Centrische Collineation $n$ter Ordnung in der Ebene

vermittelt

durch Aehnlichkeitspunkte von Kreisen.

Von

Christian Beyel.

Allgemeine Sätze.

1. Indem wir die Beziehungen der Aehnlichkeitspunkte von Kreisen der Ebene mit einem festen Kreise untersuchen, stützen wir uns auf eine von Herrn Professor Fiedler gegebene Darstellungsweise der Punkte des Raumes durch Kreise in der Ebene.*) Wir senden die Principien dieser Methode, soweit wir dieselben im Folgenden benutzen, hier voraus.

Ein beliebiger Kreis $(M_1\, r_1)$ in der Bildebene repräsentirt die zwei Punkte (P_1 und $P_1{}^*$) des Raumes, welche in der Normalen durch den Mittelpunkt des Kreises um den Betrag des Radius von der Bildebene abstehen. Kreise, welche mit einem Kreise denselben Aehnlichkeitspunkt haben, stellen zwei zur Bildebene symmetrisch gelegene Gerade dar, die im Aehnlichkeitspunkte die Bildebene treffen. Zwei Kreise $(M_1\, r_1)$ und $(M_2\, r_2)$ repräsentiren vier Punkte $P_1\, P_1{}^*$ und $P_2\, P_2{}^*$. Die zwei Aehnlichkeitspunkte dieser Kreise sind die Schnittpunkte der Geraden $P_1\, P_2$ resp. $P_1{}^*\, P_2{}^*$ und $P_1\, P_2{}^*$ resp. $P_1{}^*\, P_2$ mit der Bildebene. Kreise, welche einen Kreis berühren, sind

*) Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. B. XXV. p. 2187.

die Bilder von Punkten zweier 45° Kegel, deren Spitzen die jenen Kreis darstellenden Punkte sind. Kreise durch einen Punkt stellen einen 45° Kegel dar, dessen Spitze dieser Punkt ist.

2. Wir beweisen nun folgenden Satz:

Satz I. In einer Ebene sei gegeben ein Kreis M_1 vom Radius r_1. Lassen wir den Mittelpunkt eines Kreises $(M r)$ eine Curve L von der Ordnung n durchlaufen und werde sein Radius so bestimmt, dass ein Aehnlichkeitspunkt zwischen den Kreisen M_1 und M auf einer Curve C von der Ordnung m liege, so durchläuft der andere Aehnlichkeitspunkt eine Curve C' von der Ordnung $m \,.\, n$ resp. $m \,.\, n-1$, wenn L und C sich in M_1 schneiden.

Beweis. Alle Kreise, deren Mittelpunkte auf L liegen, sind Bilder von Punkten eines zur Bildebene normalen Cylinders mit der Basiscurve L, der also wie L von der Ordnung n ist. Bestimmen wir diese Kreise des näheren so, dass ein Aehnlichkeitspunkt mit einem Kreise $(M_1 r_1)$ auf einer Curve C sich befindet, so stellen sie Punkte von zwei Kegeln dar, deren Spitzen die $(M_1 r_1)$ repräsentirenden Punkte P_1 resp. $P_1{}^*$ sind. Die Leitcurve beider Kegel ist C, ihre Ordnungszahl gleich m. Die Kreise $(M r)$ stellen folglich die Durchdringungspunkte eines Cylinders $n$ter Ordnung mit zwei zur Bildebene symmetrischen Kegeln von der Ordnung m dar. Diese Durchdringungscurven (D und D^*) sind von der mnten Ordnung und liegen zur Bildebene symmetrisch. Projiciren wir dieselben von $P_1{}^*$ resp. von P_1 aus, so schneiden die projicirenden Kegel die Bildebene in einer Curve C', welche den Ort der zweiten Aehnlichkeitspunkte der Kreise $(M r)$ und $(M_1 r_1)$ darstellt. Nun sind die projicirenden Kegel von der Ordnung der Durchdringungscurven, mithin muss auch C' von dieser, d. h. der mnten Ordnung sein (s. Fig.).

Schneiden sich C und L in M_1, so haben der Cylinder über L und die Kegel mit den Spitzen P_1 resp. $P_1{}^*$ die Erzeugende $P_1 P_1{}^*$ gemein. Also ist der Rest der Durchdringung mithin auch C' von der Ordnung $m \cdot n-1$.

Setzen wir an Stelle von C den Kreis $M_1 r_1$, so müssen sämmtliche Kreise (Mr) diesen Kreis berühren. Sagen wir nun zwei Kreise, welche sich berühren, haben — ausser dem Berührungspunkte — einen Aehnlichkeitspunkt, so folgern wir aus Satz I:

Satz I^a^. Der Ort der Aehnlichkeitspunkte aller Kreise, welche ihre Mittelpunkte auf einer Curve L von der Ordnung n haben und welche einen Kreis $(M_1 r_1)$ berühren, mit diesem Kreise ist eine Curve der Ordnung $2n$.

3. Ziehen wir durch M_1 eine Gerade ϱ_1, welche die Curven L, C und C' in den Punkten L, C, C' schneide. Die Abstände dieser Punkte von M_1 seien ϱ_L, ϱ_C und ϱ_C'. Da $(M_1 L C C')$ eine harmonische Gruppe ist, so besteht die Relation:

$$\varrho_L (\varrho_C + \varrho_C') = 2 \varrho_C \cdot \varrho_C'.$$

Wir ersehen aus derselben, dass die gegenseitige Lage der Punkte M_1 L, $C C'$ unabhängig von der Grösse des Radius r_1 ist. Construiren wir daher in einem Punkte von L einen Kreis $(M r_0)$, der durch M_1 geht und in M_1 einen Kreis, dessen einer Aehnlichkeitspunkt mit dem Kreise $(M r_0)$ in C liegt, so wird der andere Aehnlichkeitspunkt sich in C' befinden. Wir schliessen daraus:

Satz I^b^. Der Mittelpunkt eines Kreises $(M r_0)$ durchlaufe eine Curve L von der Ordnung n und der Kreis gehe in jeder Lage durch einen festen Punkt M_1. Lassen wir dann den Radius eines Kreises aus M_1 sich so ändern *dass stets ein Aehnlichkeitspunkt zwischen ihm und dem Kreise* (Mr_0) *auf einer Curve* C *von der Ordnung* m *liegt, so ist der Ort der anderen Aehnlichkeitspunkte eine Curve* C' *von der Ordnung* mn *resp.* $mn-1$, *wenn* L *und* C *sich in* M_1 *schneiden.*

Bestimmen wir die Aehnlichkeitspunkte eines Kreises (Mr) in Satz I etwa von (Mr_x) mit den übrigen Kreisen (Mr), so liegen diese auf zwei Curven von der Ordnung $mn-1$ resp. $mn-2$, wenn L und C sich in M_1 schneiden. (Mr_x) stellt nämlich zwei Punkte P_x und P^* im Raume dar, welche auf den Durchdringungscurven D resp. D^* liegen. Indem wir diese Curven von P_x und P^* auf die Bildebene projiciren, erhalten wir die Aehnlichkeitspunkte des Kreises (Mr_x) mit den Kreisen (Mr). Da aber eine Raumcurve mnter (resp. $mn-1$ter) Ordnung von einem ihrer Punkte aus durch einen Kegel $mn-1$ter (resp. $mn-2$ter) Ordnung projicirt wird, so sind die projicirenden Kegel von P_x und P_x^* nach D resp. D^* von der Ordnung $mn-1$ (resp. $mn-2$) also auch die Schnittcurven derselben mit der Bildebene, d. h. die Curven der Aehnlichkeitspunkte.

