Ein elementar-geometrisches Problem.

Von **Dr. J. Keller.**

In den elementaren Lehrbüchern der Planimetrie findet man die folgende Aufgabe gestellt und auch gelöst:

»Gegeben ein Dreieck ABC und ein beliebiger Punkt P in seiner Ebene: Man ziehe durch diesen eine Transversale t, welche die Dreiecksfläche hälftet.«

Von diesem Probleme geben wir hier eine Lösung mit Hülfe der neueren Geometrie. Es ist ein Beispiel, recht geeignet zu zeigen, wie die modernen geometrischen Methoden auch zur Lösung elementarer Aufgaben mit Vortheil verwendet werden können und wie sie sich gegenüber den alt-hergebrachten durch Eleganz, Kürze und Vollständigkeit der Lösung auszeichnen. Ausserdem führt diese Behandlungsweise des Problems zur Betrachtung eines interessanten Systems von sich doppelt berührenden Kegelschnitten.

Zwei in das Gebiet der Kegelschnitt-Theorie gehörende Sätze sind es namentlich, die wir für das Folgende benutzen:

1) Eine als beweglich gedachte Tangente einer Hyperbel bildet mit den Asymptoten ein Dreiseit von constantem Flächeninhalt und derselbe ist die Hälfte des Inhaltes des Parallelogrammes, gebildet aus den Asymptoten und den durch den Berührungspunkt der Tangente gehenden Parallelen zu diesen.

Sind t, t' (Fig. 1) die Asymptoten und a, b zwei beliebige weitere Tangenten einer Hyperbel, so behaupten wir

$$\Delta(t, t', b) = \Delta(t, t', a) \quad \text{oder} \quad \Delta BOB' = \Delta AOA'.$$

Zum Beweise hiefür fassen wir die zwei projectivischen Punktreihen in's Auge, in welchen die Hyperbeltangenten die Asymptoten schneiden; bezüglich derselben ist die unendlich ferne Gerade als die Verbindungslinie der Berührungspunkte von t, t' mit der Hyperbel die perspectivische Axe; auf dieser haben sich die 2 Geraden AB', $A'B$ zu schneiden, d. h. sie sind parallel; nun ist

$$\Delta AOB' = \Delta AOB'$$
$$\Delta AB'B = \Delta AB'A'$$

daher
$$\Delta AOB' - \Delta AB'B = \Delta AOB' - \Delta AB'A'$$

d. h.
$$\Delta BOB' = \Delta AOA'.$$

Wenn daher die Alten die Aufgabe lösten, ein gegebenes Dreieck in ein anderes, flächengleiches über vorgeschriebener Grundlinie zu verwandeln, so construirten sie im Grunde genommen eine neue Tangente an eine Hyperbel, bestimmt durch ihre Asymptoten und eine Tangente.

Um den Berührungspunkt der Tangente a zu finden, benutzen wir den Satz, dass für ein einem Kegelschnitt umschriebenes Dreiseit die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten durch einen Punkt gehen (spec. Form des Brianchon'schen Satzes). Für das Dreiseit $t\,t'\,a$ ist dieser Punkt die 4. Ecke O^* des Parallelogrammes $AOA'O^*$; somit schneidet die Diagonale OO^* desselben aus a den Berührungspunkt A^* und daher ist

$$A^*A = A^*A';$$

hieraus folgt aber:

$$\text{Parallelogramm } A_1 O A_2 A^* = \frac{1}{2} \text{ Dreieck } AOA'.$$

2) Sind K_1 und K_2 (Fig. 2) zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte, so schneidet jede durch einen der beiden Berührungspunkte gehende Transversale t die Kegelschnitte noch in zwei weiteren Punkten, welche mit dem Berührungspunkte und dem Schnittpunkte mit der Tangente im anderen Berührungspunkte ein constantes Doppelverhältniss bilden.

