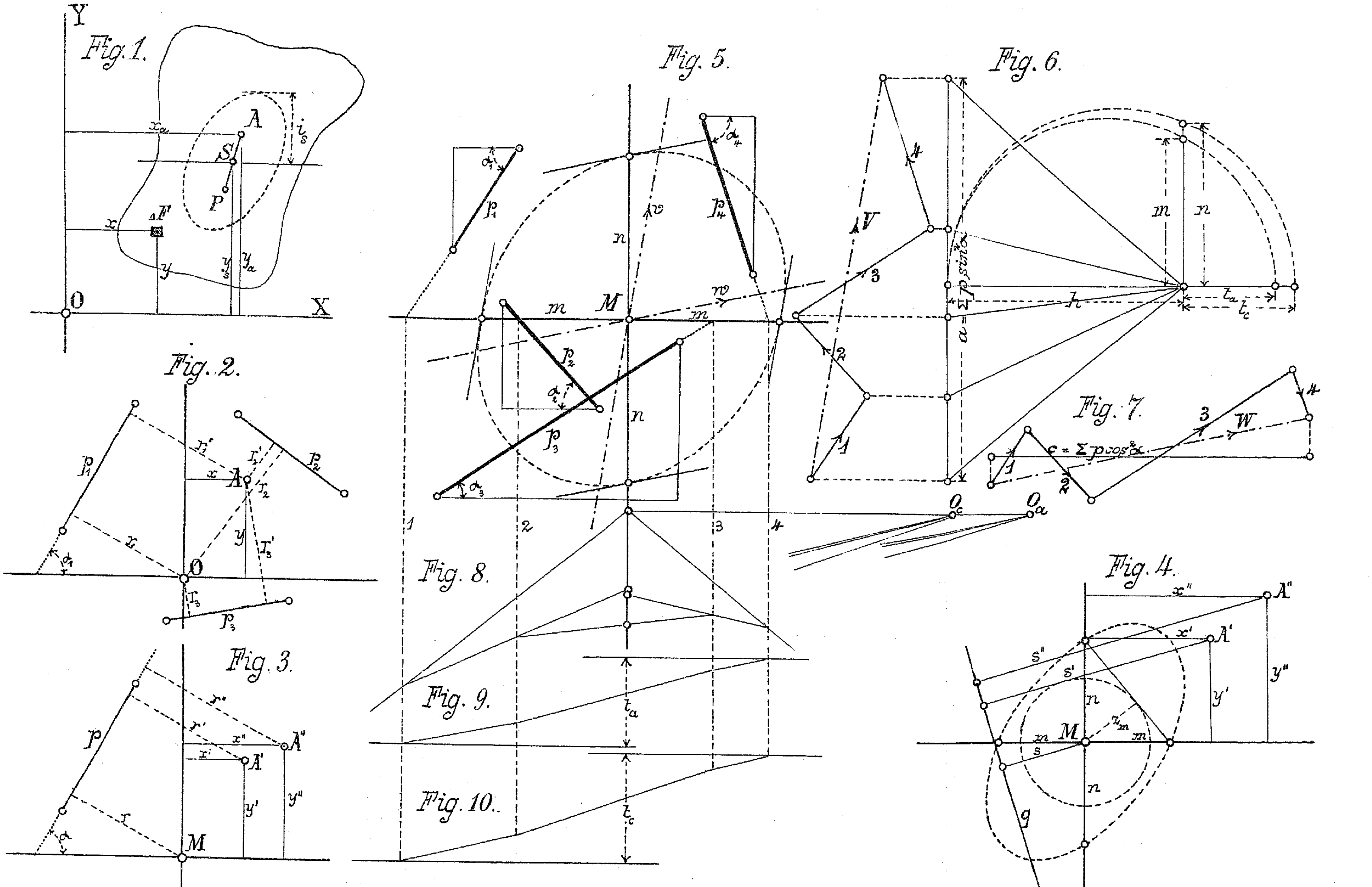
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

Das Trägheitsmoment eines Liniensystems.

Von

Prof. **W. Ritter.**

(Mit 10 Figuren.)

Unter Trägheitsmoment einer begrenzten ebenen Fläche in Bezug auf eine in derselben Ebene liegende Gerade versteht man bekanntlich die Summe der Producte aus den unendlich kleinen Elementen dieser Fläche in die Quadrate ihrer Abstände von der Geraden. Oder es ist, wenn in der Figur 1 der Inhalt eines Flächenelementes mit $\varDelta F$ und dessen Abstand von der Axe OX mit y bezeichnet wird, das Trägheitsmoment bezüglich dieser Axe

$$J = \Sigma \varDelta F \,.\, y^2 \,.$$

Das Trägheitsmoment ebener Figuren spielt in der Baumechanik, speciell in der Festigkeitslehre, eine wichtige Rolle, und es sind dessen Eigenschaften eingehend studirt worden. Am interessantesten sind die Resultate, welche sich aus der Einführung der »Trägheitsellipse« ergeben haben. Dreht man nämlich die Axe um einen festen Punkt, setzt für jede Richtung derselben den Werth

$$J = F \,.\, i^2 \,,$$

worin F den Flächeninhalt der ganzen Figur bedeutet, und zieht jeweilen in den Abständen $\pm i$ zwei Parallelen zur Axe, so umhüllen alle diese Parallelen eine Ellipse, die man Trägheitsellipse nennt. Wählt man als festen Drehpunkt den Schwerpunkt S der Figur, so geht die

Trägheitsellipse in die »Centralellipse« über. In Figur 1 ist letztere Ellipse eingezeichnet, und es folgt aus dem Vorhergehenden sofort, dass für die durch S gelegte Horizontale das Trägheitsmoment gleich $F.i_s^2$ wird. Ebenso findet man den Werth J für jede andere durch S gehende Axe, indem man den Abstand der dazu parallelen Ellipsentangente quadrirt und mit F multiplicirt.

Aber auch für jede ausserhalb des Schwerpunkts liegende Axe lässt sich das Trägheitsmoment aus der Centralellipse ableiten. Ist nämlich P der Pol der Axe OX in Bezug auf die Ellipse und A der diametral zu S übertragene Pol, der sogenannte »Antipol«, so findet sich, wie sich zeigen lässt, das Trägheitsmoment für die Axe OX

$$J = \Sigma \Delta F \,.\, y^2 = F \,.\, y_s \,.\, y_a \,.$$

Neben dem Trägheitsmoment wird in der Regel auch das sogenannte »Centrifugalmoment« behandelt; es entsteht, wenn man die Inhalte der Flächenelemente mit deren Abständen von zwei festen Axen multiplicirt und sämmtliche Producte summirt. Es ist somit (Fig. 1) das Centrifugalmoment bezüglich der Axen OX und OY

$$C = \Sigma \Delta F \,.\, y \,.\, x \,.$$

Kennt man die Centralellipse der Figur, so lässt sich derselben auch der Werth C mit Hülfe des Antipoles direct entnehmen, und zwar ergibt sich

$$C = F \,.\, y_s \,.\, x_a \,.$$

Es folgt hieraus sofort, dass das Centrifugalmoment verschwindet, wenn die eine Axe durch den Antipol der andern geht.

Die Untersuchungen über das Trägheits- und das Centrifugalmoment lassen sich auch auf den Raum übertragen; an Stelle der Flächenelemente treten dann Volumenelemente, an Stelle der festen Geraden feste Ebenen, und statt der Ellipse ergibt sich ein Ellipsoid.

Man kann die Ausdrücke Trägheits- und Centrifugalmoment auch so auffassen, dass man die Flächen- resp. Volumenelemente durch Punkte ersetzt und denselben bestimmte Gewichte beilegt; diese Auffassung wäre allgemeiner, führt indessen selbstverständlich zu den gleichen Ergebnissen.