Berühren die Kreise (Mr) den Kreis $(M_1 r_1)$, so besteht der Ort der Aehnlichkeitspunkte eines Kreises (Mr) mit den übrigen aus zwei Curven von der Ordnung $2n-1$.

4. Sei eine Kreisreihe die Gesammtheit aller Kreise, welche mit einem festen Kreise $M_1 r_1$ denselben Aehnlichkeitspunkt haben und ein Kreisreihenbüschel $m$ter Ordnung die Gesammtheit aller Kreise, von denen je ein Aehnlichkeitspunkt mit einem festen Kreise $M_1 r_1$ auf einer Curve C von der Ordnung m liegt. Der feste Kreis $M_1 r_1$ sei der Scheitelkreis.

Im Raume stellt dann eine Kreisreihe zwei zur Bildebene symmetrische Gerade dar, welche im gemeinsamen Aehnlichkeitspunkte die Bildebene treffen. Das Kreisreihenbüschel $m$ter Ordnung stellt zwei zur Bildebene symmetrische Kegel $m$ter Ordnung dar, deren Spitzen die durch den Scheitelkreis repräsentirten Punkte P_1 und P_1^* sind. Die Ordnungscurve der Büschel ist die gemeinsame Leitcurve beider Kegel. Mit Benutzung dieser Ausdrucksweise geht Satz I in folgenden über:

Satz II. Die Kreise eines Kreisreihenbüschels mter Ordnung, deren Mittelpunkte auf eine Curve L von der Ordnung n liegen, haben ihre zweiten Aehnlichkeitspunkte mit dem Scheitelkreis auf einer Curve von der Ordnung mn *resp.* $mn-1$, *wenn L und die Ordnungscurve C des Büschels sich im Mittelpunkt des Scheitelkreises schneiden — oder gehören auch einem Büschel von der Ordnung* mn *resp.* $mn-1$ *mit demselben Scheitelkreis an.*

Betrachten wir zwei Kreisreihenbüschel von den Ordnungen m_1 und m_2 mit den Scheitelkreisen $M_1 r_1$ und $M_2 r_2$, so stellen diese Büschel vier Kegel im Raume dar. Zwei derselben sind von der Ordnung m_1, zwei von der Ordnung m_2. Diese Kegel durchdringen sich in vier Curven der Ordnung $m_1 m_2$, von denen je zwei zur Bildebene symmetrisch sind und durch die Kreise dargestellt werden, welche beiden Büscheln gemeinsam sind.

Alle vier Durchdringungscurven oder ein Paar zur Bildebene symmetrischer werden von der Ordnung $m_1 m_2 - 1$ sein, wenn je zwei zur Bildebene nicht symmetrische Kegel eine Erzeugende gemein haben. Wir erkennen dies daran, dass die Ordnungscurven der Büschel sich in beiden oder in einem Aehnlichkeitspunkte der Scheitelkreise schneiden; denn in diesen Aehnlichkeitspunkten treffen die Verbindungslinien der Spitzen unserer Kegel die Bildebene. Daraus ergibt sich:

Satz III. Die Mittelpunkte der Kreise, welche einem Kreisreihenbüschel von der Ordnung m_1 *und einem solchen von der Ordnung* m_2 *gemeinsam sind, liegen auf zwei Curven von der Ordnung* $m_1 . m_2$, *von denen eine oder beide sich auf die Ordnung* $m_1 . m_2 - 1$ *reduciren, wenn die Ordnungscurven der Büschel sich in einem oder den beiden Aehnlichkeitspunkten der Scheitelkreise treffen.*

Alle Kreise, welche einen beliebigen Kreis berühren, müssen wir als ein Kreisreihenbüschel 2ter Ordnung auffassen, dessen Grenzfall aus allen Kreisen besteht, welche durch einen Punkt gehen. Wir schliessen daher:

Satz III[a]. Die Mittelpunkte derjenigen Kreise eines Kreisreihenbüschels mter Ordnung, welche einen beliebigen Kreis berühren, resp. durch einen beliebigen Punkt gehen, liegen auf zwei resp. einer Curve von der Ordnung $2m_1$. *Eine dieser Curven wird die Ordnungszahl* $2m_1 - 1$ *haben, wenn der beliebige Kreis den Scheitelkreis in einem Punkte der Ordnungscurve berührt resp. wenn der beliebige Punkt ein Schnittpunkt des Scheitelkreises und der Ordnungscurve des Büschels ist.*

Trete in Satz III an Stelle des einen Kreisreihenbüschels dasjenige, welches durch den Scheitelkreis des anderen oder nur durch den Mittelpunkt dieses Scheitelkreises bestimmt ist, so ergibt sich:

Satz III[b]. Die Mittelpunkte der Kreise eines Kreisreihenbüschels von der Ordnung m_1, *welche den Scheitelkreis berühren resp. durch seinen Mittelpunkt gehen, liegen auf zwei resp. einer Curve von der Ordnung* $2m_1$.

Treten zwei Curven auf, so degenerirt eine derselben in $2m_1$ Gerade, welche durch den Mittelpunkt des Scheitelkreises gehen. Es folgt dies unmittelbar aus der Raumanschauung.

5. Kehren wir zum Beweise des Satzes I zurück und zwar zu den Curven D und D^*. Diese wollen wir von zwei in der Normalen durch M_1 um r_2 von der Bildebene abstehenden Punkten P_2 und P_2^* aus auf die Bildebene projiciren. Dann erhalten wir zwei Curven C' und C'' von den Ordnungen mn resp. $mn-1$. Diese sind Orte von Aehnlichkeitspunkten zwischen Kreisen (Mr) und dem $P_2 P_2^*$ darstellenden Kreis $(M_1 r_2)$ u. z. in folgender Weise. Die Projection C' der Curve D von P_2 aus (resp. D^* von P_2^*) ist Ort der gleichnamigen Aehnlichkeitspunkte zwischen (Mr) und $(M_1 r_2)$ wie C zwischen (Mr) und $(M_1 r_1)$, d. h. ist ein Punkt von C äusserer oder innerer Aehnlichkeitspunkt zwischen einem Kreise (Mr) und $(M_1 r_1)$, so ist der Punkt in C' ebenfalls äusserer oder innerer Aehnlichkeitspunkt zwischen dem Kreise (Mr) und $(M_1 r_2)$ (s. Fig.).

