Notizen.

Ein Satz aus der Theorie der indefiniten ternären quadratischen Formen. — Die Bestimmung der Anzahl der Klassen, in welche die Gesammtheit der indefiniten ternären quadratischen Formen von gegebenen Invarianten zerfällt, ist bis jetzt noch nicht allgemein gelungen. Für solche Formen, welche für rationale Verhältnisse der Variabeln verschwinden können und welche ich N u l l f o r m e n nenne, lässt sich indessen die Klassenzahl angeben. [1]) Ich erinnere zunächst an folgende Definitionen [2]):

Die ternäre quadratische Form

$$f = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'x''x + 2b''xx^1 = \begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$$

sei primitiv, d. h. die Coefficienten a, a', a'', b, b', b'' sollen ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler sein; ihre Determinante

$$D = ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b''$$

sei positiv. Ferner sei

$$\begin{aligned} b^2 - a'a'' &= \Omega A, \quad b'^2 - a''a = \Omega A', \quad b''^2 - aa' = \Omega A'' \\ ab - b'b'' &= \Omega B, \quad a'b' - b''b = \Omega B', \quad a''b'' - bb' = \Omega B'', \end{aligned}$$

wo Ω den grössten gemeinschaftlichen (positiven) Theiler dieser sechs Ausdrücke bedeutet. Dann ist

$$F = AX^2 + A'X'^2 + A''X''^2 + 2BX'X'' + 2B'X''X + 2B''XX' = \begin{pmatrix} A, A', A'' \\ B, B', B'' \end{pmatrix}$$

die primitiv adjungirte Form von f.

Die Determinante D ist durch Ω^2 theilbar; es sei $D = \Omega^2 \Delta$. Ω und Δ heissen die Invarianten von f.

---

1) Einen andern Specialfall habe ich in meiner Inauguraldissertation (Zürich 1871) behandelt.

2) Gauss, Disq. ar. Art. 267; Eisenstein „Neue Theoreme etc." Cr. J. Bd. 35.

Man stelle nun Ω als Product von Potenzen verschiedener Primzahlen dar, ebenso Δ, reducire in jeder Potenz den Exponenten auf 2 oder 1, je nachdem er gerade oder ungerade ist und erhalte so aus Ω und Δ resp. Ω_1 und Δ_1. Es sei P^2 der grösste quadratische Theiler von Δ_1, welcher auch in Ω_1 aufgeht, Q^2 der grösste quadratische Theiler von Δ_1, welcher zu Ω_1 prim ist, und $\Delta_1 = P^2 Q^2 \Delta_2$. Ferner sei $P^2 R^2$ der grösste quadratische Theiler von Ω_1, welcher zu Δ_2 prim ist, und $\Omega_1 = P^2 R^2 \Omega_2$. Endlich sei Θ der grösste gemeinschaftliche Theiler von Ω_2 und Δ_2, Ω' derjenige von Θ und $\frac{\Omega_2}{\Theta}$, Δ' derjenige von Θ und $\frac{\Delta_2}{\Theta}$ und

$$\Theta = \Theta'\Omega'\Delta', \Omega_2 = \Theta\Omega'\Omega'' = \Theta'\Omega'^2\Delta'\Omega'', \Delta_2 = \Theta\Delta'\Delta'' = \Theta'\Delta'^2\Omega'\Delta''.$$

Dann sind $P, Q, R, \Omega_2 \Delta_2$ relativ prim; ebenso $\Theta', \Omega', \Delta', \Omega'', \Delta''$.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass f (also auch F) eine Nullform sei, lautet nun in Legendre'schen Zeichen: Es muss sein

$$\left(\frac{f}{\omega}\right) = \left(\frac{\Theta'\Omega'\Delta''}{\omega}\right); \left(\frac{F}{\delta}\right) = \left(\frac{\Theta'\Delta'\Omega''}{\delta}\right); \left(\frac{f}{\theta}\right)\left(\frac{F}{\theta}\right) = \left(\frac{-\Omega'\Delta'\Omega''\Delta''}{\theta}\right)$$

für jeden ungeraden Primfactor ω von $\Delta'\Omega''$, δ von $\Omega'\Delta''$, θ von Θ'.[1])

Da diese Bedingung sich nur auf den quadratischen Charakter der Formen bezieht, so ergibt sich sofort der Satz:

Jedes Geschlecht indefiniter ternärer quadratischer Formen enthält entweder keine oder nur Nullformen.

Ist die Determinante D ungerade, so gilt nun für die Anzahl der Klassen, welche einem vorgeschriebenen Geschlecht von primitiven Nullformen angehören, folgender Satz:

Es seien

$p_1, p_2, \dots p_m$ diejenigen Primfactoren der Form $4k+1$ von P, für welche

$$\left(\frac{f}{p}\right) = \left(\frac{\Theta'\Omega'\Delta''}{p}\right); \left(\frac{F}{p}\right) = \left(\frac{\Theta'\Delta'\Omega''}{p}\right),$$

$\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n$ die sämmtlichen Primfactoren der Form $4k+1$ von Θ, s eine relative Primzahl zu Θ, für welche

[1]) Smith „On the criterion etc.“ Proceed. Roy. Soc. vol. XIII.

$$\left(\frac{s}{\theta_k}\right) = \left(\frac{\Delta' \Omega''}{\theta_k}\right)\left(\frac{f}{\theta_k}\right) \text{ oder} = \left(\frac{\Omega' \Delta''}{\theta_k}\right)\left(\frac{F}{\theta_k}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

je nachdem θ_k Theiler ist von $\Theta'\Omega'$ oder von Δ',

r ein (positiver) Theiler von $2\,\Theta\Omega''\Delta''$,

r' ein solcher Theiler r, für welchen $\left(\frac{r}{p_k}\right) = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots m)$

$$\text{und } \left(\frac{\theta_k^{-2}\,\Theta\Omega''\Delta'' s r}{\theta_k}\right) = 1 \text{ oder } \left(\frac{r}{\theta_k}\right) = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots n),$$

je nachdem θ_k in r aufgeht oder nicht;

dann ist die Klassenanzahl des betrachteten Geschlechts gleich

$$2^{m+n} \frac{\text{Anzahl aller } r'}{\text{Anzahl aller } r};$$

also stets eine Potenz von 2.

So z. B. enthält jedes Geschlecht ternärer quadratischer Nullformen, deren Invarianten Ω, Δ Potenzen einer und derselben ungeraden Primzahl p sind, nur *eine* Formenklasse, ausgenommen, wenn $p \equiv 1 \pmod 8$ ist, das Geschlecht $\left(\frac{f}{p}\right) = \left(\frac{F}{p}\right) = 1$, welches aus zwei Klassen besteht.

Die Erweiterung des obigen Satzes auf Formen gerader Determinante bietet keine principielle Schwierigkeit; ob derselbe aber auch für Formen gilt, durch welche die Null sich nicht rational darstellen lässt, bleibt eine offene Frage.

[A. Meyer.]

Auszüge aus den Sitzungsprotokollen.

Hauptversammlung vom 28. Mai 1883.

1. In Verhinderung des Quästors legt Herr Prof. Fritz, Mitglied der Oekonomiecommission, die Rechnung für das Jahr 1882 vor, welche folgendes Ergebniss zeigt: