Grundlagen und Gebiete der Raumlehre.

Von

Fr. Graberg.

Klarer Ueberblick über den Zusammenhang von Bewegungsrichtungen und Flächengestalt begründet die wirkliche Raumerkenntniss und regelt zugleich das räumliche Gestalten.

Nach Abschluss des Aufsatzes über den «Bau des Massraumes» bearbeitete der Verfasser die elementaren Massformen der «darstellenden Geometrie» nebst deren Anwendungen in verschiedenen Berufsarten selbständig unter der Ueberschrift: «Werkrisslehre». Diese deutet an, dass Zeichnen und wirkliches Gestalten zusammengehören, indem die sichtbaren Linien und Flächen sinnbildliche Zeichen für mechanische Verrichtungen sind, welche zur Herstellung der von jenen Linien angedeuteten Kanten und Flächen dienen. Denn die Menschen haben ursprünglich ihre räumlichen Vorstellungen hauptsächlich durch Herstellung und Bearbeitung von Flächen ausgebildet. Auf Grund der Werkrisslehre, welche also den Zusammenhang zwischen Raumanschauung und wirklichem Gestalten beim Handwerk darstellt, mögen nun die Grundlagen und Gebiete der Raumlehre übersichtlich zusammengefasst werden, um die Theorien der Mathematiker mit der Denkweise des Bildners und Zeichners in Uebereinstimmung zu bringen.

1. Mathematiker und Bildner.

Die Ueberschrift «Liniengeometrie», welche Sturm der jüngst erschienenen synthetischen Bearbeitung der Complexe oder «Strahlengewinde» vorsetzte, weist nämlich darauf hin, dass die Mathematiker geneigt sind, die Linienverbindungen an sich allein, ohne Rücksicht auf die Flächen, aufzufassen, weil bei Vorstellung der Gestalten hauptsächlich deren Grenzlinien im Blickfelde des Bewusstseins beharren. Zeichner und Bildner dagegen sehen, während sie Linien über ein Fläche ziehen, deren Biegungen und Windungen im Zusammenhang mit der Flächengestalt. In seiner «Geschichte des deutschen Kupferstiches und Holzschnittes» sagt Lützow von A. Dürer: Das Grundprinzip von dessen Linienführung und Schraffirung war, «sich den Formen der Gegenstände und ihrer Modellirung innig anzuschmiegen.» Der Mathematiker legt besonderen Werth auf die Kenntniss der Massverhältnisse, der Zeichner dagegen richtet sein Augenmerk vorzüglich auf den Verlauf der Linien, die Wölbung der Flächen. Die volle Raumerkenntniss umfasst sowohl die Massverhältnisse als die Bewegung der Linien auf den Flächen, denn das Augenmass, das beim Gestalten leitet, muss die erstern zugleich mit der letztern in Betracht ziehen. Es fragt sich also: Wie soll man richtig bemessene Linien über die Flächen ziehen? Weiterhin entsteht daraus die Frage: Wie kann man die Gestalt der Flächen durch richtig bemessene Linien sicher andeuten?

2. Wirkliche Raumerkenntniss.

Um eine Gegend wirklich zu kennen, muss man von jeder Stelle aus «Weg und Steg» zu finden wissen. Einen

Berg kennt man noch nicht, wenn man nur seinen Namen, die Höhenzahl seiner Spitzen weiss oder Beschreibungen von demselben gelesen hat; sondern, um einen Berg wirklich zu kennen, muss man denselben wiederholt besteigen oder wenigstens sich an Hand von Karten und Rundsichten eine anschauliche Vorstellung von den Umrissen und Abhängen, den Steigungsverhältnissen des Berges verschaffen. Doch geometrische Gestalten sollte man wirklich kennen auf Grund einer Anzahl von Lehrsätzen und algebraischen Formeln? Nein! Wirkliche Raumerkenntniss wird für die Wissenschaft wie in der Praxis nur erworben mittelst wirklicher und vorgestellter Tastbewegungen der Hand und des Blickes über die Flächen der Gegenstände. Wer sich die Richtungen in fliessendem Zusammenhang vorstellen kann, nach welchen sich der Blick über ebene und gewölbte Flächen hinbewegt, der besitzt den klaren Ueberblick über dieselben, welcher die wirkliche Raumerkenntniss begründet und welcher zugleich das räumliche Gestalten regelt; da die Flächen mittelst Tastbewegungen gestaltet werden, sei es dass die Hand selbst den Thon drücke, sei es dass dieselbe Schneidewerkzeuge führe oder der Blick den Gang der Maschine überwache.

3. Augenmass und Massverhältnisse.

Der Ueberblick über die Flächen, getragen von dem Augenmass für Richtungen und Ausdehnungen, ist der Vermittler zwischen den äusseren Anschauungen, den mechanischen Verrichtungen einerseits und den Verbindungen der Vorstellungen anderseits. Der Ueberblick über die ganze Curve in einer Fläche bestimmt das Mass der Biegung oder Windung an jeder einzelnen Stelle. Der

Ueberblick über die ganze Wölbung einer Fläche bedingt den Verlauf der durch einzelne Richtungen bezeichneten Curven auf derselben. Der Ueberblick erwächst aus der Verbindung von Wahrnehmungen und Vorstellungen der Linien auf den Flächen, fasst also die Beziehungen zwischen sichtbaren und blos angedeuteten Richtungen zusammen, lässt daher die Gestalt als geordnetes Ganzes erscheinen und leitet deren geregelte Verwandlungen ein. Gewiss sind die räumlichen Beziehungen, welche aus der geregelten Bewegung von Richtungen in Flächen hervorgehen, die Massverhältnisse, allgemein gültig. Doch die Erkenntniss solcher Allgemeingültigkeit beruht nicht allein darauf, dass diese Beziehungen sich auf einfachere Eigenschaften der Gestalten stützen, mit Hülfe dieser und jener Lehrsätze oder Formeln bewiesen werden können, sondern erst dann wird diese Allgemeingültigkeit thatsächlich erkannt, wenn das Augenmass dieselbe vielfach bestätigte, weil man jene Beziehungen allgemein verwendet hat.

4. Masszeichen und Massraum.

Träger der Beziehungen zwischen Richtungen in Flächen sind die Masszeichen, Linienverbindungen in sichtbaren oder vorgestellten Flächen, welche Bewegungsrichtungen bezeichnen. Diese Linienverbindungen gehen im Allgemeinen aus Verbindungen von Flächen hervor, von denen die einen, die Massflächen, fest, während die anderen, die Zeigeflächen, beweglich gedacht werden.

Mass- und Zeigeflächen gliedern den Massraum. Dieser ist der Inbegriff seiner in Flächen bewegten Richtungen und zwar fassen wir denselben von vornherein als Ganzes auf, als den Ort unserer wirklichen und vorgestellten Tastbewegungen, wie der Zeichner das Zeichenfeld, der Bildner die Rohform als Ganzes überblickt.

5. Gebiete der Raumlehre.

Augenmass und räumliche Vorstellung beherrschen das Sehfeld und den Massraum um so vollständiger, je vielseitiger die Verbindungen sind, welche die massgebenden Bewegungsrichtungen bezeichnen. Die Raumlehre, welche diese Flächenverbindungen in bestimmten Masszeichen sinnbildlich darstellt, lässt sich nun der Vielseitigkeit jener Verbindungen entsprechend in 3 Gebiete gliedern. Der Zusammenhang zwischen Bewegungsrichtungen und Flächengestalt wird am leichtesten erkannt, desshalb auch am sichersten beherrscht, wenn Gerade sich in Ebenen bewegen oder Ebenen durch Gerade verbunden sind. Dieses Gebiet der Ebenen, das Lineargebiet, umfasst die Gestalten, nach welchen wir uns im Raum in erster Linie zurechtfinden, wie der Zeichner auf seinem Zeichenfelde zunächst Hauptrichtungen und geradlinige Umrisse entwirft.