C'' dagegen — die Projection der Curve D von P_2^* aus (resp. D^* von P_2) — ist der Ort der ungleichnamigen Aehnlichkeitspunkte zwischen (Mr) und $(M_1 \cdot r_2)$ wie C zwischen (Mr) und $(M_1 r_1)$. Wir erweitern daher Satz I dahin:

Satz IV. Bewegt sich der Mittelpunkt eines Kreises (Mr) auf einer Curve L von der Ordnung n und durchläuft ein Aehnlichkeitspunkt — der äussere oder innere — mit einem festen Kreise $(M_1 r_1)$ eine Curve C von der Ordnung m, so liegt je der gleichnamige sowohl wie der ungleichnamige Aehnlichkeitspunkt des Kreises (Mr) mit einem zweiten Kreise $(M_1 r_2)$ auf einer Curve (C', C'') der Ordnung mn resp. $mn-1$, wenn L und C sich in M_1 schneiden.

Unter Benutzung der in 3 gebrauchten Bezeichnung folgt nun:

$$1)\quad \frac{\varrho_C}{\varrho_C - \varrho_L} = \frac{r_1}{r}; \quad \frac{\varrho_C' - \varrho_L}{\varrho_C'} = \frac{r}{r_2} \text{ und}$$

$$\frac{\varrho_L - \varrho_C''}{\varrho_C''} = \frac{r}{r_2}. \quad \text{Also ist:}$$

$$2)\quad \frac{\varrho_C}{\varrho_C - \varrho_L} : \frac{\varrho_C'}{\varrho_C' - \varrho_L} = \frac{M_1 C}{LC} : \frac{M_1 C'}{LC'} = (M_1 L C C') = \frac{r_1}{r_2}$$

$$3)\quad \frac{\varrho_C}{\varrho_C - \varrho_L} : \frac{\varrho_C''}{\varrho_C'' - \varrho_L} = \frac{M_1 C}{LC} : \frac{M_1 C''}{LC''} = (M_1 L C C'') = -\frac{r_1}{r_2}$$

Wir ersehen hieraus, dass je vier Punkte $M_1\, LCC'$ und $M_1\, LCC''$ ein constantes Doppelverhältniss $\varDelta$ bilden. Ist dieses positiv, so sind CC' gleichnamige Aehnlichkeitspunkte zwischen (Mr) und den Kreisen $(M_1\, r_1)$, $(M_1\, r_2)$, Ist $\varDelta$ negativ, so sind CC'' ungleichnamige Aehnlichkeitspunkte. Geben wir $\varDelta$ und drei der vier Punkte $M_1\, LCC'$ resp. $M_1\, LCC''$, so können wir nach obigem einfach den vierten bestimmen.

Wollen wir die Curven C' resp. C'' oder allgemeiner aus zweien der drei Curven LCC' resp. LCC'' die dritte berechnen, so benutzen wir dazu die Relationen:

$$4)\quad \varrho_L \left\{r_1\, \varrho_C' - r_2\, \varrho_C\right\} = \varrho_C \cdot \varrho_C' \left\{r_1 - r_2\right\} \text{ und}$$

$$5)\quad \varrho_L \left\{r_1\, \varrho_C'' + r_2\, \varrho_C\right\} = \varrho_C \cdot \varrho_C'' \left\{r_1 + r_2\right\}$$

Centrische Collineation $n$ter Ordnung in der Ebene.

6. Durch die Curve L in Satz IV wird eine n-deutige Beziehung von Punkten in C und C' resp. C'' oder allgemeiner von Punkten zweier ineinander liegender

ebener Systeme in folgender Weise vermittelt. Jedem Punkte P_1 des einen Systems entsprechen n Punkte $(P_1' \,..\, P_n')$ des anderen, die mit P_1 auf einer Geraden ϱ_1 aus M_1 liegen. Jeden dieser n Punkte können wir als zugeordnet zu je einem Schnittpunkte von ϱ_1 mit L betrachten.

Letzterer bildet mit ihm und $P_1\, M_1$ eine Gruppe von constantem Doppelverhältniss Δ_L und es ist:

$$1)\quad \Delta_L = (M_1\, L\, P\, P') = +\frac{r_1}{r_2} \quad \text{oder} \quad \Delta_L = (M_1\, L\, P\, P'') = -\frac{r_1}{r_2}.$$

Einem Punkte P_1' des gestrichenen Systemes correspondiren auf ϱ_1 durch M_1 n Punkte $(P_1 \,..\, P_n)$ des ungestrichenen, von denen jeder zu P_1' in Bezug auf einen Schnittpunkt von ϱ_1 mit L zugeordnet ist. Je vier Punkte $M_1\, L\, P'\, P$ resp. $M_1\, L\, P''\, P$ bilden ein constantes Doppelverhältniss Δ_L' und es ist:

$$2)\quad \Delta_L' = (M_1\, L\, P'\, P) = \frac{1}{\Delta_L} = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{oder} \quad \Delta_L' = (M_1\, L\, P''\, P) = -\frac{r_2}{r_1}.$$

Gehen wir in Satz IV von C aus, so wird durch diese Curve eine m deutige Beziehung zwischen den Punkten von L und C' resp. C'' oder allgemeiner zwischen den Punkten zweier ineinanderliegender ebener Systeme vermittelt, welche analog der oben angedeuteten. Zwei in Bezug auf einen Punkt von C einander zugeordnete Punkte bilden mit diesem und M_1 constante Doppelverhältnisse Δ_C, Δ_C' und es ist:

$$3)\qquad \Delta_C = (M_1\, C\, L\, C') = (M_1\, C\, P\, P') = 1 - \Delta_L = \frac{r_1 - r_2}{r_2}$$

oder $\Delta_C = (M_1\, C\, L\, C'') = (M_1\, C\, P\, P'') = \dfrac{r_1 + r_2}{r_2}$ endlich:

$$4)\quad \Delta_C' = (M_1\, C\, P'\, P) = \frac{r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{oder} \quad \Delta_C' = (M_1\, C\, P''\, P) = \frac{r_2}{r_1 + r_2}.$$

Analog werden auch durch C' resp. C'' $m$deutige Beziehungen zwischen Punkten L und C resp. von zwei ebenen Systemen geleitet. Allen diesen Beziehungen gemeinsam ist ein centrisches n resp. $m$faches Entsprechen von Punkten zweier vereinigter Ebenen in Bezug auf eine feste Leitcurve $n$ter resp. $m$ter Ordnung. Je ein entsprechendes Punktepaar ist einem Punkte der Leitcurve zugeordnet.

Charakteristisch aber ist für jede dieser Beziehungen das Doppelverhältniss $\varDelta$, welches ein solches Punktepaar mit dem zugeordneten Punkte der Leitcurve und dem Centrum bildet. Wir bezeichnen daher die Beziehung als eine centrische Collineation $n$ter Ordnung mit dem Doppelverhältniss $\varDelta$.

7. Wir geben eine centrische Collineation $n$ter Ordnung durch M_1, eine Leitcurve L der Ordnung n und $\varDelta$. Letzteres können wir auch durch ein Punktepaar bestimmen, welches zu einem Punkte von L zugeordnet ist. Construiren wir sodann zu einem Punkte, je nachdem wir ihn dem einen oder anderen Systeme zuzählen, die entsprechenden P', P^*, so ist:

$$(M_1 L P P') = \varDelta \quad \text{und} \quad (M_1 L P P^*) = \frac{1}{\varDelta} \quad \text{also:}$$

$$(M_1 L P^* P') = \varDelta^2.$$

Nennen wir $P^* P'$ doppelt conjugirte Elemente, so sehen wir, dass dieselben unter sich in einer centrischen Collineation $n$ter Ordnung stehen, welche ebenfalls durch L geleitet wird und die Charakteristik $\varDelta^2$ hat. Sich selbst entsprechende Punkte der Collineation sind M_1, das je mit n correspondirenden zusammenfällt, und die Punkte von L, welche je mit einem entsprechenden sich decken. Es wird also der Curve L ausser ihr noch eine Curve der Ordnung $n\,(n-1)$ correspondiren.

Die zugeordneten zu den unendlich fernen Punkten in Bezug auf die Punkte von L theilen die Strecken $M_1 L$ im Verhältniss $\varDelta$ resp. $\frac{1}{\varDelta}$.

Einer Curve C der Ordnung m correspondiren zwei Curven C'' C^* der Ordnung mn. Es ist dann (s. Fig.):

$$(M_1 L C C') = \varDelta \quad \text{und} \quad (M_1 L C C^*) = \frac{1}{\varDelta}, \quad \text{also}$$

$$(M_1 C L C') = 1 - \varDelta \quad \text{und} \quad (M_1 C L C^*) = 1 - \frac{1}{\varDelta} \quad \text{d. h.}$$

Die Curven mnter Ordnung, welche einer Curve C der $m$ten Ordnung correspondiren, sind auch entsprechende zur Leitcurve in einer Collineation $m$ter Ordnung mit C als Leitcurve. Die Charakteristiken beider Collineationen ergänzen sich zu 1. Wenden wir dies auf die zwei einer Geraden g entsprechenden Curven $n$ter Ordnung an, so folgt, dass diese mit L in einer centrischen Collineation erster Ordnung stehen, für welche g die Axe und deren Charakteristiken $1 - \varDelta$ resp. $1 - \frac{1}{\varDelta}$. Speziell die Curven $n$ter Ordnung $(R^* Q')$, welche der unendlich fernen Geraden der Ebene entsprechen, sind centrisch ähnlich zu L im Verhältniss $1 - \varDelta$ resp. $1 - \frac{1}{\varDelta}$. Es ist daher:

$$\frac{M_1 L}{M_1 Q'} = 1 - \varDelta \, ; \; \frac{M_1 L}{M_1 R^*} = \frac{\varDelta - 1}{\varDelta} \quad \text{also:}$$

$$R^* M_1 + M_1 L = R^* L = M_1 Q' \quad \text{und} \quad R^* M_1 = L Q'.$$

Die einer Geraden g entsprechenden Curven $n$ter Ordnung schneiden L in denselben Punkten wie g und Q' resp. R^* in den Punkten, in welchen eine Parallele zu g durch M_1 diese Curven trifft. Ein weiterer Punkt bestimmt die Curven $n$ter Ordnung. Die Zahl ihrer unendlich fernen Punkte ist gleich der Zahl der Schnittpunkte von g mit R^* resp. Q'.

8. Wir wollen nun im Folgenden die Constructionen behandeln, welche uns mit Hülfe von L und Q' lehren zu den Elementen des ungestrichenen Systems die correspondirenden zu finden.

Seien ϱ_1, ϱ_2 zwei Gerade durch M_1. A_1 auf ϱ_1 und A_2 auf ϱ_2 entsprechen je n Punkte auf ϱ_1 resp. ϱ_2. Indem wir je einen dieser Punkte auf ϱ_1 mit einem auf ϱ_2 verbinden, erhalten wir n^2 Linien. Jede derselben können wir als zugeordnet betrachten zu einer der Sehnen, welche ϱ_1 und ϱ_2 aus L ausschneiden; ebenso können wir sie auch zuordnen je einer der Sehnen, welche ϱ_1 und ϱ_2 aus Q' schneiden. Sind dann $A_1 B_1 C_1 D_1$ vier Punkte auf ϱ_1 von gegebenem Doppelverhältniss, so entsprechen denselben in Bezug auf die n Schnittpunkte von ϱ_1 mit L n Gruppen von vier Punkten, welche alle das gleiche Doppelverhältniss haben. Denn sei $L_1{}^1$ ein Schnittpunkt von ϱ_1 mit L, so ziehen wir durch ihn und M_1 Parallele. Auf letzterer bestimmen wir zwei Punkte G_1, H_1 so, dass $M_1 G_1 : M_1 H_1 = \varDelta$ ist. Auf erstere projiciren wir von G_1 aus die Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1$. Die so erhaltenen Punkte $A_1'' B_1'' C_1'' D_1''$ verbinden wir mit H_1. Diese Verbindungslinien treffen ϱ_1 in vier Punkten $A_1{}^{1\prime} B_1{}^{1\prime} C_1{}^{1\prime} D_1{}^{1\prime}$, welche die entsprechenden zu $A_1 B_1 C_1 D_1$ in Bezug auf $L_1{}^1$ sind. Es ist nun:

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) \overline{\wedge} (A_1'' B_1'' C_1'' D_1'') \overline{\wedge} (A_1{}^{1\prime} B_1{}^{1\prime} C_1{}^{1\prime} D_1{}^{1\prime}).$$

Liegen auf ϱ_1 und ϱ_2 projectivische Reihen (A_1, B_1 ..) und ($A_2 B_2$ ..), so folgern wir, dass jede Gruppe von Punkten, welche einer dieser Reihen in Bezug auf einen

Punkt L entspricht, projectivisch ist zu jeder Gruppe, welche dieser oder der anderen Reihe in Bezug auf ein anderes L correspondirt.

Sind speziell die Reihen $(A_1 B_1 ..)$ und $(A_2 B_2 ..)$ perspectivisch mit S als Centrum, so ist je eine zu $(A_1 B_1 ...)$ in Bezug auf ein L correspondirende Reihe zu einer der Reihe $(A_2 B_2 ...)$ in Bezug auf ein L entsprechenden Reihe perspectivisch. Denn je zwei solcher Reihen sind projectivisch und haben M_1 entsprechend gemein. Wir erhalten so n^2 perspectivische Reihen, deren Perspectivcentra sämmtlich in $M_1 S$ liegen. Wir beweisen letzteres für ein Reihenpaar. Seien die entsprechenden zu $A_1 B_1 ..$ in ϱ_1 und $A_2 B_2 ..$ in ϱ_2 in Bezug auf $L_1{}^1$ und $L_1{}^2$ $A_1{}^{1\prime} B_1{}^{1\prime} ..$ und $A_2{}^{1\prime} B_2{}^{1\prime} ..$, so können wir diese auch als Punkte einer centrischen Collineation erster Ordnung mit M_1 als Centrum und $L_1{}^1 L_2{}^1$ als Axe auffassen. Die Charakteristik ist Δ. In dieser Collineation sind $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ .. und $A_1{}^{1\prime} A_2{}^{1\prime}$, $B_1{}^{1\prime} B_2{}^{1\prime}$ .. entsprechende Gerade und da erstere sich in S schneiden, so müssen auch letztere sich in einem Punkte treffen, der mit S auf einer Geraden aus M_1 liegt.

Sind insbesondere die perspectivischen Centra der Reihen $(A_1 B_1 ..)$ und $(A_2 B_2 ..)$ unendlich ferne, d. h. $A_1 A_2$ parallel $B_1 B_2$ u. s. f., so haben die n^2 Reihen der entsprechenden Punkte ihre Perspectivcentra auf einer Geraden durch M_1 parallel $A_1 A_2$. Zu den parallelen Geraden gehört aber auch die unendlich ferne. Ihren Punkten auf ϱ_1 und ϱ_2 entsprechen $2n$ Punkte auf Q', deren Verbindungslinien nach der oben eingeführten Redeweise zugeordnet den Verbindungslinien der n^2 Punkte erscheinen, welche $A_1 A_2$ correspondiren. Also gehen die letzteren Verbindungslinien respective durch diejenigen Punkte, in welchen eine Parallele durch M_1 zu $A_1 A_2$ die zugeordneten Sehnen von Q' schneidet.

Gehen wir von Elementen des gestrichenen Systems aus und verfolgen wir einen dem obigen analogen Gedankengang, so gelangen wir zu dem Schlusse: Die Verbindungslinien der Punkte, welche $A_1{}' A_2{}'$ auf ϱ_1 und ϱ_2 entsprechen, schneiden sich mit den zugeordneten Sehnen, in denen ϱ_1 und ϱ_2 R^* trifft, in n^2 Punkten einer Parallelen durch M_1 zu $A_1{}' A_2{}'$.

Fassen wir dies mit dem vorhergehenden zusammen, so ergibt sich: Die Verbindungslinien der $2n$ Punkte, welche $A_1 A_2$ $(A_1{}' A_2{}')$ entsprechen, sind parallel den n^2 Verbindungslinien von M_1 mit den Schnittpunkten der Sehnen, welche $\varrho_1 \varrho_2$ aus $R^*(Q')$ ausschneiden. Wir haben daher folgende Construction der correspondirenden Punkte zu $A_1 A_2$ $(A_1{}' A_2{}')$. Wir bestimmen die n^2 Sehnen, welche $\varrho_1 \varrho_2$ aus Q' und R^* schneiden. Diese sind respective einander parallel und als solche wollen wir sie zugeordnet nennen. Die Parallele durch M_1 zu $A_1 A_2$ $(A_1{}' A_2{}')$ trifft die Sehnen von $Q'(R^*)$ in n^2 Punkten. Diese sind eindeutig zugeordnet zu den Punkten, in welchen $A_1 A_2$ $(A_1{}' A_2{}')$ die zugeordneten Sehnen von $R^*(Q')$ schneidet. Letztere Punkte verbinden wir mit M_1 und ziehen zu diesen Verbindungslinien durch jene zugeordneten Punkte die Parallelen. Diese treffen $\varrho_1 \varrho_2$ in den gesuchten Punkten. Wir erhalten so n^2 Linien, von denen je n sich in einem Punkte auf einem ϱ schneiden.

9. Wir benutzen natürlich zur Construction nicht alle n^2 Linien. Sei zu einer Curve C von der Ordnung m die entsprechende zu construiren, so verfahren wir vielmehr wie folgt. Wir ziehen ϱ_1, welches C in A_1, L in $L_1{}^1$ und Q', R^* in den zu $L_1{}^1$ zugeordneten Punkten

$Q_1{}^{1\prime}\, R_1{}^1$ schneide. Ein zweiter Strahl ϱ_2 treffe C in A_2, L in $L_2{}^1 \ldots L_2^n$, R in $R_2{}^1 \ldots R_2^n$ und Q' in $Q_2{}'' \ldots Q_2^{n\prime}$. Nun schneidet $A_1 A_2$ das Büschel aus $R_1{}^1$ nach $R_2{}^1 \ldots R_2^n$ in n' Punkten S. Eine Paralelle $(A_1 A_2)^*$ zu $A_1 A_2$ durch M_1 trifft das Büschel $Q_1{}^{1\prime}$ nach $Q_2{}^{1\prime} \ldots Q_2^{n\prime}$ in n Punkten S' und die Reihe dieser Punkte ist perspectivisch zu der Reihe der S. Denn die Büschel aus $Q_1{}^{1\prime}$ nach $Q_2{}' \ldots Q_2^{n\prime}$ und aus $R_1{}^1$ nach den Punkten $R_1{}^1 \ldots R_2^{n\prime}$ sind perspectivisch, also auch die Reihen, welche $A_1 A_2$ und $(A_1 A_2)^*$ aus diesen Büscheln schneidet. Das Perspectivcentrum der Reihen liegt auf $R_1{}^1 Q_1{}^{1\prime}$ d. h. auf ϱ_1. Durch dasselbe ist jedem Punkte S ein Punkt S' zugeordnet. Verbinden wir die S mit M_1 und ziehen wir durch die zugeordneten S' die Parallelen, so schneiden diese ϱ_2 in n Punkten von C' — die entsprechenden von A_2 — und ϱ_1 in einem Punkte $A_1{}^{1\prime}$, dem correspondirenden zu A_1 in Bezug auf $L_1{}^1$. Halten wir nun ϱ_1, A_1, $R_1{}^1$, $Q_1{}^{1\prime}$ fest und drehen wir ϱ_2 um M_1, so finden wir mit Hülfe der S und S' sämmtliche Punkte der Curve C' u. z. auf Geraden aus $A_1{}^{1\prime}$.