Ein analytischer Beweis hierfür vollstreckt sich sehr einfach, indem wir die beiden gemeinsamen Tangenten und die Berührungssehne als Seiten des Coordinaten-Dreieckes festsetzen; sind dann k_1 und k_2 zwei beliebige Parameter, so können K_1 und K_2 auf folgende Weise ausgedrückt werden.

$$K_1 \equiv x_2 x_3 - k_1 x_1^2 = o$$
$$K_2 \equiv x_2 x_3 - k_2 x_1^2 = o.$$

Ist ferner λ der Parameter für die durch den Berührungspunkt X_2 gehende veränderliche Tranversale t, so heisst deren Gleichung:

$$t \equiv x_1 - \lambda x_3 = o.$$

Für die Schnittpunkte X_2, X_{13}, T_1, T_2 erhält man nun folgende Bestimmungsgrössen:

$$X_2 : \frac{x_2}{x_3} = \infty$$

$$X_{13} : \frac{x_2}{x_3} = o$$

$$T_1 : \frac{x_2}{x_3} = k_1 \lambda^2$$

$$T_2 : \frac{x_2}{x_3} = k_2 \lambda^2.$$

Das Doppelverhältniss dieser 4 Punkte erhält somit den Werth:

$$(X_2 X_{13} T_1 T_2) = \frac{\infty - k_1 \lambda^2}{o - k_1 \lambda^2} : \frac{\infty - k_2 \lambda^2}{o - k_2 \lambda^2} = \frac{k_2}{k_1},$$

d. h. er ist von λ unabhängig. Auf analoge Weise findet man für eine Transversale durch X_3 denselben Werth des Doppelverhältnisses. Es mag noch bemerkt werden, dass dieser Werth positiv ist für zwei Ellipsen; positiv oder negativ für zwei Hyperbeln, je nachdem die Berührungspunkte resp. auf verschiedenen Aesten oder auf demselben Aste einer der Hyperbeln liegen; für zwei Parabeln ist er $= 1$, weil sie zusammenfallen.

Es liegt aber in der Natur der Sache, auch einen rein-geometrischen Beweis für diesen 2. Satz zu haben. Ein solcher wird uns sehr nahe gelegt durch die Eigenschaft centrisch-collinearer Figuren in derselben Ebene, wonach auf jedem Strahle durch das Collineations-Centrum 2 entsprechende Punkte mit diesem und dem Schnittpunkte mit der Collineationsaxe ein constantes Doppelverhältniss bilden. Unsere zwei sich doppelt berührenden Kegelschnitte K_1, K_2 können nämlich als collineare Figuren in centrischer Lage aufgefasst werden entweder mit X_2 als Centrum und x_2 als Axe oder mit X_3 als Centrum und x_3 als Axe; daraus folgt, dass auf 2 beliebigen durch X_2 gehenden Strahlen die Doppelverhältnissgleichheit besteht:

$$(X_2 X_{13}^{\text{II}} T_1^{\text{II}} T_2^{\text{II}}) = (X_2 X_{13}^{\text{II}*} T_1^{\text{II}*} T_2^{\text{II}*});$$

ebenso auf 2 beliebigen durch X_3 gehenden Strahlen:

$$(X_3 X_{12}^{\text{III}} T_1^{\text{III}} T_2^{\text{III}}) = (X_3 X_{12}^{\text{III}*} T_1^{\text{III}*} T_2^{\text{III}*}).$$

Es ist aber auch

$$(X_2 X_{13}^{\text{II}} T_1^{\text{II}} T_2^{\text{II}}) = (X_3 X_{12}^{\text{III}} T_1^{\text{III}} T_2^{\text{III}});$$

denn bez. des Kegelschnittes K_1 müssen sich nach dem Pascal'schen Satze $X_2\,X_3$, $X^{\mathrm{II}}_{13}\,X^{\mathrm{III}}_{12}$, $T^{\mathrm{II}}_1\,T^{\mathrm{III}}_1$ in einem Punkte P schneiden; durch diesen geht aus analogem Grunde bez. des Kegelschnittes K_2 die Gerade $T^{\mathrm{II}}_2\,T^{\mathrm{III}}_2$; es sind somit die 2 Punktreihen auf t_2 und t_3 in perspectivischer Lage für P als Perspectiv-Centrum und haben daher das nämliche Doppelverhältniss. —

