C}$ geht auch $\mathfrak{H}$ und zwar bilden die beiden Tangenten von $\mathfrak{C}$ mit der Tangente von $\mathfrak{H}$ und mit der Geraden nach P eine harmonische Gruppe.

Jeder dieser Doppelpunkte von $\mathfrak{U}$ liegt mit $m - 2$ der früher aufgezählten auf einer Geraden nach M_1 und mit $m - 2$ andern auf einer Geraden nach M_2; aber die Ebene der beiden Tangenten geht für die neuen Doppelpunkte nicht durch M_1 oder M_2, sondern durch Q. Die Raumcurve $\mathfrak{U}$ hat also im Ganzen $(2m - 3)\,d$ Doppelpunkte.

Jede Spitze von $\mathfrak{C}$ gibt Veranlassung zu vier Aesten des Gesammtschnittes, welche mit gemeinschaftlicher Tangente zusammenstossen, und da zwei von diesen Aesten zu $\mathfrak{C}$ gehören, so bilden die beiden andern eine Spitze von $\mathfrak{U}$, deren Tangente mit der Spitzentangente von $\mathfrak{C}$ zusammenfällt; diese beiden Aeste von $\mathfrak{U}$ entsprechen einander involutorisch. Jede dieser Spitzen von $\mathfrak{U}$ liegt mit $m - 2$ der früher aufgezählten auf einer Geraden nach M_1 und mit $m - 2$ andern auf einer Geraden nach M_2; aber die Schmiegungsebenen der neuen Spitzen gehen nicht durch M_1 oder M_2, sondern durch Q. $\mathfrak{U}$ hat also im Ganzen $(2m - 3)\,k$ Spitzen.

Die Punkte von $\mathfrak{U}$, welche in der Basisebene liegen und deren Gesammtzahl $= m(m - 1)$ beträgt, sind somit: die n einfachen Punkte B, die d Doppelpunkte und die k Spitzen von $\mathfrak{C}$. Man hat folglich die Beziehung:

$$m(m - 1) = n + 2d + 3k$$

sammt ihrer dualistisch entsprechenden

$$n(n - 1) = m + 2t + 3i.$$

Diese Ableitung der beiden ersten Plücker'schen Formeln ist von Herrn Rodenberg gegeben worden, Math. Annalen, Bd. 26. In der Betrachtung von (VI) treten an Stelle zweier durch eine ebene Curve gelegten Kegel zwei developpable Flächen.

Die Klasse der Developpabeln $\mathfrak{U}$ muss gleich sein der Anzahl der Schmiegungsebenen durch M_1. Da hiebei jede der stationären Schmiegungsebenen durch M_1 dreifach zu rechnen ist, so wird die Klasse der Developpabeln $\mathfrak{U} = 3n(m-2) + (m-2)k + (m-1)i$.

Um den Rang von $\mathfrak{U}$ zu erhalten, ist zu bedenken, dass jetzt nicht mehr alle Tangenten von $\mathfrak{U}$, welche die Gerade M_1M_2 schneiden, durch M_1 oder M_2 gehen, dass vielmehr noch n Tangenten von $\mathfrak{U}$ in den Punkten B existieren, welche die Gerade M_1M_2 in Q treffen. Man hat also für den Rang der Curve $\mathfrak{U}$: $2n(m-2)+n$.

IX. Die Projection von $\mathfrak{U}$ aus beliebigem Centrum O. Von ihren Singularitäten $M_0N_0\ldots$ sind nach dem Vorigen bekannt:

$$M_0 = m(m-1)$$
$$N_0 = n(2m-3)$$
$$J_0 = (m-2)(3n+k) + (m-1)i = (2m-3)(3n+k) - 3m(m-1)$$
$$= 3m(m-2) + (2m-3)i$$
$$K_0 = (2m-3)k.$$

Die beiden ersten Plücker'schen Formeln geben weiter:

$$2D_0 = m^2(m-1)^2 - m(m-1) - (2m-3)(n+3k)$$
$$= m(m-1)^2(m-2) + 2(2m-3)d$$
$$2T_0 = n^2(2m-3)^2 - (2m-3)(10n+3k) + 8m(m-1).$$