Wir können zeigen, dass die bei obiger Construction auftretenden Punkte S und S' auf zwei Curven $S_1{}^1 S_1{}^{1\prime}$ von der Ordnung $mn-1$ liegen. Dazu bedienen wir uns eines Ueberganges in den Raum. Wir fassen A_1 und $R_1{}^1$ als die Orthogonalprojectionen zweier Kegelspitzen auf, deren Verbindungslinie in M_1 die Bildebene trifft. Die Basiscurven der Kegel sind C und R, also sind die Kegel von der Ordnung n und m. Die Construction der Punkte S nun ist zugleich die Construction der Orthogonalprojection der Durchdringungscurve beider Kegel. Diese Durchdringungscurve ist von der Ordnung mn. Aber zwei Erzeugende der Kegel, welche in A_1 und $R_1{}^1$

die Bildebene treffen, sind orthogonal zu dieser und treffen sich in einem Punkte der Durchdringungscurve. Von ihm aus projiciren wir dieselbe, also ist die Curve $S_1{}^1$ von der Ordnung $mn-1$.

Analog finden wir, dass auch die Curve der S' die Ordnungszahl $mn-1$ hat. Wir denken wieder zwei Kegel der Ordnung n und m mit den Leitcurven C und Q'. Die Orthogonalprojectionen der Spitzen sind A_1 $Q^1{}_1{}'$. In M_1 schneidet ihre Verbindungslinie die Bildebene. Die Orthogonalprojection der Durchdringungscurve ist von der $mn-1$. Ordnung. Verschieben wir den ersten Kegel nach M_1, und zeichnen wir nun die Orthogonalprojection der Durchdringung, so ist diese auch von der $mn-1$. Ordnung und ergibt zugleich die Curve S'.

10. Wir sehen also, dass zu jedem Punkte $A_1{}^{1\prime}$ der Curve $C_1{}^1$ zwei centrisch ähnliche Curven $S_1{}^1$ und $S_1{}^{1\prime}$ der Ordnung $mn-1$ gehören, ähnlich, weil die Sehnen der einen Curve der Reihe nach parallel sind denen der anderen. Auf jeder Geraden durch A_1 (resp. M_1) liegen $n(m-1)$ Punkte der Curve $S_1{}^1$ ($S_1{}^{1\prime}$). Auf jeder Geraden durch $R_1{}^1$($Q_1{}^{1\prime}$) liegen $m(n-1)$ Punkte von $S_1{}^1$ ($S_1{}^{1\prime}$). Da aber $S_1{}^1$ ($S_1{}^{1\prime}$) von der Ordnung $mn-1$, so ist A_1 (M_1) ein $n-1$facher und $R_1{}^1$ ($Q_1{}^{1\prime}$) ein $m-1$facher Punkt der Curve $S_1{}^1$ ($S_1{}^{1\prime}$). Mit Hülfe von $S_1{}^1$ und $S_1{}^{1\prime}$ können wir leicht die $mn-1$ Schnittpunkte einer Geraden g' durch $A_1{}^{1\prime}$ auf C' mit C' bestimmen. Wir suchen die $mn-1$ Punkte S', welche g' aus $S_1{}^{1\prime}$ schneidet. Dann die $mn-1$ Punkte S, in welchen eine Parallele g^* zu g' durch M_1 die Curve $S_1{}^1$ trifft. Durch die S ziehen wir Parallele zu den Verbindungslinien von M_1 mit dem respectiven S'. Diese Parallelen gehen sämmtlich durch A_1 auf ϱ_1 und jede schneidet C noch in $m-1$ Punkten. Verbinden wir

nun $R_1{}^{1}$ mit den Punkten S auf g^* oder $Q_1{}^{1'}$ mit den S' auf g', so erhalten wir $mn-1$ Linien, deren jede R^* resp. Q' in weiteren $n-1$ Punkten schneidet. Wir haben also auf C $(mn-1)(m-1)$ und auf R^* oder Q' $(mn-1)(n-1)$ Punkte. Von diesen Punkten auf C und auf R^* oder Q' suchen wir die $mn-1$ Paare CR resp. CQ' aus, welche auf einer Geraden aus M_1 liegen. Diese Geraden schneiden g' in den gesuchten Punkten. Denn ein solches Punktepaar CR gehört in der Weise zusammen, dass der entsprechende zum Punkte auf C in Bezug auf den Punkt R ein Punkt auf C' und g' ist.

Soll g' durch $A_1{}^{1'}$ Tangente an C' sein, so sind zwei der Schnittpunkte von g' mit C' unendlich benachbart. Es wird dies nur dann stattfinden, wenn g' auch Tangente an S' ist. Wir erfahren hieraus, dass die Tangenten an C' aus einem seiner Punkte zugleich Tangenten an die Curve S' sind, welche diesem Punkte zugeordnet ist. Es wird also die Classe der Curve C' mindestens um zwei höher sein als die der Curven S'.

Construiren wir zu zwei Punkten der Curve C' die zugehörigen Curven S', so können wir jeden Punkt der einen Curve S' eindeutig einem Punkte der anderen zuordnen. Dann erscheint C' als der Ort der Schnittpunkte von Strahlen aus jenen Punkten auf C' nach correspondirenden Punkten von S'.

Soll zu einer Curve C' von der Ordnung m die entsprechende C der Ordnung $mn-1$ bestimmt werden, so verfahren wir wie oben und finden, dass zu jedem Punkte A auf C zwei Curven S von der Ordnung $mn-1$ gehören.

11. Schliesslich wollen wir einige *specielle centrische Collineationen* $n$ter Ordnung hervorheben. Setzen wir

in 6 $r_1 = r_2$, so ist $\varDelta = +1$ und in der durch L vermittelten centrischen Collineation decken sich die ebenen Systeme.

Ist dagegen $r_1 = -r_2$, so wird $\varDelta = -1$ und $\frac{1}{\varDelta} = -1$. Also entspricht einem Punkte, ob wir ihn zum gestrichenen oder ungestrichenen Systeme rechnen, der nämliche Punkt im anderen Systeme und wir haben centrische Involution $n$ter Ordnung; die zwei der unendlich fernen Geraden entsprechenden Curven Q' und R^* fallen in eine Curve zusammen, welche zu L im Verhältniss 2 ähnlich ist. Die Raumanschauung für diesen Fall gibt uns unmittelbar Satz I. Die correspondirenden Punkte sind stets die zwei Aehnlichkeitspunkte eines Kreises aus M_1 mit einem Kreise, dessen Mittelpunkt auf L liegt.

Die gleiche Raumanschauung gibt uns aber auch eine centrische Collineation $m$ter Ordnung von C geleitet mit den Charakteristiken $\varDelta = 2$ und $\varDelta = \frac{1}{2}$. Es ist $r_1 = -r_2$ und die entsprechenden Elemente sind je ein Aehnlichkeitspunkt und der Mittelpunkt eines Kreises.