In der Ebene werden Richtungen verschoben oder gedreht, auf Regelflächen winden sich dieselben im Allgemeinen. Die Verbindungen der Regelflächen zeigen daher den Zusammenhang der Windungen, der Biegungen in der Ebene, mit der Gestalt dieser Regelflächen. Derselbe gründet sich auf die Massverhältnisse des polaren Gegensatzes von geparten Richtungen, der Polarität. Das Gebiet der Rundungen, das Polargebiet, umfasst die Gestalten, welche für die Bogen, Windungen und Wölbungen massgebend sind.

Alle weiteren Flächenverbindungen können als Flächengruppen aufgefasst werden, weil dabei wohl die Zahl und Ordnung der Bindecurven und der Bindeflächen (Brennflächen) sich vermehrt, die Bewegungsweise der Richtungen dagegen dieselbe bleibt. Das Gruppengebiet dient vorherrschend dem Ueberblick über die räumliche Anordnung der Gestalten. Während im Linear- und Polargebiet die Linien meist vollständig gezeichnet werden, kommt es im Gruppengebiet darauf an, zu erkennen, was für Bewegungen einzelne Richtungen im Zusammenhang der Flächenverbände andeuten. Dennoch muss man dabei die Möglichkeit im Auge behalten, die Linien in ihrem ganzen Verlauf zu verfolgen, damit wirklich ein klarer Ueberblick über den Zusammenhang von Bewegungsrichtungen und Flächengestalten gewonnen werde. Auch Bildner und Zeichner deuten bei Darstellung von Gestaltengruppen Nebenformen blos an und setzen dabei voraus, dass der Beschauer das Fehlende selbst nach Massgabe des Gebotenen ergänzen könne.

6. Grundlagen der Raumlehre.

Der Bildner arbeitet seine Gestalten aus einer Rohform heraus; so gestaltet man auch in der Vorstellung auf Grundlage einfacher Flächenverbindungen: im Lineargebiet auf Grundlage des Ebenenpares; im Polargebiet auf Grundlage des Vierflaches; im Gruppengebiet auf Grundlage des Verbandes von Regelflächen zum Strahlengewinde.

7. Aufgabe der Raumlehre

ist die stetige Entwickelung der Masszeichen dieser Gebiete auf deren Grundlagen durch Verbindung von Mass- und Zeigeflächen. Dabei erwachsen und befestigen sich die Raumbegriffe durch die **wechselweise Bethätigung des Augenmasses und der gestaltenden Vorstellung.**

8. Zeichenschrift.

Diese wechselnde Bethätigung von Augenmass und gestaltender Vorstellung äussert sich in der Zeichenschrift: im Ziehen der Linien nach dem Augenmass, im Verbinden der Flächen nach der Vorstellung; in der Andeutung dieser Flächenverbindungen durch Bezeichnung der massgebenden Bewegungsrichtungen.

Jede Zeichenschrift entwickelt sich gleich der Sprache, theis extensiv, in Folge Erweiterung des Gesichtskreises, theils intensiv durch Vertiefung der Zeichendeutung. Auch das freie und das messende Zeichnen verschmelzen zur Zeichenschrift, je sicherer das Augenmass und die Hand den Linienzug beherrschen. Naturformen werden durch Stilisirung geregelt und Massformen, ohne Hülfe der Messwerkzeuge, frei gestaltet. Damit erlangen die Linien typische Bedeutung, nicht als Laut- oder Zahlzeichen, wie bei der Ausbildung der Buchstaben- und Zifferschrift, sondern als Masszeichen. Man lernt nämlich aus den Linienverbindungen die Gestalt der Flächen, die Massverhältnisse erkennen. Dann dienen dieselben als Masszeichen zur unmittelbaren Verwendung der Raumerkenntnisse beim räumlichen Gestalten.

Die Bedeutung der Masszeichen erweitert sich mit der Vielseitigkeit ihrer Verbindungen, dieselbe vertieft sich, wenn sich an die Wahrnehmung massgebender Richtungen die Vorstellungen von Linienzügen und Flächenwölbungen knüpfen. Dieser Vorgang beginnt schon bei

Gestaltungen im Linear- und Polargebiet, um dann im Gruppengebiet zur vollen Geltung zu gelangen.

9. Schriftzeichen zur Darstellung der räumlichen Verbindungen.

Ueberblick über die Gestaltungen und Fertigkeit im Gestalten sind unser Ziel. Zu dem reicht jedoch die bildliche Darstellung allein nicht immer aus. Pläne versieht man mit Titel und zurechtweisenden Buchstaben. Denn der Unkundige sieht den Linien weder an, was sie vorstellen, noch in welcher Reihenfolge sie gezogen sind. Zur Einführung in das Verständniss der Zeichnung sind anfänglich noch Schriftzeichen und Erklärungen erforderlich und solche vermitteln auch späterhin den Ueberblick über die Verbindungen, unterstützen das Gedächtniss beim Gestalten. Doch dürfen solche Hülfszeichen nur den Tasten gleichen, die man flüchtig berührt, wesentlich bleibt immer: Stetigkeit der räumlichen Vorstellung anzustreben.

Nach dem Vorgang Schröters benützen wir als Schriftzeichen verschiedene Klammern zur Unterscheidung der Raumelemente, wie folgt:

$|a, b|$ = Gerade a, b; $[\alpha, \beta]$ = Ebenen α, β.

$.A, \mathfrak{b}.$ = Punkte A, $\mathfrak{b}$; (π^2, ζ^3) = Curven π^2, ζ^3.

$\|a\,b\,c\|^2$ = Regal (Hyperboloid) der Leitungen $a\,b\,c$.

$\|a\,b\,c_z\|^2$ = Zeilregal (Paraboloid) mit der unendlich fernen Leitung c_z.

$.A\,(\pi)^2$ = Kegel der Spitze A und der Leitung π.

$(E, P, H)^2$ = Schalflächen: Ellipsoid, Paraboloid, Hyperboloid.

Wenn nun 2 Richtungen eine Stelle gemein haben, so kann man sich von entgegengesetzten Seiten her auf diese Stelle zu bewegen, desshalb deuten wir an: die Verbindung von:

2 Richtungen durch: $|a \,.\, C \,.\, b|$,

2 Ebenen $= [\alpha \,|c|\, \beta]$,

Kegel und Ebene $. A \, [\pi \, (\pi_1^2) \, \beta]$ u. s. w.

Wir machen also von einer gleichartigen Zusammenstellung der verbundenen Elemente Gebrauch, wie die Arithmetik bei Bildung der Determinanten. Wie man $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ liest: $ad - bc$, so kann man $|a \,.\, C \,.\, \beta]$ lesen: «Die Richtung a verbindet Punkt C mit Ebene β.»

10. Benennungen.

Gleichfalls um der kürzern Unterbrechung des räumlichen Denkens durch fremdartige Eindrücke willen, erlauben wir uns zur Darlegung der Entwickelung einige Namen einzuführen.

Ziel und Zeile.

Den unendlich fernen Punkt einer Richtung fassen wir als deren Ziel auf und bilden daraus durch Umlaut das Wort Zeile für die unendlich ferne Gerade der Ebene. Zeilebene bezeichnet also die unendlich ferne Ebene, welche die Zeilen aller Ebenen des Raumes enthält.

Regal.

