als Inbegriff der Masszeichen, die Verbindungen seiner Axen durch Strahlen und Curven systematisch zusammen, indem er durch seine Flächen jeder Axe ein bestimmtes Massverhältniss zutheilt.

Als stetiges Ganzes erscheint das Sehfeld vor dem leiblichen Auge; als stetiges Ganzes erfasst, vermöge geregelter Blickbewegung, die Vorstellung jede räumliche Gestalt, daher ist auch die räumliche Synthese nur dann vollständig, wenn sie aus der Stufenfolge und dem Wandel der Masszeichen den geordneten Zusammenhang der Linien und Flächen als stetiges Ganzes, als Massraum erkennt.

Hottingen-Zürich, März 1890.

Ueber eine Determinante, welche bei der Berechnung symmetrischer Functionen vorkömmt.

Von

E. Gubler.

Im ersten Bande seines »Handbuches der höhern Algebra« theilt Serret ein von Waring angegebenes Verfahren mit, eine beliebige ganze und symmetrische Function der Wurzeln einer algebraischen Gleichung direct als Function der Coefficienten dieser Gleichung auszudrücken. In dem Falle, wo die Glieder der symmetrischen Function k Wurzeln im Quadrat, n Wurzeln in der ersten

Potenz enthalten, führt die Rechnung auf ein Gleichungssystem folgender Form:

$$\begin{array}{ll}
x_1 & = -\binom{n+2}{1} \\
\binom{n+4}{1}x_1 + x_2 & = -\binom{n+4}{2} \\
\binom{n+6}{2}x_1 + \binom{n+6}{1}x_2 + x_3 & = -\binom{n+6}{3} \\
\dots\dots\dots & \\
\binom{n+2i}{i-1}x_1 + \binom{n+2i}{i-2}x_2 + \dots + x_i & = -\binom{n+2i}{i} \\
\dots\dots\dots & \\
\binom{n+2k}{k-1}x_1 + \binom{n+2k}{k-2}x_2 + \dots\dots + \binom{n+2k}{1}x_{k-1} + x_k & = -\binom{n+2k}{k}
\end{array}$$

Auf dieses Gleichungssystem tritt jedoch Serret nicht ein. Aus der dem System zu Grunde liegenden Gleichung:

$$\binom{n+2\lambda}{\lambda} + \binom{n+2\lambda}{\lambda-1}x_1 + \binom{n+2\lambda}{\lambda-2}x_2 + \dots + \binom{n+2\lambda}{\lambda-i}x_i + \dots\dots$$
$$+ \binom{n+2\lambda}{\lambda-k+1}x_{k-1} + \binom{n+2\lambda}{\lambda-k}x_k = 0$$

leitet er durch eine recurrirende binomische Darstellung der Coefficienten k nur zweigliedrige Gleichungen ab, aus denen dann die Werthe der Unbekannten sehr leicht erhalten werden. Für x_i entspringt die allgemeine Formel:

$$x_i = (-1)^i \frac{n+2i}{i}\binom{n+i-1}{i-1}.$$

Diese Formel ist für alle Fälle gültig. Das Verfahren dagegen, welches Serret einschlägt, bedarf für $n = 0$ einer Modification und ist somit nicht ein ganz allgemeines zu nennen.

Die Werthe der Unbekannten x_i $(i = 1, 2, 3 \dots . k)$ werden am naturgemässesten erhalten, wenn man dieselben aus dem oben hingeschriebenen Gleichungssystem mit Hülfe der Determinanten entwickelt. Die interessante Determinante, welche dabei auftritt, liefert die allgemeine Form der Lösung auf eben so einfache als elegante Weise. Da ich nicht in Erfahrung bringen konnte, dass diese Auflösung schon irgendwo angegeben sei, so erlaube ich mir, dieselbe hier mitzutheilen auf die Gefahr hin, etwas Ueberflüssiges zu thun.