Sei M_1 unendlich ferne und $\varDelta = \frac{r_1}{r_2}$, so ist $\varDelta = (M_1 LCC')$ oder $\varDelta = \frac{LC'}{LC}$. Ist dabei $r_1 = r_2$, so decken sich die Systeme. Ist $r_1 = -r_2$ also $\varDelta = -1$, so sind die Ebenen in einer Symmetrie $n$ter Ordnung zu L mit der Richtung von M_1.

Ist ein Theil der Leitcurve von der Ordnung m, so zerfällt die Collineation $n$ter Ordnung in eine solche der $m$ten und m—$n$ten Ordnung.

Geht L durch M_1, so liegt je ein entsprechender zu jedem Punkte der Ebene in M_1 und es correspondiren also ausser M_1 jedem Punkte nur noch $n-1$ Punkte. Die entsprechenden zu Geraden, Curven $m$ter Ordnung sind Curven $n$ter resp. mnter Ordnung, welche durch M_1 gehen. Curven $m$ter Ordnung durch M_1 haben zu correspondirenden Curven der Ordnung $mn-1$ durch diesen Punkt.

Wir wollen nun im Folgenden die centrische Involution zweiter Ordnung untersuchen und zeigen, wie uns dieselbe zur Ableitung von Curven zweiter und vierter Ordnung dient, resp. in einem Specialfalle auch zur Ableitung von Curven dritter Ordnung.

Centrische Involution zweiter Ordnung.

12. Die Leitcurve L sei ein Kegelschnitt. Jedem Punkte — zum einen oder anderen Systeme gerechnet — entsprechen die nämlichen zwei Punkte, welche mit ihm auf einer Geraden aus M_1 liegen. Jeder derselben bildet mit ihm, dem zugeordneten auf L und M_1 eine harmonische Gruppe. Einer Geraden g correspondirt ein Kegelschnitt G'. Derselbe steht mit L in einer centrischen Collineation erster Ordnung mit der Charakteristik $\varDelta = 2$. M_1 ist Centrum, g Axe der Collineation. Der unendlich fernen Geraden correspondirt ein Kegelschnitt Q', der zu L centrisch ähnlich mit M_1 als Centrum und im Verhältniss $\varDelta = 2$ ist.

Wir construiren zu zwei Punkten $A_1 A_2$ die entsprechenden auf $\varrho_1 \varrho_2$, indem wir die vier Sehnen bestimmen, welche ϱ_1 und ϱ_2 aus Q' schneiden. $A_1 A_2$ trifft diese Sehnen in vier Punkten 1, 2, 3, 4 und eine

Parallele durch M_1 zu $A_1 A_2$ schneidet sie in weiteren vier Punkten 1'2'3'4'. Durch letztere ziehen wir die respectiven Parallelen zu $M_1 1$, $M_1 2$, $M_1 3$, $M_1 4$ und erhalten vier Gerade, welche sich viermal zu zweien in den Punkten $A_1{}^{1'}$, $A_1{}^{2'}$ auf ϱ_1 und $A_2{}^{1'}$, $A_2{}^{2'}$ auf ϱ_2 schneiden.

Construiren wir so den *Kegelschnitt* G', der einer *Geraden* g entspricht, so sehen wir, dass dieser zu Q' collinear erster Ordnung ist mit M_1 als Centrum und der Parallelen g^* durch M_1 zu g als Axe. g ist die eine Gegenaxe dieser Collineation und das Δ derselben ist $+1$. Die Asymptoten von G' sind parallel den Strahlen von M_1 nach den Schnittpunkten von Q' und g. Tangenten von Punkten auf g aus an Q' correspondiren parallele Tangenten an G'. Daraus ergibt sich die Construction von Mittelpunkt und Axen von G'.

Fragen wir nach den bei Bestimmung von G' auftretenden Curven S und S', so sind dies Gerade und zwar liegen sämmtliche S in g und die S' in g^*. Schneide eine Gerade ϱ_1 aus M_1 Q' in $Q_1{}^{1'}$. Ein Büschel aus $Q_1{}^{1'}$ nach den Punkten von Q' trifft dann g und g^* in zugeordneten Punkten eines Curvenpaares SS'. Verbinden wir die Punkte S mit M_1 und ziehen wir durch die resp. S' Parallele zu diesen Verbindungslinien, so erhalten wir ein Büschel (1), dessen Scheitel der Punkt $A_1{}^{1'}$ auf ϱ_1 ist. Construiren wir ein zweites Büschel (2) aus M_1 nach den Punkten von Q', so sind jedem Strahle dieses Büschels zwei Strahlen des Büschels aus $A_1{}^{1'}$ zugeordnet. Beide Büschel haben den Strahl $M_1 A_1{}^{1'}$ gemein. Ueberdies entspricht diesem als Strahl von (2) noch ein weiterer Strahl. Wir erhalten denselben, wenn wir die Tangente in $Q_1{}^{1'}$ mit g^* schneiden und diesen

Punkt mit $A_1{}^{1'}$ verbinden. Der Strahl ist dann zugleich Tangente in $A_1{}^{1'}$ an G'. Zweimal fällt das einem Strahle aus $A_1{}^{1'}$ entsprechende Strahlenpaar zusammen und zwar in den Tangenten aus M_1 an Q'. Bringen wir nun die entsprechenden Strahlen der Büschel (1) und (2) zum Schnitte, so ist der Ort der Schnittpunkte ein Kegelschnitt, welcher durch $A_1{}^{1'}$ geht.

13. Daraus leiten wir folgende Erzeugung eines Kegelschnittes aus zwei einander einzweideutig entsprechenden Büscheln ab. Sei ein Kegelschnitt — am einfachsten ein Kreis — gegeben und bilden wir aus einem seiner Punkte und einem beliebigen Punkte zwei Büschel (1) und (2) nach den Punkten des Kegelschnittes, so entsprechen sich die Strahlen dieses Büschels einzweideutig. Schneiden wir das erste Büschel mit einem beliebigen Strahle g^* des zweiten und projiciren die so erhaltene Reihe aus einem beliebigen Punkte (3) der Verbindungslinie beider Scheitel (1) und (2). Dann ist Büschel (3) einzweideutig dem Büschel (1), beide Büschel haben den Scheitelstrahl entsprechend gemein. Sie erzeugen einen Kegelschnitt, der durch (3) geht und zum gegebenen Kegelschnitt mit (1) als Centrum und g^* als Axe in einer centrischen Collineation $\Delta = 1$ steht. Kehren wir wieder zu den Curven S und S' auf g und g^* zurück. Indem wir zwei Curven S' construiren, welche zu $A_1{}^{1'}$ und $A_2{}^{1'}$ gehören, erhalten wir auf g^* die Punkte dieser S einander eindeutig entsprechend. Es sind dies nämlich die Schnitte der Büschel aus $Q_1{}^{1'}$ und $Q_2{}^{1'}$ nach den Punkten von Q' mit g^*. Die Büschel über diesen Reihen aus $A_1{}^{1'}$ resp. $A_2{}^{1'}$ sind also auch eindeutig entsprechende und erzeugen G'.