Die Regelfläche, welche man «Hyperboloid» nennt, kann auch elliptischen Umriss zeigen, wird mit Ebenen sowohl durch Ellipsen als durch Hyperbeln verbunden. Verwendet aber wird diese Fläche als von Strahlen erzeugte Regelfläche und der weite Umfang dieser Verwendung berechtigt wohl, sie die «herrschende» Fläche zu nennen, wie auch das Fächersystem der windschiefen Vierseite dieselbe als Regal kennzeichnet. Dieses Wort ist nämlich gebildet von regalis und regere lenken, herrschen; wie Personal von personalis, Signal von signum. Entscheidend aber war für den Verfasser besonders die Wahrnehmung, dass die Berührebenen des Regales den Zusammenhang zwischen der Ebene und den Regelflächen höherer Ordnung vermitteln, wie seiner Zeit in dem Aufsatz über die «Axenbünde des Massraumes» gezeigt wurde. An solchen Zusammenhang erinnert die Vorstellung der durch geregelte Strahlenbewegung erzeugten Fläche vielmehr als der hyperbolische Umriss, der oft nicht sichtbar, von der zufälligen Lage der Fläche abhängt und bei wirklicher Verwendung derselben als Massfläche zweckmässiger durch elliptischen Umriss ersetzt wird. Ferner bietet sich noch der Vortheil, dass die Namen Hyperboloid und Paraboloid nur Schalflächen bezeichnen, da man das «hyperbolische Paraboloid», das Zeilen zu Leitungen hat, folgerichtig viel kürzer: Zeilregal nennt.

Zielrichtungen und -Flächen.

Die Ebenen und Kegel, welche mit dem Zeilregal durch Zeilen, mit dem Regal durch Zielcurven in der unendlich fernen Ebene verbunden sind, heissen Zielebenen, bezw. -kegel. Die Asymptote wird zur Zielrichtung, wie sie thatsächlich das Ziel andeutet, nach dem der Hyperbelzug zu richten ist. Damit wird zugleich der innere Widerspruch beseitigt, nach welchem die Asymptote, d. h. eine nicht zusammenfallende Linie, dennoch zwei benachbarte unendlich ferne Punkte mit der Hyperbel gemein haben soll.

Schalflächen.

Wie die Regelflächen durch Strahlenbewegung, so werden die Schalflächen durch Curvenbewegung erzeugt. Mit dieser Benennung vermeidet man einerseits die Negation: Nicht-Regelfläche und zieht anderseits in der Natur vorkommende Flächen (z. B. Muscheln und gewundene Hörner) mit in Betracht, die zwar bisher kaum Gegenstand mathematischer Untersuchung waren, aber der Vorstellung von Flächen höherer Ordnung einen Anhalt bieten können. Die bei Erzeugung solcher Schalflächen leitenden oder bewegten Curven sind entweder Biegungen in der Ebene oder Windungen auf Regelflächen. Der Name: Windecurve ersetzt die Tautologie «Raumcurve».

Diese Benennungen scheinen freilich noch ungewöhnlich, der Leser wird sich desshalb anfänglich auf deren Bedeutung besinnen müssen. Doch ein treffendes Wort hat immer so viel Werth wie eine einfache Formel. Wenn also die Sprache Worte besitzt, welche die Vorstellungen kurz und deutlich bezeichnen, wesshalb sollte man derlei Worte nicht gebrauchen dürfen? Suchen wir ja die Wahrheit in der Uebereinstimmung aller Erkenntniss und Thätigkeit, vorliegenden Falles im Einklang des bildlichen, schriftlichen und sprachlichen Ausdruckes mit der Raumerkenntniss.

I. Grundlagen der Raumlehre.

11. Ebenenpar.

Die erste Grundlage der Raumlehre ist das Ebenenpar. Dasselbe besteht ursprünglich aus wagrechter Grund- und lotrechter Wandebene, Ausbreitung und Erhebung über den Baugrund sinnbildlich andeutend. Bei Verbindung unbegrenzt gedachter Flächen kommt auch die unendlich ferne Zeilebene in Betracht, welche mit der Zeichenebene, dem Plan, das der Vorstellung zu Grunde liegende Ebenenpar bildet, dessen Bindekante die Zeilspur ist. Durch diese denkt man sich alle zum Plan parallelen Schichtebenen gelegt. Die Terraindarstellung mittelst Schichtcurven (Niveaulinien, Isohypsen) ist eine bekannte Gliederung des Raumes durch Schichten paralleler Ebenen. Dabei stellt man sich vor, jede Schichtcurve des Reliefs sei mit dem zum Plan rechtwinkligen Stifte auf dieser Ebene angerissen. Die Erhebung einer Schicht über den Plan kann entweder als Masszahl in diesen eingeschrieben oder auf einer Lotebene, dem Profil, eingetragen, oder durch Verhältnisse bestimmt werden. Das letztere geschieht theils durch Beziehung auf die gegebene Erhebung (oder Entfernung) eines Mittelpunktes (Kegelperspective, Centralprojection, Cyclographie), insbesondere aber durch Verbindung der Schichtebene mit andern Ebenen, welche eine bestimmte Lage zu einander haben. Die 3 zu einander rechtwinkligen Coordinatenaxen der Axonometrie z. B. verbinden 3 Ebenen von bestimmter gegenseitiger Lage, welche durch ihre Spuren im Plan und allen zu diesem parallelen Schichten ähnliche Dreiseite bezeichnen. Wird in solchem Verbande die Lage eines Punktes zum Plan angenommen, so ist damit zugleich die aller übrigen Punkte desselben gegeben, vermöge der gegenseitig rechtwinkligen Lage der 3 Coordinatenebenen. Doch fällt eben aus diesem Grunde in solchem Fall die Erhebung des Verbandes über den ursprünglichen Plan meist ausser Betracht.

12. Vierflach.

Dadurch gelangt man zu einer weiteren Grundlage der Raumlehre, nämlich zum Verband von 2 Ebenen-paren, welche beliebige Lage zum Plan haben, indem keine der Seitenebenen des Vierflaches nothwendig eine Schichtebene desselben ist. Wenn nun der ursprünglich in bestimmter wagrechter oder senkrechter Lage gedachte Plan ausser Betracht fällt, so wird auch auf die Lage der einzelnen Richtungen und Flächen im Relief zu demselben keine Rücksicht mehr genommen. Dafür wendet sich die Aufmerksamkeit bei der Verbindung zweier Ebenenpare der gegenseitigen Lage der parweise verbundenen Richtungen und Flächen zu. Die gegenseitigen Beziehungen geparter Richtungen und Ebenen stellen sich in den Gegenpolaren des ebenen und windschiefen Vierseits, in Pol und Polarebene zum Vierflach dar, werden überhaupt als Polarität zusammengefasst. Auf Grund des Vierflaches lassen sich jene Beziehungen übersichtlich darstellen, wie der Bau des Massraumes zeigte. Daher ist das Vierflach die Grundlage des Polargebietes, während das Ebenenpar vorzüglich zur Darstellung einzelner Richtungen, Curven und Flächen dient, desshalb die Grundlage des Lineargebietes genannt werden kann.

13. Regalverband.

Tritt an Stelle der beiden Ebenenpare, welche das Vierflach, die Grundlage des Polargebietes, bilden, ein Regal, indem man die Bindekanten jener Ebenenpare nebst der zu diesen Kanten windschiefen Axe des Zeigebenenbüschels zu Leitungen wählt, so erhält man die Grundlage eines weiteren Gebietes räumlicher Gestaltungen, des Complex- oder Gruppengebietes. Jene Bindekanten können nämlich als ein Par polar zugeordneter Richtungen aufgefasst werden, während die um die

Zeigeraxe sich drehenden Zeigebenen als Berührebenen des Regales die Nullebenen ihrer Berührpunkte darstellen, der Bindepunkte der Zeigeraxe mit den Regelstrahlen jener Zeigebenen. Die Strahlen des Büschels durch diese Nullpunkte in ihren betreffenden Nullebenen bedingen mit den beiden Gegenpolaren je ein neues Regal, das mit dem ursprünglich gegebenen Stammregal durch dieselbe Berührebene verbunden ist. So erwächst auf den Berührebenen des Stammregales der lineare Strahlencomplex der Zweigregale, aus der Verbindung zweier Strahlencomplexe durch dieselben Gegenpolaren das Strahlensystem I. O., wie sich über dem Plan das Relief der Ebenenverbände aufbaut und das Vierflach die Bündel der Regale umhüllen.

II. Gebiete der Raumlehre.

14. Lineargebiet.

Der Darstellung der Flächenverbände liegt ein Ebenenpar zu Grunde: ein wagrecht gedachter Plan und die unendlich fern gedachte Zeilebene. Ueber den Plan erhebt sich das Relief mit der Stufenfolge seiner zum Plan parallelen Schichtebenen (Schichten).

Dieses Relief wird weiter durch 2 zu einander rechtwinklige Lotebenen gegliedert. Die Spur der einen Lotebene im Plan, der Stirnebene, wird wagrecht angenommen; die Planspur der anderen, der Kreuzebene, steht in der Mitte des Zeichenfeldes zur ersten senkrecht.

Stellt man sich das Ebenenbüschel vor, das durch die bezeichneten Lotebenen mittelst ihrer lotrechten Kante, der Lotaxe, gegeben ist, in jeder Ebene von einem Punkt der Lotaxe aus das Büschel der Reliefgeraden, zu jeder von diesen das Büschel der mit ihr parallelen Zielstrahlen, so gewinnt man einen Ueberblick über die dreifache Mannigfaltigkeit von Reliefgeraden, welche durch Stirn- und Kreuzebene angedeutet ist. Die Mannigfaltigkeit möglicher Lotaxen kommt zunächst als blosse Wiederholung des ersten Ebenenbüschels nicht in Betracht.

Das Spurenbüschel um den Planpunkt einer Reliefgeraden deutet ein Ebenenbüschel an, das die Gerade zur Axe hat. Jede dieser Ebenen kann man erzeugen durch parallele Verschiebung der Spur an der Axe oder umgekehrt, und durch Drehung einer Zeigebene um die Axe kann man diese Ebene in die Stellung jeder Büschelebene überführen, in dieselbe verwandeln.

Sind die Axen 2 Ebenenbüschel durch einen Regelstrahl verbunden, so verbindet derselbe auch 2 Ebenen der beiden Büschel. Haben die Axen noch einen Punkt gemein, so fallen die beiden Bindebenen der Axe mit dem Regelstrahle zusammen und es treffen sich dann auch alle Regelstrahlen, welche die beiden Axen verbinden. Bei windschiefer Lage der Axen dagegen sind auch alle dieselben verbindenden Regelstrahlen windschief zu einander, wenn sie sich nicht auf einer der Axen treffen.

Mit einem windschiefen Axenpar bildet ein windschiefes Strahlenpar zwei Ebenenpare, ein Vierflach. Dieses begrenzt nebst den Axen- und Strahlenparen noch ein drittes Kantenpar.

Die Ebenenverbände, welche sich aus den verschiedenen Stellungen geparter Vierflache ergeben, können in dieser Uebersicht nicht weiter ausgeführt werden. Insofern dabei nur die Lage einzelner Ebenen, die Richtung einzelner Kanten in Betracht kommt, gehören diese Flächenverbände dem Lineargebiet an.

15. Das Polargebiet

hat ein Massvierflach zur Grundlage; gegeben durch die Richtungen zweier windschiefer Stammaxen und zweier dieselben verbindenden windschiefen Regelstrahlen, welche 2 Kantenpare des Vierflaches darstellen. Das dritte Kantenpar des Massvierflaches kann, wie jenes Strahlenpar als ein Par Nebenaxen aufgefasst werden.

Die Lotebenen (zum Plan) durch die Stammaxen können entweder zueinander rechtwinklig oder parallel angenommen werden. Die eine und die andere dieser beiden Grenzen deuten alle Zwischenstellungen der beiden Lotebenen an.

Bei rechtwinkliger Stellung der Lotebenen durch die Stammaxen deutet deren Kante 2 lotrecht übereinander liegende Deckpunkte an. Dann können die Ecken des Vierflaches entweder einseitig oder beidseitig vom Deckpunkt der einen und anderen Axe liegen. Bei Parallelstellung jener Lotebenen kommt diese Verschiedenheit der Eckenlage nicht vor, weil die Deckpunkte die Ziele der Stammaxen sind. Den besten Ueberblick über den Innenraum und die anliegenden Nebenräume des Vierflaches gewinnt man bei rechtwinkliger Stellung der Lotebenen und beidseitiger Lage der Ecken zu den beiden oder der einen (wagrechten) Stammaxe.

Mit einer Zeigebene verbindet das Massvierflach ein Vierseit, welches entweder einen Theil von dessen Innenraum einschliesst oder nicht. Im ersteren Falle ist die Zeigebene Einschluss-, im letztern dagegen Anschlussebene.

Nebst den 2 Kantenparen, welche die Zeigebene mit den Kanten des Massvierflaches verbinden, ergibt sich noch eine kreuzweise Verbindung der 3 windschiefen

Gegenkantenpare durch 3 Regelstrahlen und der Bau des Massraumes hat gezeigt, wie bei Drehung der Zeigebene um einen dieser Strahlen die beiden anderen als Gegenpolaren auf der Axe des Zeigebenenbüschels polare Punktreihen bezeichnen.

16. Im weiteren übersieht man den Zusammenhang der Polar- und Terzcurven noch besser als in dem genannten Aufsatze aus folgender Darstellung:

Das Massvierflach $[\alpha]_4$ sei wiederum bezeichnet durch die Stammaxen $|a_1 = A_1 A_3 \, , a_2 = A_2 A_4|$ und die Nebenaxenpare:

$$|b_1 = A_3 A_4 \, , b_3 = A_1 A_2 \, ; b_2 = A_1 A_4 \, , b_4 = A_2 A_3|$$

Die Seitenflächen begrenzen einander also in folgender Ordnung:

$$[\alpha_1 | a_2 | \alpha_3 \, ; \alpha_2 | a_1 | \alpha_4] \, ; [\alpha_2 | b_1 [\alpha_1] b_4 | \alpha_4] \, ; [\alpha_2 | b_2 [\alpha_3] b_3 | \alpha_4].$$

Stellt man $|A_1 A_3|$ wagrecht fest, dessgleichen $.A_2.$ in der senkrechten Stammaxe zwischen $.A_1$, $A_3.$ über $|a_1|$, so kann $.A_4.$ im Relief entweder über dem Innenraum des Dreieckes A_{123} liegen oder über dem $|A_{13}|$ anliegenden Flächentheile von $[\alpha_4]$. Im ersten Fall stellt man sich das Massvierflach auf $[\alpha_4]$ stehend vor, im andern dagegen denkt man sich dasselbe zwischen $|a_1 \, , a_2|$ hängend. Diese Steh- und die Hängform des Massvierflaches deuten alle weiteren Erscheinungsweisen desselben an und damit ist zugleich eine bestimmte räumliche Anordnung für alle Curven und Flächen bezeichnet, welche mittelst der Büschel von Zeigebenen aus dem Massvierflach abzuleiten sind. Kann man sich den Zusammenhang der Curven und Flächen auf einer solchen Grundlage vorstellen, so gelangt man zur Einsicht in den Zusammenhang der verwandten Curven und Flächen durch

Umstellung des Massvierflaches und der Zeigeraxen, wobei nur manigfaltige Uebung im Gestalten und Zeichnen vor dem Anklammern an starre Formen bewahrt.