Wie man sofort übersieht, hat die Determinante des Systems den Werth 1. Für x_i ergibt sich daher:

$$x_i = \left|\begin{array}{cccc:cc}
1 & .\,0\,.\,\cdots\cdots & & -\binom{n+2}{1} & \cdots\cdots & .\,0 \\
\binom{n+4}{1} & .\,1\,.\,0\,\cdots\cdots & & -\binom{n+4}{2} & \cdots\cdots & .\,0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\binom{n+2(i-1)}{i-2} & \cdots\cdots & 1\;. & -\binom{n+2(i-1)}{i-1} & .\,0\,.\,\cdots & .\,0 \\
\binom{n+2i}{i-1} & \cdots & \binom{n+2i}{1}. & -\binom{n+2i}{i} & .\,0\,.\,\cdots & .\,0 \\
\hdashline
\binom{n+2(i+1)}{i} & \cdots\cdots & \cdots & -\binom{n+2(i+1)}{i+1} & .\,1\,.\,\cdots & .\,0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\binom{n+2k}{k-1} & \cdots\cdots & \cdots & -\binom{n+2k}{k} & \cdot\cdot\binom{n+2k}{1} & .\,1
\end{array}\right|.$$

Diese Determinante zerfällt in das Product zweier Determinanten vom $i$ten und $(k-i)$ten Grade. Da die letztere stets den Werth 1 hat, so braucht man nur die Determinante $i$ten Grades zu betrachten. Macht man die $i$te Colonne zur ersten und tilgt das Minuszeichen, so kommt:

$$x_i = (-1)^i \left|\begin{array}{ccccc}
\binom{n+2}{1} . & 1 & .\,0\,. & \cdots & . \\
\binom{n+4}{2} . & \binom{n+4}{1} & .\,1\,.\,0 & \cdots & . \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & . \\
\binom{n+2(i-1)}{i-1} . & \binom{n+2(i-1)}{i-2} & \cdots & \binom{n+2(i-1)}{1} . & 1 \\
\binom{n+2i}{i} . & \binom{n+2i}{i-1} & \cdots & \binom{n+2i}{2} & .\binom{n+2i}{1}
\end{array}\right|$$

Man beachte nun die Relation

$$\frac{m-\lambda}{m}\binom{n+2m}{m-\lambda}-\binom{n+2m}{m-\lambda-1}=\frac{\lambda+1}{m}\binom{n+2m}{m-\lambda-1}\frac{n+\lambda+1}{\lambda+1}.$$
$$\lambda=0,1,2,3,\ldots(m-1)$$

$\lambda = 0$ zeigt, dass durch Subtraction der zweiten Colonne von der ersten letztere durch $\frac{n+1}{1}$ theilbar wird und ihre Glieder erhalten der Reihe nach den Coefficienten $\frac{1}{m}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots i)$. Sondert man den Factor $\frac{n+1}{1}$ ab und subtrahirt die erste Colonne von der zweiten, so wird die erste Zeile $1 \,.\, 0 \,.\, 0 \,.\, 0 \ldots$, die Determinante sinkt also um einen Grad. Die Glieder der ersten Colonne in der Determinante $(i-1)$ten Grades haben ihrer Entstehung wegen der Reihe nach den Coefficienten $\frac{m-1}{m}$ $(m = 2, 3, 4, \ldots i)$. Zieht man wieder die zweite Colonne von der ersten ab, so kann man aus der letzteren den Factor $\frac{n+2}{2}$ absondern und nach abermaliger Subtraction der ersten Colonne von der zweiten gelangt man zu einer Determinante $(i-2)$ten Grades, in welcher die Glieder der ersten Colonne der Reihe nach den Coefficienten $\frac{m-2}{m}$ $(m = 3, 4, 5 \ldots i)$ haben. Vollzieht man diesen Process $(i-1)$ mal, so hat man

$$x_i = (-1)^i \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+i-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(i-1)} \begin{vmatrix} 1 & . & 0 \\ \frac{i-1}{i} & \binom{n+2i}{1} & . \;\frac{n+2i}{i} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^i \frac{n+2i}{i}\binom{n+i-1}{i-1}.$$

Zürich, im April 1890.