Im Nachfolgenden sollen nun die Begriffe Trägheits- und Centrifugalmoment in ihrer dualistischen Umkehrung untersucht werden. Denn gerade wie bei der gewöhnlichen Auffassung eine Anzahl von mit Gewichten versehenen Punkten mit einer resp. zwei Geraden in Beziehung treten, lassen sich auch eine Anzahl von mit Gewichten versehenen Geraden mit einem resp. zwei festen Punkten in Beziehung bringen. Die Untersuchung dieser neuen Begriffe, welchen man wohl am besten die Namen »Trägheits- und Centrifugalmoment eines Liniensystems« beilegt, führt, wie zu erwarten war, zu ganz analogen Resultaten, wie sie in dieser Einleitung für die entsprechenden Momente eines Punktesystems kurz angeführt worden sind; überdies finden diese neuen Ausdrücke in der graphostatischen Berechnung von elastischen Bogen Verwendung. Ich beschränke mich im Folgenden auf die Besprechung einiger der wichtigeren Beziehungen; eine erschöpfende Behandlung des Themas liegt nicht in meiner Absicht.*)

---

*) So viel ich in Erfahrung gebracht habe, ist dieser Gegenstand in der Literatur bis jetzt noch nicht behandelt worden. Einzig in der Abhandlung „Ueber das Minimum oder Maximum der Potenzsumme der Abstände eines Punktes von gegebenen

Es seien (Fig. 2) in einer Ebene eine Anzahl gerade Linien von bestimmten Gewichten $p_1 p_2 p_3 \ldots$ und ein Punkt O gegeben, der von den Linien um die Strecken $r_1 r_2 r_3 \ldots$ absteht. Dann heisse

$$J_o = \Sigma p \cdot r^2 \tag{1}$$

das Trägheitsmoment dieser Linien in Bezug auf den Punkt O.

Wir setzen in der Folge stets voraus, dass die Gewichte p sämmtlich positiv seien; dann wird auch J_o für jeden Punkt der Ebene einen positiven Werth erhalten.

Bezieht man das Trägheitsmoment auf einen anderen Punkt A, welcher bezüglich O die Coordinaten x und y und von den Linien $p_1 p_2 p_3 \ldots$ die Abstände $r'_1 r'_2 r'_3 \ldots$ haben möge, so findet sich dasselbe, wenn die Neigungswinkel der Linien gegenüber der X-Axe mit bez. $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$ bezeichnet werden,

$$\begin{aligned} J_a &= \Sigma p \cdot r'^2 \\ &= \Sigma p\,(r + x \sin\alpha - y \cos\alpha)^2 \\ J_a &= \Sigma p \cdot r^2 + x^2\, \Sigma p \sin^2\alpha - 2\,xy\, \Sigma p \sin\alpha\cos\alpha \\ &\quad + y^2\, \Sigma p \cos^2\alpha + 2\,x\, \Sigma p\, r \sin\alpha \\ &\quad - 2\,y\, \Sigma p\, r \cos\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

Der Ausdruck J_a kann leicht geometrisch dargestellt werden; setzt man nämlich

$$J_a = z^2 \cdot \Sigma p$$

und trägt die Strecke z in jedem Punkte A als Normale zur Ebene positiv und negativ auf, so liegen die Endpunkte dieser Normalen offenbar auf einer Fläche zwei-

---

Punkten, Geraden oder Ebenen“ von Herrn Franz Wetzig in Leipzig, auf die ich von befreundeter Seite aufmerksam gemacht worden bin, habe ich einige Anklänge an mein eigenes Thema gefunden.

ten Grades, und zwar ist diese Fläche, da J_α nach Voraussetzung stets positiv, z somit für alle Punkte der Ebene reell bleibt, ein zweischaliges Hyperboloid, von welchem zwei Hauptaxen (demnach auch der Mittelpunkt) in der Ebene der p liegen.