Endlich findet man für das Geschlecht

$$2P_0 = (2m-3)(n+k) - 2m(m-1) + 2.$$

Da die beiden Kegel $M_1\mathfrak{C}$ und $M_2\mathfrak{C}$ $(m-1)$-fache Perspectivkegel von $\mathfrak{U}$ sind, während der Kegel $Q\mathfrak{H}$ ein zweifacher Perspectivkegel ist, so gehen durch die Projection von M_1 und von M_2 an die Projection von $\mathfrak{U}$ je n $(m-1)$-fache Tangenten, welche $\mathfrak{C}$ berühren und ausserdem je $n(m-2)$ einfache Tangenten, ferner gehen durch die Projection von Q so viel Doppeltangenten, als die Klassenzahl von $\mathfrak{H}$ beträgt und ausserdem n einfache Tangenten.

X. Die harmonische Curve $\mathfrak{H}$. Ihre Singularitäten sind mit den vorigen nicht identisch, weil das nach Q verlegte Projectionscentrum eine specielle Lage zur Raumcurve hat. Die hieraus entstehenden Modificationen sind die folgenden: Da Q Spitze eines doppeltprojicierenden Kegels ist, so ist die vorige Ordnungszahl des Bildes durch 2 zu dividieren. Um die Klassenzahl zu erhalten, sind die n Tangenten von $\mathfrak{U}$ abzurechnen, welche durch Q gehen und die übrig bleibende Zahl ist durch 2 zu dividieren. Bei der Bestimmung der Inflexionen sind diejenigen Schmiegungsebenen durch Q in Abzug zu bringen, welche nicht Inflexionen von $\mathfrak{H}$ geben, d. h. die n stationären Schmiegungsebenen in den Punkten B, jede dreifach gezählt, und die Schmiegungsebenen in den k Spitzen in der Basisebene; die übrig bleibende Zahl ist durch 2 zu dividieren, weil jede der übrig bleibenden Schmiegungsebenen durch Q eine zweifache ist. Die Spitzen von $\mathfrak{H}$ werden durch diejenigen $2(m-2)k$ Spitzen von $\mathfrak{U}$ erzeugt, welche nicht in der Basisebene liegen, und zwar entspricht je eine Spitze von $\mathfrak{H}$ zwei Spitzen von $\mathfrak{U}$. Man hat also für die Singularitäten $M, N\ldots$ von $\mathfrak{H}$:

$$\begin{aligned}
M &= \tfrac{1}{2}\, m(m-1) \\
N &= n(m-2) \\
2J &= (m-3)(3n+k) + (m-1)i \\
&= 2(m-2)(3n+k) - 3m(m-1) \\
K &= (m-2)k.
\end{aligned}$$

Die Plücker'schen Formeln geben weiter:

$$2D = \tfrac{1}{4}(m+1)m(m-1)(m-2) - (m-2)(n+3k)$$
$$D = \tfrac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3) + (m-2)d$$

$$2\,T = n^2\,(m-2)^2 - (m-2)\,(10\,n + 3\,k) + 4\,m\,(m-1)$$
$$2\,P = (n+k)\,(m-2) - m\,(m-1) + 2.$$

$(m-2)\,d$ Doppelpunkte von $\mathfrak{H}$ liegen zu je $m-2$ auf den Strahlen von P nach den Doppelpunkten von $\mathfrak{C}$ und sind die Projectionen von je 2 Doppelpunkten von $\mathfrak{U}$. Die übrigen Doppelpunkte von $\mathfrak{H}$ sind zu P conjugiert harmonisch in Bezug auf zwei verschiedene Paare homologer Punkte. Die Curve $\mathfrak{H}$ hat n $(m-2)$-fache Tangenten, welche durch P gehen.

XI. Die Spur der Developpabeln $\mathfrak{U}$ auf beliebiger Ebene E. Von den Singularitäten $\mu_e\,\nu_e\ldots$ sind bekannt:

$$\mu_e = n\,(2\,m-3)$$
$$\nu_e = (2\,m-3)\,(3\,n+k) - 3\,m\,(m-1)$$
$$\varkappa_e = m\,(m-1).$$

Daraus findet man:

$$\iota_e = 3\,(2\,m-3)\,(2\,n+k) - 8\,m\,(m-1)$$
$$2\,\delta_e = (2\,m-3)\,[n^2\,(2\,m-3) - 4\,n - k]$$
$$2\tau_e = [(2m-3)(3n+k) - 3m(m-1)]^2 - (2m-3)(22n+10k) + 27m\,(m-1)$$

Das Geschlecht π_e ist identisch mit P_0.