17. Die Zeigeraxe trifft das Strahlenpar $|\mathfrak{a}_{12}, \mathfrak{b}_{24}|$ in getrennten Punkten.

Die Hängform des Massvierflaches zeigt die Ebenenpare $[\alpha_2|\alpha_1|\alpha_4]$; $[\alpha_1|\alpha_2|\alpha_3]$ besonders deutlich. Legen wir daher diese zu Grunde. Die Zeigebene $[\gamma]$ bezeichne als Einschlussebene das Vierseit $|\mathrm{g}|_4$ mit den Regelstrahlen $|\mathfrak{a}_{12}, \mathfrak{b}_{13}, \mathfrak{b}_{24}|$, indem, wie beim Bau des Massraumes:

$$|b_1 \,.\, \mathfrak{b}_1 [\gamma]\, \mathfrak{b}_3 \,.\, b_3| \;,\; |b_2 \,.\, \mathfrak{b}_2 [\gamma]\, \mathfrak{b}_4 \,.\, b_4| \;,\; a_1 \,.\, \mathfrak{a}_1 [\gamma]\, \mathfrak{a}_2 \,.\, a_2|$$

die Bindepunkte der Massaxen mit der Zeigebene sind.

Die Zeigeraxe $|c|$ treffe das Strahlenpar $|\mathfrak{a}_{12} \,.\, C \,.\, \mathfrak{b}_{24}|$ in $|\mathfrak{a}_{12} \,.\, c_1|c|c_2\, \mathfrak{b}_{24}|$. Dann geht durch $.\, c_1 \,.$ eine Gegenpolare $|\mathfrak{b}_{24}{}^*|$ zu $|\mathfrak{b}_{24}|$ durch die Massaxen $|b_{2,4}|$; dessgleichen geht durch $.\, c_2 \,.$ eine Gegenpolare $|\mathfrak{a}_{12}{}^*|$ zu $|\mathfrak{a}_{12}|$ durch die Massaxen $|a_{1,2}|$.

Die Spuren $[\mathfrak{a}_{12}\, \mathfrak{b}_{24}{}^* \,|\, \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2{}^* \; [a_1 \; b_2] \; \mathfrak{a}_1{}^* \mathfrak{b}_2 \,|\, \mathfrak{b}_{24}\, \mathfrak{a}_{12}{}^*]$ zeigen durch ihren Bindepunkt $|\mathfrak{a}_1 \; \mathfrak{b}_2{}^* \,.\, s_2 \,.\, \mathfrak{a}_1{}^* \; \mathfrak{b}_2|$ die Richtung der Bindekante $[\mathfrak{a}_{12}\, \mathfrak{b}_{24}{}^* | C s_2 \,|\, \mathfrak{b}_{24}\, \mathfrak{a}_{12}{}^*]$.

Auf dieser Bindekante treffen sich auch die Spuren:

$$[\mathfrak{a}_{12}\, \mathfrak{b}_{24}{}^* \,|\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{b}_4{}^* \, [a_2\; b_4] \; \mathfrak{b}_4\; \mathfrak{a}_2{}^* \,|\, \mathfrak{b}_{24}\, \mathfrak{a}_{12}{}^*]$$

in

$$|C s_2 \,.\, s_1 \,.\, a_2\; b_4|.$$

$|C_1 s_2|$ verbindet daher 3 Seitenpare der beiden Vierseite, welche $|\mathfrak{a}_{12}, \mathfrak{b}_{24}{}^*|$ mit den Spuren $|\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2{}^*, \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_4{}^*|$

$|\mathfrak{a}_{12}{}^*, \mathfrak{b}_{24}|$ » » » $|\mathfrak{a}_1{}^* \mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_2{}^* \mathfrak{b}_4|$ bilden,

folglich muss auch das vierte Seitenpar sich auf $|C_1 s_2$ treffen, nämlich $|c_1\; b_2 \,.\, \mathfrak{z} \,.\, c_2{}^*\; \mathfrak{a}_1{}^*|$.

$\mathfrak{z}$ ist, wie $.\, C \,.$ ein Punkt der Terzkurve $(\mathfrak{z})^3$, welche die Regale $|c|\, a_{1,2}\ ;\ b_{2,4}\|^2$ verbindet und liegt in der Zeigebene $[c\mathfrak{a}_1{}^* \mathfrak{b}_2{}^* = \gamma_1]$.

18. Drehung der Zeigeraxe um $|c\,.\,\mathfrak{c}_2\,.\,\alpha_2]$.

Dreht sich $|c|$ in $[\mathfrak{a}_{12}\, \mathfrak{b}_{24}]$ um ihren Fusspunkt $|c\,.\,\mathfrak{c}_2\,.\,\alpha_2]$, so dreht sich auch die Spur $|\mathfrak{a}_1{}^* \mathfrak{b}_2{}^*|$ von $[\gamma_1]$ um denselben. Die Axen der Ebenenbüschel $|C\mathfrak{a}_1[\mathfrak{b}_2{}^*]$, $|Cb_2[\mathfrak{a}_1{}^*]$ verbindet $[\gamma]$, deren Spur $|\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2|$ in $[\alpha_2]$ den Fusspunkt $.\,\mathfrak{c}_2\,.$ von $|c|$ enthält. Desshalb beschreibt $|Cs_2|$ ein Strahlbüschel in $[CA_1 s_2]$, der Polarebene zu $|C\mathfrak{c}_2|$ bez. $C\ [a_1\ ,\ b_2]$.

Bei dieser Drehung der Zeigeraxe $|c|$ um $.\,\mathfrak{c}_2\,.$ nähert sich $.\,\zeta\,.$ stets $.\,C\,.$, wenn $|c|$ sich in demselben Sinne bewegt. Wird $|Cc_2|$ selbst zur Zeigeraxe, so liegt $.\,\zeta\,.$ in der Richtung $[\gamma\,|\,C\mathfrak{t}\,|\,CA_1 s_2]$ neben $.\,C\,.$, d. h. $|C\mathfrak{t}|$ wird zur Tangente der Terzcurve.

19. Die Zeigeraxe geht durch $.\,C\,.$

Geht $|c|$ durch $.\,C\,.$ so ist diese Zeigeraxe für beide Regale $|c\,|\,a_{1,2}\ ;\ b_{2,4}\|^2$ zugleich der Regelstrahl, welcher $.\,C\,.$ mit den Leitungen $|A_1 c_2\ ,\ A_2 \mathfrak{c}_1|$ verbindet. ($|c\,.\,\mathfrak{c}_1\,.\,\alpha_1]$). Desshalb fallen dann in $[\gamma]$ zwei Berührebenen der beiden Regale bez. $.\,C\,.$ zusammen und der Polarstrahl $|C\mathfrak{t}|$ zu $|c|$ bez. $|\mathfrak{a}_{12}\ ,\ \mathfrak{b}_{24}|$ vertritt die Bindekante der beiden Berührebenen; mithin ist $[\gamma]$ in diesem Falle die Schmiegebene zur Terzcurve bez. $.\,C$.

20. Die Zeigeraxe $|c = C\,C^*|$ verbindet die Schmiegebenen dieser Pole.

Trifft nun die durch $.\,C\,.$ gehende Zeigeraxe $|c|$ die $|\mathfrak{b}_{13}|$ in $.\,C\,.^*$, so ist die Polarebene zu $|\mathfrak{b}_{13}|$ bez. des Massvierflaches $[\alpha]_4$ die Zeigebene $[\gamma^* = \mathfrak{a}_{12}{}^*\, \mathfrak{b}_{24}{}^*]$ von

$.C.^*$ und geht durch den Polarstrahl $|\mathfrak{b}_{13}{}^*|$ von $[\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{b}_{24} = \gamma]$ bez. $[\alpha]_4$, welcher $.C.$ enthält. Auch diese Zeigebene $[\gamma^*]$ wird eine Schmiegebene zur Terzcurve bez. $.C.^*$ sein und die Tangente an $.C.^*$ derselben als Polarstrahl von $|c|$ bez. $|\mathfrak{a}_{12}{}^*\mathfrak{b}_{24}{}^*|$ enthalten, welche $[\alpha_2]$ auf dem Polarstrahl $|A_1\, \mathfrak{t}|$ von $|A_1\, \mathfrak{c}_2|$ bez. $|a_1, b_2|$ trifft.