Fallen in der Gleichung (2) die Glieder mit x und y weg, so erhält man die Mittelpunktsgleichung des Hyperboloides. Für den Mittelpunkt M bestehen daher die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \Sigma p r \sin\alpha &= 0\,, \\ \Sigma p r \cos\alpha &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Hiernach ist M leicht zu finden. Es wird nämlich für den Punkt A (Fig. 2)

$$\begin{aligned} \Sigma p r' \sin\alpha &= \Sigma p\,(r + x \sin\alpha - y \cos\alpha) \sin\alpha \\ &= \Sigma p r \sin\alpha + x\,\Sigma p \sin^2\alpha - y\,\Sigma p \sin\alpha \cos\alpha\,. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich Null, so erhält man die Gleichung

$$\Sigma p r \sin\alpha + x\,\Sigma p \sin^2\alpha - y\,\Sigma p \sin\alpha\cos\alpha = 0\,, \tag{4}$$

das heisst die Gleichung einer geraden Linie, welche alle diejenigen Punkte enthält, für welche $\Sigma p r' \sin\alpha$ verschwindet. Diese Gerade, welche wir v nennen wollen, enthält demnach auch den Mittelpunkt M.

Ganz analog findet man, indem man $\Sigma p r' \cos\alpha$ berechnet und gleich Null setzt, die Gleichung

$$\Sigma p r \cos\alpha + x\,\Sigma p \sin\alpha\cos\alpha - y\,\Sigma p \cos^2\alpha = 0\,, \tag{5}$$

das ist die Gleichung einer Geraden w, für deren Punkte $\Sigma p r' \cos\alpha$ gleich Null wird, und die somit ebenfalls durch M geht. Der Schnittpunkt der beiden Geraden (4) und (5) ist daher der Mittelpunkt des Hyperboloides.

Setzt man der Abkürzung halber

$$\left.\begin{aligned} \Sigma p \sin^2 \alpha &= a \\ \Sigma p \sin \alpha \cos \alpha &= b \\ \Sigma p \cos^2 \alpha &= c \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

so lautet die Gleichung von v

$$\Sigma p r \sin \alpha + a x - b y = 0 \tag{4a}$$

und diejenige von w

$$\Sigma p r \cos \alpha + b x - c y = 0 . \tag{5a}$$

Der Punkt M kann auch auf folgende Weise gefunden werden.

Ersetzt man die Linien p durch Kräfte von der Intensität $p . \sin \alpha$ und setzt dieselben zu einer Mittelkraft V zusammen, so ist für jeden Punkt dieser Mittelkraft die Summe der statischen Momente der Einzelkräfte, also der Werth $\Sigma p . r \sin \alpha$ gleich Null; folglich liegt die Kraft V in der Geraden v. Ersetzt man sodann die Linien p durch die Kräfte $p . \cos \alpha$ und bestimmt deren Mittelkraft W, so erhält man die Gerade w. Der Schnittpunkt der beiden Kräfte V und W ist daher wieder der gesuchte Mittelpunkt des Hyperboloides.*)

Bei dieser Operation, welche graphisch leicht ausgeführt werden kann, ist die Richtung der Kräfte $p \sin \alpha$ und $p \cos \alpha$ stets bestimmt, welchen Richtungssinn man auch den Linien p beilegen mag; denn ändert man den Sinn dieser Linien, so wird dadurch zugleich der Winkel α um 180° vergrössert, so dass auch $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ ihre Zeichen wechseln.

---

*) Der Mittelpunkt M ist nicht etwa identisch mit dem Schwerpunkte der als Gewichte gedachten p; beide Punkte haben nichts miteinander zu thun.

Wir nehmen nun für die Folge den Mittelpunkt M des Hyperboloides als Ursprung des Coordinatensystems an und setzen das Trägheitsmoment für diesen Punkt gleich

$$J_m = z_m^2 \, . \, \Sigma p \, . \tag{7}$$

Dann lautet die Gleichung des Hyperboloides unter Benützung der abgekürzten Bezeichnungen (6)

$$z^2 \, . \, \Sigma p = J_m + a x^2 - 2 b x y + c y^2 \, . \tag{8}$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort diejenige des Asymptotenkegels, wenn man das constante Glied streicht:

$$z^2 \, . \, \Sigma p = a x^2 - 2 b x y + c y^2 . \tag{9}$$

Schneidet man das Hyperboloid, sowie seinen Asymptotenkegel durch Ebenen parallel zur Ausgangsebene, mit anderen Worten, setzt man in den Gleichungen (8) und (9) z constant, so erhält man lauter ähnliche Ellipsen, deren Gleichungen allgemein lauten:

$$D = a x^2 - 2 b x y + c y^2 .$$

Differenzirt man diese Gleichung nach x und y, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a x - b y}{b x - c y} ,$$

und hieraus durch $y = 0$ die Tangente des Neigungswinkels des zur X-Axe conjugirten Durchmessers

$$\operatorname{tang} \beta_x = \frac{a}{b} ;$$

ebenso findet man für den zur y-Axe conjugirten Durchmesser obiger Ellipsen ($x = 0$ gesetzt)

$$\operatorname{tang} \beta_y = \frac{b}{c} .$$

Vergleicht man diese beiden Werthe mit den Gleichungen (4a) und (5a), so ersieht man sofort, dass die Linien v und w für sämmtliche Ellipsen die zu den Coordinatenaxen conjugirten Durchmesser enthalten.

Wie bei einem System von Punkten, so lässt sich auch bei einem Liniensystem von einem Centrifugalmoment reden.

Es werde (Figur 3) der Ausdruck

$$C = \Sigma p r' r''$$

das Centrifugalmoment des Liniensystems p in Bezug auf die Punkte A' und A'' genannt.

Drückt man r' und r'' durch r, α und die Coordinaten von A' und A'' aus und wählt zugleich den Punkt M als Coordinatenanfang, so findet man unter Berücksichtigung der Gleichungen (3) und (6)

$$C = J_m + a x' x'' - b(x' y'' + x'' y') + c y' y''. \qquad (10)$$

Der Werth C kann leicht aus dem Hyperboloid bestimmt werden. Errichtet man nämlich im Punkte A' die Ordinate z' und legt in ihrem Endpunkte eine Tangentialebene an das Hyperboloid, so lautet deren Gleichung allgemein

$$(z - z') = (x - x')\frac{\partial z}{\partial x} + (y - y')\frac{\partial z}{\partial y}$$

oder, wenn man die beiden partiellen Differentialquotienten der Gleichung (8) entnimmt,

$$(z - z') z' \Sigma p = (x - x')(a x' - b y') + (y - y')(c y' - b x')$$

oder

$$z z' \Sigma p = a x x' - b(x y' + x' y) + c y y' + z'^2 \Sigma p - a x'^2 + 2 b x' y' - c y'^2.$$

Berücksichtigt man, dass die vier letzten Glieder sich auf Grund der Gleichung (8) durch J_m ersetzen lassen, so lautet die Gleichung der Tangentialebene auch

$$z z' \Sigma p = J_m + a x x' - b(x y' + x' y) + c y y'.$$

Auf der Ordinate des Punktes A'' werde von dieser Ebene die Strecke z^* abgeschnitten; dann erhält man durch Einsetzen von x'', y'' und z^* in obige Gleichung

$$z' z^* \Sigma p = J_m + a x' x'' - b (x' y'' + x'' y') + c y' y''.$$

Ein Blick auf Gleichung (10) zeigt sofort, dass das Centrifugalmoment

$$C = z' z^* \Sigma p \tag{11}$$

ist. In Worten ausgedrückt: Das Centrifugalmoment bezüglich der Punkte A' und A'' ist gleich der Summe aller p, multiplicirt mit der Ordinate des Hyperboloides im Punkte A' und der Strecke, welche die im Endpunkt dieser Ordinate gelegte Tangentialebene auf der Ordinate des Punktes A'' abschneidet.

Fällt der Punkt A'' mit A' zusammen, so geht der Ausdruck C in denjenigen für das Trägheitsmoment über.

Mit Hülfe des Hyperboloides kann man somit sowohl das Trägheitsmoment als auch das Centrifugalmoment eines Liniensystems für beliebige Punkte der Ebene leicht finden, und es lässt die gewählte geometrische Darstellung an Uebersichtlichkeit nichts zu wünschen übrig. Für die Anwendung in der graphischen Statik müssen wir uns dagegen nach einer ebenen Curve umsehen, welche uns wo möglich dieselbe Dienste leistet. Eine solche findet sich, wenn man den Asymptotenkegel im Abstande z_m von der XY-Ebene, das heisst durch die zu letzterer parallele Tangentialebene des Hyperboloides schneidet.

Die Gleichung dieser Schnittcurve wird erhalten, indem man in derjenigen für den Asymptotenkegel (Gleichung 9) $z = z_m$ setzt; sie lautet

$$J_m = z_m^2 \Sigma p = a x^2 - 2 b x y + c y^2. \tag{12}$$

Es stelle die Ellipse in Figur 4 diese Schnittcurve dar.

Bezeichnet man zunächst die Strecken, welche die Curve auf den Coordinatenaxen abschneidet, mit m und n, so folgt aus (12) sofort

$$J_m = am^2 = cn^2. \tag{13}$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{m^2\,n^2}{m^2+n^2} = \frac{J_m}{a+c}$$

oder da nach (6)

$$a + c = \Sigma p \sin^2\alpha + \Sigma p \cos^2\alpha = \Sigma p\,,$$

$$J_m = \frac{m^2\,n^2}{m^2+n^2}\,.\,\Sigma p\,.$$

Den Factor von Σp, welcher nach (12) mit z_m^2 identisch ist, findet man leicht aus der Figur; er ist gleich dem Quadrate des Perpendikels aus dem Mittelpunkte auf die Verbindungslinie der Endpunkte von m und n. Da die Richtung der Coordinatenaxen beliebig ist, so wird die Länge dieses Perpendikels constant für je zwei aufeinander senkrecht stehende Radien der Ellipse; die Verbindungslinien der Endpunkte je zweier solcher Radien berühren daher einen Kreis vom Radius z_m.

Es sei ferner q die Antipolare des Punktes A' (oder, was dasselbe bedeutet, A' der Antipol von q). Dann bekommt man die Gleichung von q, wenn man in der Gleichung der Polaren die Zeichen von x und y wechselt; sie lautet

$$J_m + axx' - b\,(xy' + x'y) + cyy' = 0\,.$$

Setzt man in diesem Ausdruck für x und y erst die Coordinaten von A'' und dann diejenigen von M und dividirt hierauf das erste Ergebniss durch das zweite, so erhält man das Verhältniss der beiden Perpendikel

$$\frac{s''}{s} = \frac{J_m + a x' x'' - b(x' y'' + x'' y') + c y' y''}{J_m}$$

und es wird nach Gleichung (10) das Centrifugalmoment

$$C = \frac{s''}{s} J_m .$$

Fällt der Punkt A'' mit A' zusammen, so geht das Centrifugalmoment in das Trägheitsmoment über, und dieses findet sich für A'

$$J_a = \frac{s'}{s} J_m .$$

Ferner ergibt sich analog wie bei einem System von Punkten, dass das Centrifugalmoment eines Liniensystems für zwei Punkte verschwindet, wenn der eine auf der Antipolaren des andern liegt.

Man sieht, dass uns die gewählte Ellipse in der That dieselben Dienste leistet wie die Centralellipse eines Punktesystems; auch dürfte es nicht schwer sein, noch weitere analoge Beziehungen abzuleiten. Immerhin lässt sich der Dualismus nicht consequent durchführen; vor Allem fällt es auf, dass sich beim Liniensystem keine ausgezeichnete Gerade angeben lässt, die dem Schwerpunkte eines Punktesystems entspräche. Es mag dies daher kommen, dass in unserer Definition des Trägheitsmomentes eines Liniensystems die Gewichte p mit dem Quadrate einer Strecke multiplicirt werden, während bei consequenter Umkehruug das Quadrat eines Streckenverhältnisses genommen werden müsste.