Die Ebene E, für deren Schnitt mit der Developpabeln $\mathfrak{U}$ diese Singularitäten gelten, schneidet die zwei Kegel $M_1\mathfrak{C}$ und $M_2\mathfrak{C}$ in zwei Curven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, welche zu einander centrisch collinear sind; die Collineationsaxe ist die Schnittlinie der Ebene E mit der Ebene C, in welcher die Curve $\mathfrak{C}$ liegt, und das Collineationscentrum ist der Punkt P_e, in welchem die Ebene E von der Geraden $M_1 M_2$ getroffen wird. Ein Punkt von $\mathfrak{U}$ liegt auf zwei Erzeugenden, die von M_1 und M_2 aus nach zwei in Bezug auf P homologen Punkten von $\mathfrak{C}$ gehen; diese zwei Erzeugenden gehen aber gleichzeitig nach zwei in Bezug auf P_e homologen, jedoch nicht in der Collineation einander entsprechenden Punkten der Curven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$. Man kann sich also die Raumcurve $\mathfrak{U}$ auch aus zwei zu einander centrisch collinearen Curven $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2$ einer Ebene entstanden denken, indem man über diesen Curven zwei Kegel bildet, deren Spitzen M_1, M_2 mit dem Collineationscentrum in gerader Linie liegen, und dann die Schnittpunkte solcher Erzeugendenpaare markiert, welche nach homologen, aber nicht collinear einander entsprechenden Punkten gehen. Die Spur der Developpabeln auf der Ebene E ist dann der Ort der Schnittpunkte solcher Tangentenpaare von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, welche in Bezug auf das Collineationscentrum homolog, aber nicht collinear entsprechend sind. Diese Ortscurve besitzt die oben gefundenen Singularitäten $\mu_e\, \nu_e \ldots$

XII. Die Trasse der Curve $\mathfrak{C}$. Um die Singularitäten μ, $\nu \ldots$ von $\mathfrak{T}$ zu erhalten, ist Folgendes zu bedenken: Die Trasse ist ein Theil der Doppelcurve der Developpabeln $\mathfrak{U}$; sie ist also im Schnitt dieser Fläche mit der Basisebene doppelt zu rechnen. Aber sie bildet nicht den ganzen Schnitt. Die Curve $\mathfrak{U}$ hat ja k Spitzen, deren Tangenten in der Basisebene liegen. Diese Tangenten, einfach gerechnet, sind also zuerst in Abzug zu bringen, wenn μ aus μ_e abgeleitet werden soll, und der Rest ist durch 2 zu dividieren. Die Klassenzahl ist offenbar die Hälfte von ν_e, weil je zwei Schmiegungsebenen, welche durch einen Punkt der Basisebene gehen, dieselbe Spur haben. Die Spitzen der Trasse sind nicht mehr sämmtliche Schnittpunkte der Raumcurve mit der Basisebene. Die n Punkte B sind abzurechnen, denn trotzdem sie Schnittpunkte der Cuspidalcurve $\mathfrak{U}$ mit der Basisebene sind, geben sie zu keinen Spitzen in der Spur Veranlassung, weil sie einfache Punkte von $\mathfrak{U}$ sind, während die Trasse eine Doppelcurve ist. Ebenso sind abzurechnen, und zwar dreifach gezählt, die k Spitzen von $\mathfrak{U}$, welche in der Basisebene liegen, denn sie erzeugen ebenfalls keine Spitzen in der Trasse, sondern einfache Curvenpunkte, deren Tangente mit der Spitzentangente von $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{U}$ zusammenfällt. Es bleiben also nur noch $m(m-1)-n-3k$, d. h. $2d$ Schnittpunkte von $\mathfrak{U}$ mit der Basisebene übrig, welche zu je zweien zusammenfallen und eine Spitze der Trasse erzeugen. In der That ist leicht einzusehen, dass jeder Doppelpunkt von $\mathfrak{C}$ eine Spitze in der Trasse sein muss; denn ein Doppelpunkt von $\mathfrak{C}$ ist ein Doppelpunkt von $\mathfrak{U}$ in der Art, dass die beiden Aeste einander involutorisch entsprechen; jeder dieser beiden Aeste der Cuspidalcurve $\mathfrak{U}$ erzeugt in der Spur zwei Aeste, die eine Spitze bilden, aber das eine Paar von Aesten deckt sich mit dem andern, weil die beiden Aeste von $\mathfrak{U}$ einander involutorisch entsprechen. Man hat also für die Trasse die Singularitäten:

$$\mu = mn - \tfrac{3}{2}n - \tfrac{1}{2}k$$
$$\nu = \tfrac{1}{2}(2m-3)(3n+k) - \tfrac{3}{2}m(m-1)$$
$$\varkappa = d.$$

Daraus folgt weiter:

$$\iota = \tfrac{3}{2}(2m-3)(2n+k) - 4m(m-1) - \tfrac{1}{2}n$$
$$2\delta = \tfrac{1}{2}n(2m-3)(mn - \tfrac{3}{2}n - k - 4) + \tfrac{3}{2}n + \tfrac{1}{4}k^2 - \tfrac{1}{2}k(2m-13)$$
$$2\tau = \nu^2 - \nu - \mu - 3\iota.$$

Für das Geschlecht findet man aus $\mu, \delta, \varkappa$:

$$2\pi = (m-2)(n+k) - m(m-1) + 2.$$

Dieser Werth stimmt mit dem von Zeuthen gefundenen überein, ebenso mit dem Geschlecht P der harmonischen Curve, wie es sein muss, weil die Punkte der Trasse und der harmonischen Curve einander eindeutig entsprechen.

Man hätte ι auch direct aus ι_e ableiten können. ι_e war die Anzahl der stationären Schmiegungsebenen von $\mathfrak{U}$; eine solche gibt aber dann keine Inflexion mehr in der Spur, wenn die schneidende Ebene durch den Berührungspunkt geht. Es sind also jene n stationären Schmiegungsebenen in Abzug zu bringen, deren Berührungspunkte die Punkte B sind; der Rest ist durch 2 zu dividieren.

Wenn man sich ein Bild vom Verlauf der Trasse machen will, so muss man bedenken, dass sie nicht eine einfache, sondern eine doppelte Spurcurve ist und dass sie folglich zweierlei reelle Punkte hat: solche, durch welche zwei reelle und solche, durch welche zwei imaginäre Tangenten von $\mathfrak{U}$ oder von $\mathfrak{C}$ gehen. So entstehen parasitische Theile der Curve, deren Grenzpunkte Schnittpunkte von zwei unendlich benachbarten Tangenten von $\mathfrak{U}$ oder $\mathfrak{C}$, also Punkte von $\mathfrak{C}$ sind.

XIII. Doppel- u. dreifache Punkte der Trasse. Die Trasse hat die Eigenschaft, ausser Doppelpunkten auch dreifache Punkte zu besitzen. Diese beiden Arten von Punkten und gleichzeitig auch ihre Anzahlen mögen mit Θ und Δ bezeichnet werden. Ein Doppelpunkt Θ entsteht, wenn zwei Paare homologer Punkte von $\mathfrak{C}$, die auf verschiedenen Strahlen durch P liegen, denselben Punkt der Trasse geben. Ein dreifacher Punkt Δ entsteht, wenn drei zu einander homologe Tangenten von $\mathfrak{C}$ durch einen Punkt gehen. Nun lassen sich Θ und Δ durch Anwendung des Chasles'schen Correspondenzprinzips einzeln bestimmen und zur Controle hat man dann die Beziehung

$$\delta = \Theta + 3\,\Delta.$$

Bestimmung von Δ. Man ziehe durch P einen

Strahl x, lege in zwei homologen Punkten desselben die Tangenten, die sich in einem Punkt X der Trasse schneiden, und von X aus lege man eine weitere Tangente, deren Berührungspunkt B', mit P verbunden, einen Strahl x' liefert. Wenn X ein dreifacher Punkt wird, so tritt in der Correspondenz $(x\,x')$ eine Coincidenz ein und zwar eine dreifache, weil der Punkt B' drei verschiedene Lagen haben kann. Man findet also Δ, wenn man diejenigen Coincidenzen in Abzug bringt, welche nicht dreifache Punkte liefern, und den Rest durch 3 dividiert.