21. Sehnenzug.

$.C C^*, A_{1,3}, A_{2,4}.$ sind 3 Par Bindepunkte von Regelstrahlen und Leitungen der Regale $|c|\, a_{1,2}, b_{2,4}\|^2$ und bestimmen die Terzcurve $(\zeta)^3$, welche diese Regale gemein haben. Den Verlauf dieser Curve deutet der Sehnenzug an, welcher der Folge von Zeigebenen um $|c|$ durch jene Punkte entspricht.

Nach dem Masszeichen 1 der Tafel zum Bau des Massraumes bezeichnet die Zeigebene $[\gamma]$ auf der Massaxe $|a_1|$ den Nullpunkt $.\mathfrak{a}_1.$ der Theilung durch ein Spurenbüschel um $|c.\ \mathfrak{c}_2.\ \alpha_2]$ ausserhalb der Strecke $|A_{13}|.|\mathfrak{a}_{12}, \mathfrak{b}_{24}|$ begrenzen auf $|\mathfrak{b}_{13}|$ die Strecke

$$|\mathfrak{b}_{24}.\mathfrak{c}|\,\mathfrak{b}_{13}|\mathfrak{c}^*.\ \mathfrak{a}_{12}|.$$

Liegt nun $|\mathfrak{b}_{13}.\ C_1{}^*.\ \mathfrak{c}|$ zwischen $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}_3|$ so trifft $[c\, A_2]$ die $|a_1|$ ausserhalb der Strecke $|\mathfrak{a}_1\ A_3|$, wie aus der Lage des Bindepunktes $|\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_4\,.\,\mathfrak{c}_4\,.\,c|$ zu den Grenzen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_4$ zu erkennen ist. Die Zeigebene gelangt daher in diesem Falle von $[c\,\mathfrak{a}_1]$ aus über $.A_3.$ nach $.A_2.$, geht dann durch $|C^*\,\mathfrak{b}_1{}^*|$ weiter über $.A_1, A_4.$ nach $|C\,\mathfrak{a}_1|$ zurück. Dieser Folge von Zeigebenen entspricht der Sehnenzug: $|C\,A_3\ A_2\ C^*\ A_1\ A_4\ C|$.

Liegt aber $|\mathfrak{b}_{13}\,.\,C_2{}^*\,.\,c|$ zwischen $|\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}_1|$, so theilt $[c\,A_2]$ die Strecke $|\mathfrak{a}_1\ A_3|$ innerlich und der Sehnenzug eröffnet mit $|C\,A_2|$, nimmt $|A_{23}|$ auf, geht über $.C_2{}^*.$ nach $.A_{4,1}.$ und schliesst mit $|A_1\ C|$, so dass man schreibt: $|C\,A_2\ A_3\ C_2{}^*\ A_4\ A_1\ C|$.

Durch analoge Betrachtungen ergeben sich für $.\, C^*_{3,4}\, .$ in $|\mathfrak{b}_3\, \mathfrak{c}^*, \mathfrak{c}\, \mathfrak{b}_1|$ die Sehnenzüge:

$$|C\, A_4\, A_1\, C^*_3\, A_2\, A_3\, C|$$
$$|C\, A_2\, A_4\, C^*_4\, A_3\, A_1\, C|$$

Geht $|c|$ durch $.\, \mathfrak{b}_{1,3}\, .$ so zerfällt der Sehnenzug in eine Doppelsehne $|A_3\, \mathfrak{b}_1\, A_4\, ,\, A_2\, \mathfrak{b}_3\, A_1|$ und ein Sehnenvierseit:

$$|C\, A_2\, \mathfrak{b}_1{}^*\, A_1\, C|\, ;\, |C\, A_3\, \mathfrak{b}_3{}^*\, A_4\, C|\, ,$$

welches bekanntlich „convex oder überschlagen" genannt wird, je nachdem dessen Gegenseiten einander äusserlich oder innerlich theilen.

22. Tangenten zu A.

Der Sehnenzug bezeichnet nun die Folge, nach welcher die Tangenten zu $.\, A_{1\,..\,4}\, .$ geordnet werden. Solcher Folgen unterscheidet man zwei: die eine wird durch $|\mathfrak{a}_{1\,2}||$ bestimmt, die $|a_{1,2}|$ mit $C\,.$ verbindet und diese Sehnen bez. $.\, A_{1,3}\, ;\, A_{2,4}$ äusserlich theilt; die andere Folge bestimmt $|\mathfrak{b}_{2\,4}|$, welche $|A_{2\,3}\, ,\, A_{4\,1}|$ innerlich theilt. Solche Folgen zeigen die Sehnenzüge:

I $|C\, A_2\, A_4\, C^*_{\mathrm{e}}\, A_3\, A_1\, C|$ mit der Zeigeraxe $|c\, .\, C^*_{\mathrm{e}}\, .\, \mathfrak{b}_{1\,3}|$.
II $|C\, A_2\, A_3\, C^*_{\mathrm{i}}\, A_4\, A_1\, C|$ » » » $|c\, .\, C^*_{\mathrm{i}}\, .\, \mathfrak{b}_{1\,3}|$.

Die Tangente in jedem $.\, A\, .$ verbindet dessen Berührebenen an $|c|a_{1,2}\, ;\, b_{2,4}||^2$. Für $.\, A_2\, .$ z. B. sind: $[\alpha_3\, .\, \mathfrak{c}_3\, |c|\, \mathfrak{c}_4\, .\, \alpha_4]$ die Bindepunkte von $|c|$ mit den Gegenebenen $[\alpha_{3,4}]$ zu den Massaxen $.\, A_2\, |A_{3,4}|$, welche ihrerseits $[\gamma]$ in $.\, \mathfrak{b}_4\, ,\, \mathfrak{a}_2\, .$ treffen. Durch $.\, \mathfrak{c}_{3,4}\, .$ gehen in $[\alpha_{3,4}]$ die Strahlen, welche $.\, A_2\, .$ mit $|c|$ und $|b_2\, ,\, a_1$ verbinden, folglich bezeichnen $.\, A_2\, |\mathfrak{c}_3\, A_3\, ,\, \mathfrak{c}_4\, A_4|$ die Berührebenen von $A_2\, .$ Daraus ergibt sich der Verband:

$$[b_4\, \mathfrak{c}_3\, |\mathfrak{c}_3\, \mathfrak{b}_4\, [\gamma]\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{c}_4\, |\mathfrak{c}_4\, a_2]$$

und aus diesem $|\mathfrak{c}_3\, \mathfrak{b}_4\, .\, \mathfrak{t}_2\, .\, \mathfrak{a}_2\, \mathfrak{c}_4|$ in $[\gamma]$ als Richtpunkt der Tangente zu $.\, A_2\, .$

23. Elliptische und hyperbolische Terzcurve.

Geht nun nach Folge I der Sehnenzug über . A_2 . nach . A_4 ., so steigt die Curve aus der Schmiegebene [γ] von . C . gegen . A_4 . stetig auf, um von da gegen .C^*_e . hin sich wieder zu senken, in diesem Punkte die [γ] in Richtung nach . t* zu durchstossen und über . $A_{1,3}$. bis in's Unbegrenzte unter [γ] hinzuziehen, während sie in . C. nach der Richtung |Ct| die Schmiegebene berührt, um in's Unbegrenzte über dieselbe sich zu erheben.