Auf unser Hauptproblem nun eintretend, sei ABC (Fig. 3) das gegebene Dreieck, welches durch eine Transversale aus einem beliebigen Punkte P gehälftet werden soll. Wir fassen zunächst nur zwei Dreieckseiten, z. B. BA und CA in's Auge; alle Transversalen, welche mit diesen beiden Seiten je ein Dreiseit bilden, dessen Inhalt der Hälfte des Inhaltes des gegebenen Dreiecks gleich ist, umhüllen nach dem oben citirten 1. Satze eine Hyperbel, welche die Dreiecksseiten BA und CA zu Asymptoten hat. Offenbar gehören auch die 2 Mittellinien BB_1, CC_1 des Dreiecks zu diesen Tangenten, so dass wir damit von der Hyperbel schon ein Element mehr kennen, als zu ihrer Bestimmung erforderlich ist. Ermitteln wir jetzt die von dem Punkte P an diese Hyperbel gehenden Tangenten, so sind diese die verlangten Transversalen. Natürlich wird hierfür die Hyperbel nicht wirklich gezeichnet, sondern man verbindet die auf den Asymptoten liegenden projectivischen Punktreihen 1, 2, 3, 4; 1′, 2′, 3′, 4′ (wovon schon 3 Paare genügen) mit P; dadurch entstehen um P herum 2 projectivische Strahlbüschel; bestimmt man mittelst eines durch P gehenden Hülfskreises die Doppelstrahlen derselben, so sind diese die gesuchten Tangenten. Im Allgemeinen liefert nur die eine der 2 Tangenten eine wirklich brauchbare Lösung des Theilungsproblemes; die andere schneidet die Verlängerungen der Dreiecksseiten

BA und CA in 2 Punkten, die mit A ein Dreieck bilden, dessen Inhalt natürlich auch gleich der Hälfte des Inhaltes des gegebenen Dreieckes ist.

Liegt P im Unendlichen, so fallen die zwei Strahlen 1, 2′ mit der unendlich fernen Geraden zusammen; die projectivischen Büschel aus P verwandeln sich daher in involutorische (ein Paar, 1, 2′; 1′, 2 entspricht sich vertauschungsfähig) und der Strahl nach A ist der Centralstrahl der Involution; die 2 Tangenten liegen daher in diesem Falle symetrisch zu A, was auch sehr natürlich, da A der Mittelpunkt der Hyperbel ist.