Zu jedem Strahl x gehören $\frac{1}{2}m(m-1)(n-2)$ Strahlen x'. Um die Anzahl der Strahlen x zu erhalten, die zu einem Strahl x' gehören, haben wir zu ermitteln: wie viel gibt es auf einer Basistangente Punkte X der Trasse, in welchen sich zwei andere zu einander homologe Tangenten schneiden? Offenbar ist diese Zahl $= \mu - m + 1$, indem diejenigen $m - 1$ Punkte abzurechnen sind, in welchen sich die Basistangente mit ihren homologen Tangenten schneidet. Zu jedem Strahl x' gehören also $m(\mu - m + 1)$ Strahlen x. Die Zahl der Coincidenzen ist demnach $= \frac{1}{2}m(m-1)(n-2) + m(\mu - m + 1)$. Die abzuziehenden Coincidenzen sind nun die folgenden:

1. Jede Inflexion der Basis erzeugt $m - 1$ Coincidenzen. Die Inflexionstangente berührt nämlich die Trasse in $m - 1$ Punkten (VIII); zieht man also x' nach einem Inflexionspunkt, den man als B' nimmt, so fällt mit jedem der vorhin erwähnten $m - 1$ Punkte noch ein zweiter zusammen, der ebenfalls abzurechnen ist; für jede Inflexion sind also $m - 1$ Coincidenzen abzuziehen.

2. Jeder Doppelpunkt der Basis erzeugt eine zweifach zählende Coincidenz. Von jedem Punkt, der einem Doppelpunkt unendlich nahe ist, gehen nämlich vier Tangenten

an die Basis, deren Berührungspunkte zum Doppelpunkt unendlich benachbart sind. Wenn zwei von diesen Tangenten zu einander homolog sind, so geben die beiden andern zwei Berührungspunkte B', unendlich benachbart zum Doppelpunkt, also zwei zusammenfallende Coincidenzen, denen in der Trasse kein Punkt $\varDelta$, sondern eine Spitze entspricht.

3. Jede Spitze der Basis erzeugt eine einfache Coincidenz. Denn von jedem Punkt aus, der zur Spitze unendlich nahe ist, gehen drei Curventangenten, deren Berührungspunkte zur Spitze unendlich benachbart sind. Wenn zwei von diesen Tangenten zu einander homolog sind, so gibt die dritte einen Berührungspunkt B', wodurch wieder eine Coincidenz entsteht, welcher kein Punkt $\varDelta$ entspricht.

4. Jeder Strahl x durch P, welcher die Basis berührt, gibt $m-2$ einfache Coincidenzen; denn eine solche Tangente ist homolog zu den Tangenten in ihren $m-2$ Schnittpunkten T mit der Basis und die zu diesen letztern Tangenten unendlich benachbarten Tangenten gehen ebenfalls durch T. Es fallen also $m-2$ Punkte B' in die Punkte T, wodurch $m-2$ zusammenfallende Coincidenzen entstehen, denen keine Punkte $\varDelta$ entsprechen. Man hat also schliesslich:

$$3\,\varDelta = \tfrac{1}{2}\,m\,(m-1)\,(n-2) + m\,(\mu - m + 1) - (m-1)\,i - 2d - k - n\,(m-2)$$

oder, wenn man i und d durch m, n, k ausdrückt:

$$\varDelta = \tfrac{1}{2}\,m\,\mu - \tfrac{1}{4}\,m\,k + k - \tfrac{1}{4}\,n\,(5\,m-8)$$

Setzt man für μ seinen Werth ein (XII), so kommt:

$$\varDelta = \tfrac{1}{2}\,n\,(m-2)^2 - \tfrac{1}{2}\,(m-2)\,k.$$

Diese Zahl stimmt mit derjenigen überein, welche Zeuthen durch eine etwas verschiedene Anwendung des Correspondenzprincips gefunden hat (I).