Nach der Sehnenfolge II aber sollte die Curve über . A_2 . nach . A_3 . , anderseits über . A_4 . nach . A_1 . gelangen, während |A_{23} , A_{41}| in . $\mathfrak{b}_{4,2}$. die Schmiegebene [γ] in den genannten Punkten durchstossen, so dass diese auf verschiedenen Seiten von [γ] liegen, die Terzcurve dagegen ausser der Tangente |ct| nur noch . C^*_i . mit [γ] gemein haben soll. Diesen Widerspruch löst die Annahme 2 Ziel-Richtungen, welche beiderseits von [γ] in's Unendliche reichen und denen die Bogen (A_{23} , A_{41}) sich nähern. Steigt nach solcher Annahme die Curve von . C. gegen . A_2. dem Ziele . Z_{23} . zustrebend, so muss sie anderseits von dem untern . Z_{23} . gegen . A_3 . weiter steigen, um in . C^*_i . die [γ] nach |C^*_i t*| hin zu durchstossen und über . A_4 . gegen . Z_{41} . zu streben und wiederum von unten her gegen . A_1 . zu steigen. Doch erreicht sie nun [γ] nicht mehr, sondern wendet sich schon vor . A_1 . wieder nach unten, während die Curve von |Ct| an beiderseits steigt, einer dritten Zielrichtung Z_{c1} entsprechend, welche auch bei der Folge I vorauszusetzen ist. Die Folge I ergibt eine elliptische, die Folge II eine hyperbolische Terzcurve.

Ohne in die gleichartigen Erörterungen über die

Büschel der Terzcurven aus verschiedenen $.C.$ auf $|\mathfrak{a}_{12}|$ einzutreten, sei kurz des Falles gedacht, wo $|\mathfrak{b}_{13}\,.\,C_i\,.\,\mathfrak{b}_{24}|$ in die Lotebene $[a_2]$ fällt und der Sehnenzug $|C_i\;A_2\;A_3\;C^*\;A_1\;A_4\;C_i|$ stattfindet, weil in diesem Falle an Stelle des einfachen $[\gamma]$ nach $|C_i\,\mathfrak{t}|$ berührenden Bogens eine Windung um $|A_{24}|$ zu treten scheint, obwohl in Wirklichkeit $|A_{24}|$ die $[\gamma]$ ausserhalb dieser Strecke trifft und deswegen $.A_{2,4}.$ auf derselben Seite von $[\gamma]$ liegen. Diese Windeform der Terzcurve hat also vor den übrigen einläufig hyperbolischen Formen derselben nichts voraus, wie die planare Betrachtung dieser Curven vermuthen lässt.

24. Polarkegel.

Geht $|\mathfrak{c}|$ durch einen der Bindepunkte $|\mathfrak{b}_1\,.\,\mathfrak{b}_1\,[\gamma]\,\mathfrak{b}_3\;\mathfrak{b}_3.|$, so zerfällt der Sehnenzug in die Doppelstrahlen $|\mathfrak{b}_{1,3}|$ und die Sehnenvierseite $|C\,A_2\;\mathfrak{b}^*_1\;A_1\;C;\,C\,A_3\;\mathfrak{b}_3{}^*\;A_4\;C|$. Fasst man z. B. $|C\,\mathfrak{b}_1|$ als Zeigeraxe auf, so ist $|A_1\;\mathfrak{b}_1{}^*|$ der Polarstrahl zu $|A_1\;\mathfrak{b}_1|$ bez. $|a_1\,,\,b_2|$, desgleichen $|C\,\mathfrak{b}_3|$ zu $|C\,\mathfrak{b}_1|$ bez. $|\mathfrak{a}_{12}\,,\,\mathfrak{b}_{24}|$, daher verbindet $|C\,\mathfrak{b}_3|$ die Schmiegebene $[\gamma]$ mit $[C\;A_1\;\mathfrak{b}_1{}^*]$ und geht durch den Bindepunkt $|\mathfrak{b}_{12}\,.\,\mathfrak{t}\,.\,A_1\;\mathfrak{b}^*{}_1|$, was auch schon daraus folgt, dass $.\mathfrak{b}_3.$ die $|\mathfrak{b}_{13}\,,\,b_3|$ verbindet, von denen die erstere in $[\gamma]$, die letztere dagegen in $[C\,A_1\;\mathfrak{b}_1{}^*]$ liegt, weil $|\mathfrak{b}_3\,.\,\mathfrak{b}_3{}^*\,.\,C\,\mathfrak{b}_1{}^*|\,.\,|\mathfrak{b}_{13}\,.\,\mathfrak{b}_1\;.\,c|$ ist ein singulärer Punkt der Terzcurve, deren übrige Punkte in der Polarcurve $(A_{2,1}\;\mathfrak{b}_1{}^*\;\mathrm{tg}\;C)^2$ der $[c\,A_1\;\mathfrak{b}_1{}^*]$, der Polarebene zu $|C\,\mathfrak{b}_1|$ bez. $[\alpha]_4$ liegen. $[\gamma]$ wird in diesem Falle zur Berührebene $[\mathfrak{b}_1\;C\,\mathfrak{b}_3]$ an den Kegel $\mathfrak{b}_1\;(A_{2,1}\;\mathfrak{b}_1{}^*\,\mathrm{tg}\,C)_2$.

Damit tritt der Polarkegel im Verband der Regelstrahlen als organisches Glied auf. Die Voraussetzung, dass die Zeigeraxe mit einer Massaxe verbunden sei, ist nämlich nicht mehr blos eine mögliche Annahme, wie beim Bau des Massraumes, sondern diese Verbindung kommt in jedem Strahlbüschel aus . C in $[\gamma]$ zweimal wirklich vor.

25. Rückblick.

Diese Darstellung der Terzcurve auf Grundlage des Massvierflaches gewährt einen klaren Ueberblick über den Zusammenhang zwischen der Drehung der Zeigebene, beziehungsweise der Richtungen in derselben, um ihre Axe und der Linienwindung durch die Ecken des Massvierflaches und 2 Pole zu diesem auf der Zeigeraxe. Solchen Zusammenhang vermittelt zunächst der Sehnenzug, welcher geschlossen ist, wie die Zeigebene wieder in ihre Urstellung zurückkehrt. Der Doppelsinn der Verschiebung in bestimmter Richtung dagegen kommt vermöge des Gleitens der Regelstrahlen an den Massaxen dadurch zum Ausdruck, dass in den beiden Regalen, welche die Terzcurve nebst der Zeigeraxe verbindet, stets ein, wo nicht drei Pare paralleler Strahlen auftreten, wie die erstere durch ihren Verlauf zu beiden Seiten der schmiegenden Zeigebene andeutet.

Der Polarkegel verbindet den Singulärpunkt einer Terzcurve, die Spitze, mit der Curve in dessen Polarebene.

26. Regelflächen höherer Ordnung.

Die Drehung der Zeigebene, beziehungsweise der Richtungen in derselben, um deren Axe vermittelt auch weiterhin den Zusammenhang von gegebenen Leitcurven mit der Gestalt der durch die Strahlenbewegung erzeugten Regelflächen höherer Ordnung, sowie auch der durch Curvenbewegung erzeugten Schalflächen.

27. Schalflächen.

Die Schalflächen II. O.: Kugel, Paraboloid, Ellipsoid, Hyperboloid, werden nämlich bekanntlich am einfachsten durch Umdrehung eines Meridians um einen Durchmesser erzeugt, wobei eine leitende Polarcurve mit einem Punktepar auf der Meridianaxe und dem Scheitel des Polarkegels auf derselben massgebend sind.

Auf die analoge Erzeugung von Schalflächen III. O. durch die Umdrehung einer ebenen Terzcurve um eine Axe ihrer Ebene ist bei Besprechung der Plan- und Reliefcurven*) hingewiesen worden.

Die Umdrehung windender Terzcurven leitet ein Regal, das durch 2 Polarcurven bezüglich eines Gegenaxenpares und eine die Curven verbindende Stammaxe gegeben ist. Die Bindepunkte jedes Regelstrahles mit den beiden Leitcurven sind die Scheitel zweier Kegel, welche nebst dem Regelstrahl durch einen Windemeridian III. O. verbunden sind.