Hätten wir den Punkt P in dem über der Dreiecksseite BC liegenden Winkelraum, z. B. in P^* gewählt, so läge er im Innern der Hyperbel und es gingen von ihm aus an sie keine reellen Tangenten; augenscheinlich existirt aber auch in diesem Falle eine das Dreieck halbirende Transversale. Hieraus erhellt, dass unser Problem eine noch nicht in allen Theilen befriedigende Lösung gefunden hat; wir müssen vielmehr auch die Seitenpaare CB, AB und AC, BC in gleicher Weise berücksichtigen, wie vorhin das Paar BA, CA. Wir wollen die Hyperbeln, welche diesen 3 Seitenpaaren entsprechen, resp. mit H_2, H_3 und H_1 bezeichnen (Fig. 4). Es mögen nun folgende sofort in die Augen springende Eigenschaften dieses Hyperbeltripels erwähnt werden. Je zwei von ihnen haben eine der Dreiecksseiten zur gemeinsamen Asymptote und berühren sich ausserdem in einem der Mittelpunkte T_{23}, T_{31}, T_{12} der Mittellinien des Dreiecks mit dieser als Tangente. Die 3 Hyperbeln repräsentiren somit ein System von 3 Kegelschnitten, von denen je 2 sich doppelt berühren; je 3 der Berührungspunkte liegen auf einer Geraden, d. h. die 6 Berührungspunkte sind die Ecken eines vollständigen Vierseits, dessen eine Seite im Unendlichen liegt. Da in dem Dreieck AA_1B der Punkt T_{23} die Mitte der Seite AA_1 ist, so ist auch der Punkt T_{13} die Mitte der Strecke $T_{23}\,1$; analog T_{12} die Mitte der Strecke $T_{23}\,2$; daraus folgt: Die Dreiecksseite BC ist die Polare des Punktes T_{23} in Bezug auf die Hyperbel H_1; ebenso sind CA und AB die Polaren der Punkte T_{31}, T_{12} bezüglich der Hyperbeln H_2 resp. H_3; die Tangenten von T_{23}, T_{31}, T_{12} aus resp. an H_1, H_2, H_3 berühren diese daher in ihren Schnittpunkten mit den resp. Dreiecksseiten. Die Sehne $T_{12}\,T_{13}$ wird durch die Mittellinie AA_1 halbirt; daraus folgt, dass die Letztere die Polare ist des unendlich fernen Punktes T_{23}^* in Bezug auf die Hyperbel H_1; in gleicher Weise sind BB_1 und CC_1 die Polaren von T_{31}^*, T_{12}^* bezüglich H_2 resp. H_3. Hieraus ergibt sich, dass die Tangenten der Hyperbeln in den Schnittpunkten S_1, $S_1{}^*$; S_2, $S_2{}^*$; S_3, $S_3{}^*$ mit den Mittellinien den Dreiecksseiten resp. parallel sind; diese Eigenschaft folgt auch unmittelbar aus dem Satze, dass der Berührungspunkt einer Hyperbeltangente die Mitte der Strecke zwischen den Asymptoten ist. Fassen wir die zuletzt entwickelten Eigenschaften zusammen, so folgt: Die Ecken A, B, C bilden mit dem Schwerpunkte des Dreiecks ein vollständiges Viereck, dessen Seiten die Polaren der gemeinschaftlichen Berührungspunkte der Hyperbeln sind. — Aus dem Vorigen ergibt sich, dass die zwei Schnittpunkte eines jeden der Hyperbeläste H_1, H_2, H_3 mit der entsprechenden Seite des gegebenen Dreiecks von den Ecken gleichen Abstand haben; sie selbst können gefunden werden als die Doppelpunkte der Involutionen harmonischer Pole, die auf den Dreiecksseiten liegen; z. B. für die Seite BC ist A_1 der Mittelpunkt der Involution und C, 2 bilden ein weiteres Paar derselben; die Potenz der Involution wird daher $\frac{1}{8}\overline{BC}^2$; die Potenz der Involution auf CA ist $\frac{1}{8}\overline{CA}^2$; hieraus folgt, dass die Verbindungslinie der Schnittpunkte auf BC und CA, die in der Nähe von C liegen, zur Dreiecksseite AB parallel wird. Da die Strecke $T_{13}\,T_{23}$ durch die Mittellinie CC_1 halbirt wird, so folgt dieser Parallelismus auch sofort durch Umkehrung des oben abgeleiteten Satzes 2. Nach diesem ergibt sich allgemein: Alle zur Seite AB parallelen Secanten schneiden die zwei Hyperbeln H_1 und H_2 im Endlichen in zwei Punkten, deren Strecke durch die Mittellinie CC_1 halbirt wird; und weiter: Eine beliebige Transversale durch den Berührungspunkt T_{12} schneidet H_1, H_2 und die Seite AB in Punkten, die mit T_{12} eine harmonische Gruppe bilden. Analoge Eigenschaften gelten für die Secanten durch T_{23}, T_{23}^*; T_{13}, T_{13}^*. — In den Ecken A, B, C und im Schwerpunkte des Dreiecks schneiden sich je 3 der gemeinsamen Tangenten der Hyperbeln; anderseits liegen auf den 3 Geraden $a\,(T_{12}\,T_{13})$, $b\,(T_{23}\,T_{12})$, $c\,(T_{13}\,T_{23})$ und auf der unendlich fernen Geraden je 3 der 6 gemeinsamen Berührungspunkte: Das Dreieck $A_1\,B_1\,C_1$ ist gemeinsames Diagonal-Dreieck resp. Diagonal-Dreiseit jenes Vierecks und dieses Vierseits; es ist ein Tripel harmonischer Pole und Polaren bezüglich jeder der 3 Hyperbeln.