Mit dieser Formel ist die Frage beantwortet: Von welcher Klasse ist die Einhüllende derjenigen Geraden, welche eine gegebene ebene Curve so schneiden, dass die Tangenten von dreien der Schnittpunkte durch einen Punkt gehen? Für eine Basiscurve dritter Ordnung ist diese Einhüllende die Curve von Cayley, welche bekanntlich von der dritten Klasse ist.

XIV. Bestimmung von Θ. Ein Strahl x durch P treffe die Basis in A; auf der zugehörigen Tangente a bestimme man wie vorhin die $\mu - m + 1$ Punkte X auf der Trasse, von welchen aus zwei andere zu einander homologe Tangenten gehen; von jedem solchen Punkt X ziehe man noch eine vierte Tangente an die Basis und ihren Berührungspunkt B' verbinde man mit P durch einen Strahl x'. Dann gehören in der Correspondenz (xx') zu jedem Strahl x oder x' $m(\mu - m + 1)(n - 3)$ Strahlen x' oder x. Die Zahl der Coincidenzen ist folglich $= 2m(\mu - m + 1)(n - 3)$.

Zu jedem Punkt Θ gehören nun vier Coincidenzen. Wenn nämlich durch das Auftreten eines Doppelpunktes Θ x' mit x zusammenfällt, also A und B' homolog werden, so können diese beiden Punkte miteinander vertauscht werden; dadurch wird aber die Coincidenz zu einer zweifachen. Ausserdem ist evident, dass derselbe Punkt durch zwei von einander verschiedene Coincidenzstrahlen erzeugt wird, auf welchen die zwei Paare homologer Punkte liegen. Hat man also diejenigen Coincidenzen ermittelt und in Abzug gebracht, welche nicht zu eigentlichen Punkten Θ führen, so ist die übrig bleibende Zahl durch 4 zu dividieren. Die abzuziehenden Coincidenzen sind nun die folgenden:

1. A sei ein Inflexionspunkt; seine Tangente a be-

rührt die Trasse in $m - 1$ Punkten, so dass es auf dieser Tangente nur $\mu - 2(m - 1)$ Schnittpunkte X mit der Trasse gibt, von welchen aus an die Basis zwei homologe Tangenten gehen, von denen keine in A berührt. Zu den Tangenten, welche von diesen Punkten X aus als vierte an die Basis gelegt werden können, gehört die Inflexionstangente selber, für welche der Berührungspunkt B' mit A unendlich benachbart ist; x' fällt dann mit x sammen, ohne dass ein Punkt Θ erzeugt wird.

2. Die Schnittpunkte der Basiscurve mit der Trasse sind von verschiedener Art: ein Theil gibt Coincidenzen, ein anderer Theil nicht. Diejenigen Schnittpunkte, welche keine Coincidenzen liefern, sind die folgenden:

a) die n Berührungspunkte B der von P an die Basis gehenden Tangenten; von jedem dieser Punkte aus gehen zwei unendlich benachbarte homologe Tangenten, deren Berührungspunkte zu B unendlich benachbart sind; andere Paare homologer Tangenten gehen nicht durch sie.

b) Die $n(m - 2)$ Punkte T, in welchen sich die Basis und die Trasse berühren, wobei letztere eine Inflexion hat. Die zwei homologen Tangenten, welche sich in diesen Punkten schneiden, haben ihre Berührungspunkte in T und B; eine dritte durch T gehende Tangente hat ihren Berührungspunkt unendlich benachbart zu T, aber keine vierte durch T gehende Tangente ist zu der dritten homolog.

c) Durch die k Spitzen der Basis geht die Trasse einfach hindurch mit gemeinschaftlicher Tangente. Jede Spitze ist ein Schnittpunkt zweier homologen Tangenten; eine dritte durch sie gehende Tangente berührt ebenfalls in der Spitze, aber keine vierte durch die Spitze gehende Tangente ist zu der dritten homolog.