In analoger Weise lassen sich auch die Schalflächen IV. und höherer Ordnungen erzeugen, wenn die Leitcurven der Zeigekegel nicht mit denen des Stammregales übereinstimmen oder wenn man überhaupt Regelflächen höherer Ordnung als Grundlage wählt.

Die parweise Verbindung solcher Flächen durch Curven, sowie die Verwandlung derselben ineinander, indem man eine Zeigefläche um eine Bindecurve schwingen lässt, gehören noch dem Polargebiet an, auf welchem genaue Gestaltungsbegriffe gewonnen werden sollen, um dieselben bei der Anordnung der Gestaltengruppen zu verwenden.

---

*) S. Jahrg. 89. d. Vierteljahrssch.

28. Gruppengebiet.

Wie zur Herstellung der Windecurve (Terzcurve) auf dem Gebiete der Rundungen die Parung der Regale mit gemeinsamer Zeigeraxe dient, so auf dem Gebiete der Gruppirungen ein Complex von Regalen zur Herstellung der Strahlengewinde auf Grundlage eines leitenden Stammregales.

Diesen Verband vermittelt beim Ebenengewinde (linearen Complexe) das Ebenenbüschel, das die leitende Zeigeraxe mit den Regelstrahlen bestimmt, welche dieselbe mit dem Par Massaxen verbindet.

Bei dem Kegelgewinde dagegen vermittelt ein Büschel von Polarkegeln längs der leitenden Zeigeraxe diesen Verband der Regale mit dem Doppelpar windschiefer oder zum Vierflach verbundener Massaxen. Die 4 Regelstrahlen nämlich, welche einen Punkt der Zeigeraxe mit den 4 Paren windschiefer Massaxen oder mit den 4 Ecken des Massvierflaches verbinden, bilden mit der Zeigeraxe die 5 Strahlen, welche den Zeigekegel bestimmen, der jenem angenommenen Punkte entspricht.

Beim Ebenengewinde dienen die Strahlen eines Büschels durch den „Nullpunkt“ auf der Zeigeraxe als Leitungen der Zweigregale. Beim Kegelgewinde haben die Strahlen des Zeigekegels dieselbe Bedeutung.

29. Singularitäten und Brennflächen.

Kommen bei diesen Verbänden Punkte vor, in welchen Strahlenpare verschiedenen Ursprunges zusammentreffen,, so verknüpfen solche das Gewindenetz als „Singulärpunkte“ und führen ein Zerfallen der Gestalten in einfachere Elemente herbei, wie die Windecurve in einen Scheitel eines Polarkegels und dessen ebene Polarcurve zerfällt, wenn die Zeigeraxe $|c|$ durch einen der Bindepunkte $|b \,.\, \mathfrak{b}_1 | \mathfrak{b}_{13} | \mathfrak{b}_3 \,.\, b_3|$ geht.

Wie ferner die Berührebenen der beiden Regale, welche eine Terzcurve verbindet, sich in der Schmiegebene vereinigen, so die Strahlenpaare eines Systemes auf dessen Brennfläche.

30. Die Verbindung der Linien und Flächen entspricht der Verschmelzung der Vorstellungen.

Von der Verbindung zweier Richtungen durch den Punkt einer Ebene im Lineargebiete, durch den Strahl einer Regelfläche im Gebiete der Rundungen bis zu den Gruppirungen der Flächen nach Gebüschen waltet die Verbindung der Linien und Flächen, welche von der Betrachtung einzelner Figuren zur geregelten Auffassung der Grundgebilde: Strahlenbüschel, St.-bündel, St.-feld, St.-gebüsche u. s. w. geführt hat, der Verschmelzung der Vorstellungen entspricht und vermöge der gegenseitigen Begrenzung jener Raumelemente deren Massverhältnisse bedingt. Auch das gegenseitige Stützen und Tragen der Grundgebilde, von dem Reye spricht*), beruht auf solcher Verbindung.

Sturm weist in den einleitenden Betrachtungen seiner „Liniengeometrie“ darauf hin, wie bis in die ersten Jahrzehnte unseres Jahrhunderts in der Geometrie der Punkt allein als Grundelement der Betrachtung angesehen wurde, wie dann die Ebene als gleichberechtigt in Aufnahme kam, um schliesslich die Bedeutung der geraden Linie als Verbindung von Punkten und als Schnittlinie von Ebenen hervorzuheben.

*) Journal f. Math. Bd. 104 und 213.

Wozu soche Unterscheidung? Die Gerade bezeichnet eine Bewegungsrichtung, von welcher ein Strahlengebüsch abzweigt, ob sie Punkte verbinde oder Flächen gemein sei. Wichtiger als die Verwandlung der Gestalten ist das Erfassen des Zusammenhanges von Bewegungsrichtungen und Flächengestalt überhaupt, weil daraus klar wird, wie die Linien auf gegebenen Flächen verlaufen und wie die Flächen den Linien gemäss zu gestalten sind. Dieser Zusammenhang aber wird erfasst vermöge der Verschmelzung verwandter Raumvorstellungen, wie sie die geregelte Verbindung von Tastbewegungen und Flächenanschauung herbeiführt. Alle räumlichen Verbindungen erhalten zudem wirklichen Werth nur in dem Grade, als sie dem Augenmass beim räumlichen Gestalten zur sichern Richtschnur dienen, sei es, dass man die Verbindungen thatsächlich herstelle, sei es, dass man dieselben durch Masszeichen andeute.

Schluss.

Natürlicher ist es also, an Stelle der Punkt-, Ebenen- oder Linien-„Erdmessung“ die Raumlehre zu setzen, die Lehre von dem durch seine Flächen gegliederten Massraum. Von Gebiet zu Gebiet baut diese den Massraum auf Grund fester Massgestalten durch stets manigfaltigere Flächenverbände aus. Die Beziehungen combinirter Raumelemente, die Massverhältnisse, gehen aus der gegenseitigen Begrenzung der Richtungen und Flächen in Folge ihrer Verbindung hervor, ergeben sich somit aus den Gestaltungsvorgängen selbst. Indem die Vorstellung regelmässig Flächen erzeugt, verbindet und verwandelt, eignet sie sich diese Massverhältnisse an, bilden sich vermöge ihrer Thätigkeit im Verein mit der Schärfung des Augenmasses klare Raumbegriffe aus, wie sich der Mensch durch regelrechtes, stetiges Arbeiten Handfertigkeiten aneignet. Und wie die Werkrisslehre als Darstellung der Raumerkenntniss mit der gestaltenden Thätigkeit des Handwerks zusammen hängt, so die Raumlehre mit dem Ordnen und Schaffen der Raumkunst, welche neben der Bildkunst die Graphostatik und Kinematik, nach Semper's Ansicht überhaupt das Gestalten (und Bewegen) der Massen umfasst.

Hottingen-Zürich, Oktober 1892.

Ein Beitrag zur Osteologie der Alakaluf

von

Dr. **Rud. Martin.**

Unser Wissen über die körperliche Beschaffenheit der Feuerländer ist in dem vergangenen Jahrzehnt durch eine Reihe verdienstvoller Arbeiten — ich nenne nur die Studien von Garson, Mantegazza, Regalia und Sergi — bedeutend vermehrt worden. Leider ist die genaue Provenienz des in europäischen Sammlungen befindlichen osteologischen Materials nicht in allen Fällen bekannt, doch ist ziemlich sicher, dass es mit Ausnahme von vielleicht 6 Schädeln (4 in London und 2 im Museum d'Histoire Naturelle in Paris) ausschliesslich dem am meisten südlich wohnenden Stamm der Yahgan angehört. Diesen Tribus behandelt auch der kürzlich von Hyades und Deniker herausgegebene VII. Band der Mission scientifique