Ohne Schwierigkeit liesse sich unsere Untersuchung auf den Raum übertragen; an Stelle der Geraden p träten dann mit Gewichten belastete Ebenen. Auch die Frage, wie sich die abgeleiteten Beziehungen ändern, falls einzelne p negativ sind, böte einiges Interesse. Hier möge dagegen zum Schluss nur noch gezeigt werden, wie die Trägheitsellipse eines gegebenen Liniensystems mit Hülfe der Methoden der graphischen Statik construirt werden kann.

In den Figuren 5—10 ist diese Construction für vier beliebige in Figur 5 dargestellte p durchgeführt worden.

Zunächst haben wir die Geraden v und w und damit den Mittelpunkt M bestimmt. Zu diesem Zwecke wurden von sämmtlichen p die verticalen und horizontalen Projectionen (also die Werthe $p \sin \alpha$ und $p \cos \alpha$) gezeichnet und in Figur 6 die verticalen, in Figur 7 die horizontalen Projectionen zu je einem Kräftepolygon zusammengesetzt. Durch entsprechende Seilpolygone wurden hierauf die beiden Mittelkräfte V und W der Lage nach bestimmt; sie liegen nach unseren früheren Auseinandersetzungen in den beiden zu den Coordinatenaxen conjugirten Durchmessern der Ellipse und schneiden sich somit im Mittelpunkte M. (Die Seilpolygone, welche hiezu dienten, sind in der Zeichnung wieder ausgelöscht worden.)

Um sodann den Werth von J_m zu construiren, hätte man die p als Kräfte und ihre Abstände von M als Hebelarme betrachten können; ein entsprechendes Seilpolygon (mit in die verticale Richtung gedrehten p) hätte dann die statischen Momente pr und ein zweites, bei welchem diese Momente als Kräfte figurirten, die Werthe pr^2 geliefert. Einfacher jedoch ist das auf unserer Zeichnung angewandte Verfahren: Die Werthe $p \sin \alpha$ wurden in Figur 6 auf eine Verticale projicirt; man erhielt dadurch die Werthe $p \sin^2 \alpha$, deren Summe gleich a ist. Diese Werthe wurden nun als Kräfte angesehen, welche in den Schnittpunkten der p mit der X-Axe ihre Angriffspunkte haben; die Hebelarme dieser Kräfte sind dann offenbar gleich $\frac{r}{\sin\alpha}$, und wenn man mit Hülfe eines beliebigen, im Abstande h angenommenen Poles das Seilpolygon Figur 8 zeichnet, so sind die Abschnitte der Seilpolygonseiten auf der Y-Axe gleich $pr \sin\alpha$. (Als Probe dient der Umstand, dass die Mittelkraft dieses Kräftesystems durch M geht.) Diese Abschnitte wurden nun wieder als Kräfte betrachtet und vermittelst der Pole O_a und O_c zu zwei neuen Seilpolygonen (Fig. 9 und 10) verwendet; zu dem ersteren (Fig. 9) diente die Strecke a, zu dem letzteren (Fig. 10) die auf Figur 7 gewonnene Strecke c als Poldistanz. Diese neuen Polygone führen dann offenbar auf die Werthe pr^2 und zwar ist, wenn man die Gesammtabschnitte derselben mit t_a resp. t_c bezeichnet, nach den Regeln der graphischen Statik das Trägheitsmoment

$$J_m = \Sigma pr^2 = h \,.\, a \,.\, t_a = h \,.\, c \,.\, t_c \,.$$

Hieraus findet sich leicht unter Berücksichtigung der Gleichungen (13)

$$m = \sqrt{h \,.\, t_a} \quad \text{und} \quad n = \sqrt{h \,.\, t_c} \,.$$

Die Werthe m und n sind schliesslich in der Figur 6 vermittelst zweier Halbkreise construirt und als Radien der Ellipse nach Figur 5 übertragen worden, worauf das Zeichnen der ganzen Ellipse keiner Schwierigkeit mehr unterlag.