Es bleiben nun $m\mu - n - 2n(m-2) - 3k$ Schnittpunkte der Basiscurve und der Trasse übrig und alle diese erzeugen Coincidenzen, welchen aber keine Punkte Θ entsprechen und welche also von der Zahl aller Coincidenzen in Abzug zu bringen sind. Jeder einfache Schnittpunkt S der beiden Curven erzeugt dabei eine einfache Coincidenz. Denn auf der Basistangente in S ist S selbst einer der Punkte, von welchen aus zwei homologe Tangenten, an die Basis gehen; eine vierte von S ausgehende Tangente ist zu der ersten unendlich benachbart und gibt einen Punkt B', der zu S unendlich benachbart ist, so dass eine einfache Coincidenz entsteht. Die Doppelpunkte der Basis gehören ebenfalls zu der obigen Zahl von Schnittpunkten, welche Coincidenzen erzeugen. Da in jedem Doppelpunkt der Basis die Trasse eine Spitze hat, so fallen in jeden derselben vier Schnittpunkte der beiden Curven. Andererseits zeigt eine nähere Ueberlegung, dass jeder Doppelpunkt eine vierfache Coincidenz veranlasst. Die zwei Paare homologer Tangenten, welche von ihm ausgehen, haben ihre zwei Paare homologer Berührungspunkte in ihm selbst.

Auf Grund dieser Betrachtungen erhält man nun:

$$4\Theta = 2m(\mu - m + 1)(n-3) - i(\mu - 2m + 2) - \mu m + n + 2n(m-2) + 3k$$

oder, indem man für μ seinen Werth einsetzt und i durch m, n, k ausdrückt:

$$2\Theta = mn(m-2)(n-3) - (n-2)(mn - \tfrac{9}{4}n + mk) + \tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{1}{2}k(3n+1).$$

Durch die gefundenen Werthe von δ, Δ, Θ wird die Beziehung $\delta = \Theta + 3\Delta$ genau befriedigt.

Als weiteres Resultat ergibt die vorige Betrachtung die Zahl s derjenigen Punkte S der Basis, in welchen sich zwei nicht in S berührende Tangenten derselben schneiden, die für einen beliebig gegebenen Pol homolog sind:

$$s = m\mu - n - 2n(m-2) - 3k - 4d.$$
$$= n(m-2)(m-\tfrac{3}{2}) - 4d - \tfrac{1}{2}mk - 3k$$
$$= m(m-1)(m-2)(m-\tfrac{3}{2}) - m^2(2d+3k) + m(7d+10k) - 10d - 12k$$

Für eine Basiscurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkte und Spitzen fand Steiner (Werke Bd. II, S. 489), dass $s = 9$ ist und dass die 9 Punkte S zu dreien in drei Geraden liegen. Die 9 Geraden durch den Pol in drei Gruppen zu dreien entsprechen den drei Systemen conjugierter Punkte auf der Curve dritter Ordnung.

(Fortsetzung folgt im nächsten Heft).

Notizen.

Bibliographische Notizen. — Den früheren Serien lasse ich in gleicher Ordnung folgende weitere Notizen folgen:

38. A. R. Clarke, Comparisons of the standards of length of England, France, Belgium, Prussia, Russia, Australia, made at the Ordnance Survey Office, Southhampton. London, 1866 in 4. (Pol.). — „Presented to M. Charles von Littrow. Vienna, by authority of the right hon^ble^ Secretary of State for War".

Da dieses, von Prof. Joh. Wild mit dem grössten Theile seiner Bibliothek dem Polytechnikum geschenkte Werk, durch ihn antiquarisch erworben worden war, so ist somit anzunehmen, dass nach dem Tode des Prof. Karl v. Littrow, dessen Privatbibliothek, in welche wohl auch diejenige seines unvergesslichen Vaters übergegangen war, unter den Hammer kam.

39. J. W. Zollmann, Vollständige Anleitung zur Geodäsie oder practischen Geometrie. Halle 1744 in fol. (Pol.). — „Adrien Scherer".

Da dieses, ebenfalls durch die Schenkung von Prof. Wild an das Polytechnikum gekommene Werk, von ihm bei Antiquar Hanke in Zürich erstanden worden war, so ist wohl ebenfalls ziemlich sicher, dass die von Oberst Adrian Scherer in St. Gallen (vgl. Biogr. III. 390) hinterlassene Bibliothek von seinen Erben vertrödelt wurde.