Aus Diesem erkennt man, dass unser Theilungsproblem im Grunde genommen 6 verschiedene Lösungen zulässt: Die 6 Tangenten von P aus an die

3 Hyperbeln. Allerdings können davon 2 imaginär werden, was passirt, wenn P im Innern einer Hyperbel liegt; für den in Fig. 4 schraffirten Theil der Ebene als Ortslage von P werden alle 6 Lösungen reell; es können jedoch Lösungen zusammenfallen, was stattfindet, wenn P auf einer der 6 gemeinsamen Tangenten oder auf einer der Hyperbeln liegt. Endlich hat man noch zu unterscheiden zwischen eigentlichen und uneigentlichen Lösungen; eigentlich nenne ich die Lösung dann, wenn die Schnittpunkte der Transversalen mit den Asymptoten der betreffenden Hyperbel innerhalb der begrenzten Dreiecksseiten fallen; uneigentlich, wenn der eine oder beide Schnittpunkte auf die Verlängerungen kommen. Es ist leicht zu sehen, wie viele eigentliche und uneigentliche Lösungen einer gegebenen Lage von P zukommen; befindet sich z. B. P in dem kleinen Gebiete, begrenzt von den Hyperbelbogen $T_{12}\,T_{13}$, $T_{23}\,T_{12}$, $T_{13}\,T_{23}$, so entsprechen ihm im Allgemeinen 3 eigentliche und 3 uneigentliche Lösungen; liegt P auf diesen Hyperbelbogen selbst, so kommen ihm 2 eigentliche und 3 uneigentliche Lösungen zu; jede andere Lage von P erfreut sich ausser uneigentlichen und ev. imaginären Lösungen nur einer einzigen eigentlichen Lösung.

Durch die interessante Fig. 4 wird man auf ein allgemeineres System von sich doppelt berührenden Kegelschnitten hingeleitet. Sind nämlich K_1 und K_2 (Fig. 5) 2 Kegelschnitte, die sich in T_{12} und T_{12}^* berühren, so besitzen sie unendlich viele gemeinsame Tripel harmonischer Pole und Polaren; alle haben die Ecke C_1 und die Seite $T_{12}\,T_{12}^*$ gemeinsam. Sei nun $C_1 B_1 A_1$ ein ganz bestimmtes dieser Tripel, so gibt es einen und nur einen Kegelschnitt K_3, der sowohl K_1 als auch K_2 doppelt berührt und das Dreiek $A_1 B_1 C_1$ auch zum Tripel hat; er berührt K_1 in den Schnittpunkten T_{13}, T_{13}^* der Geraden $C_1 A_1$ in Tangenten, die nach B_1 laufen, und analog K_2 in T_{23}, T_{23}^* in Tangenten nach A_1. Bezieht man die 3 Kegelschnitte auf ihr gemeinsames Tripel als Fundamentaldreieck, so lauten ihre Gleichungen:

$$K_1 \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = o$$

$$K_2 \equiv ka_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = o$$

$$K_3 \equiv ka_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + ka_3 x_3^2 = o,$$

wobei $k = \frac{a_1 + \lambda}{a_1}$ und λ der Parameter des Kegelschnittbüschels $K_1 + \lambda x_2^2 = o$ ist. Für $k = -1$ oder $\lambda = -2a$ erhält man den speciellen Fall der Fig. 6, welche die allgemeine, collineare Figur zur Hauptfigur 4 repräsentirt. — Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass unter den 3 sich doppelt berührenden Kegelschnitten niemals 2 Ellipsen auftreten können; diess zeigt sich auch sofort bei dem Uebergange der Fig. 4 zur collinearen Fig. 6, indem es keine Gerade als Gegenaxe r gibt, welche nicht mindestens 2 der 3 Hyperbeln zugleich schnitte.

Keller, Ein elementar-geometrisches Problem.