Noch bleibt uns übrig, die Gleichung des Kegelschnittes G' aufzustellen und wir wollen dabei L als Kreis geben. Sei f der Abstand des Mittelpunktes M von L von M_1, r der Radius von L, so ist die Polargleichung desselben in Bezug auf M_1 als Pol und M_1M als Axe:

$$1)\quad \varrho^2 - 2\varrho f \cos\varphi + f^2 - r^2 = 0.$$

g wollen wir geben durch:

$$2)\quad r_g = \frac{ab}{a\sin\varphi + b\cos\varphi}.$$

Ist dann ϱ der Radius vector eines Punktes von L und ϱ' der eines Punktes von G', so ist nach 5:

$$3)\quad \varrho(r_g + \varrho') = 2r_g \,.\, \varrho'.$$

Daraus ergibt sich als Gleichung von g':

$$4)\quad \varrho'^2\left\{4r_g^2 - 4f.r_g.\cos\varphi + f^2 - r^2\right\} - 2\varrho'\left\{2r_g^2 f\cos\varphi - (f^2 - r^2)r_g\right\} + (f^2 - r^2)r_g^2 = 0.$$

G' wird Ellipse sein, wenn g Q' nicht schneidet. Sei d der Abstand der Geraden g von M_1 und d' der Abstand einer Parallelen durch den Mittelpunkt von Q' zu g, so ist:

$d = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $d' = \frac{fb}{2\sqrt{a^2+b^2}}$; so lange nun

$d > d' + \frac{r}{2}$ und $d < d' - \frac{r}{2}$ wird g Q' nicht treffen.

Dann ist $+r$ kleiner und $-r$ grösser als $\frac{fb - 2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Schneidet oder berührt g Q', so ist g' Hyperbel oder Parabel und die Bedingungen hiefür ergeben sich wie oben.

Ist L ein Kreis mit dem Mittelpunkt M_1, so geben wir g durch seinen Abstand d von M_1 und es ist dann die Gleichung von G', da $r_g = \frac{d}{\cos\varphi}$:

$$5)\quad \varrho'^2\left\{4d^2 - r^2\cos^2\varphi\right\} - 2r^2\varrho d\cos\varphi - r^2d^2 = 0.$$

G' ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel je nachdem $d > =$ oder $< \frac{r}{2}$ ist. M_1 ist Brennpunkt und die symmetrische Linie g' zu g in Bezug auf M_1 ist Directrix von G'. Denn sei der Abstand eines Punktes P' auf G' von q' d_q', so ist: $\frac{r_g'}{\varrho'} = \frac{d}{d_q' - d}$ und weil allgemein: $r_g'(r - 2\varrho') = -r\varrho'$, so folgt: $\frac{\varrho'}{d_q'} = \frac{r}{2d}$ gleich einer Constanten.

14. Die Punkte der Leitcurve L entsprechen sich selbst und ausserdem correspondirt L noch ein Kegelschnitt $L^{*\prime}$, der den Kegelschnitt L in den Berührungspunkten der Tangenten aus M_1 an L berührt. Mit dieser Linie als Axe und M_1 als Centrum steht er zu L in einer centrischen Collineation erster Ordnung. Wir wollen nun die *Curve* untersuchen, *welche einem Kreise* um M_1 mit dem Radius r_1 *entspricht*. Für dieselbe folgern wir aus I^a den

Satz. Der Ort der Aehnlichkeitspunkte aller Kreise, deren Mittelpunkte auf einem Kegelschnitte L liegen und welche einen Kreis $M_1 r_1$ berühren, mit diesem Kreise ist eine Curve vierter Ordnung ($C^{4\prime}$).

Diese Curve kann vier, zwei oder keine Asymptoten haben nach der Anzahl der Schnittpunkte des Kreises $M_1 r_1$ mit der Curve Q' unserer Involution. Je zwei der Asymptoten können in einen parabolischen Ast zusammenfallen. Es geschieht so oft als Q' den Kreis $M_1 r_1$ berührt. Es sind also zwei oder ein parabolischer Ast möglich.

Eine Gerade ϱ_1 aus M_1 treffe $(M_1 r_1)$ in $A_1{}^1$ und $A_1{}^2$, L in $L_1{}^{\mathrm{I}}$, $L_1{}^{\mathrm{II}}$ und Q' in $Q_1{}^{\mathrm{I}\prime} Q_1{}^{\mathrm{II}\prime}$. Dann entsprechen dem Punkte $A_1{}^1$ in Bezug auf $L_1{}^{\mathrm{I}}$, $L_1{}^{\mathrm{II}}$ zwei Punkte

$A_1{}^{1\mathrm{I}'}$, $A_1{}^{1\mathrm{II}'}$ und $A_1{}^2$ entsprechen $A_1{}^{2\mathrm{I}'}$ und $A_1{}^{2\mathrm{II}'}$. Da M_1 in der Mitte von $A_1{}^1$ und $A_1{}^2$ liegt, also der unendlich ferne Punkt und M_1 mit $A_1{}^1 A_1{}^2$ eine harmonische Gruppe bilden, so thun dies gleichfalls die in Bezug auf die Punkte L zugeordneten Gruppen. Also muss $(Q_1{}^{\mathrm{I}'} M_1\, A_1{}^{1\mathrm{I}'} A_1{}^{2\mathrm{I}'}) = -1$ sein und ebenso $(Q_1{}^{\mathrm{II}'} M_1\, A_1{}^{1\mathrm{II}'} A_1{}^{2\mathrm{II}'}) = -1$, d. h. die Punkte von $C^{4\prime}$ sind einander harmonisch zugeordnet in Bezug auf M_1 und die Punkte von Q'. $C^{4\prime}$ ist mit sich selbst in centrischer Involution mit M_1 als Centrum und Q' als Leitcurve. Natürlich muss in dieser Involution der Curve $C^{4\prime}$ noch eine zweite Curve vierter Ordnung entsprechen $(C^{4*\prime})$. Diese berührt $C^{4\prime}$ in den vier Punkten, welche auf den Tangenten aus M_1 an Q' liegen.

Liegen auf ϱ_2 bei analoger Bezeichnung wie oben die Punkte $A_2{}^1$, $A_2{}^2$, $L_2{}^{\mathrm{I}}$, $L_2{}^{\mathrm{II}}$, $Q_2{}^{\mathrm{I}'}$, $Q_2{}^{\mathrm{II}'}$ und $A_2{}^{1\mathrm{I}'}$, $A_2{}^{2\mathrm{I}'}$, $A_2{}^{1\mathrm{II}'}$, $A_2{}^{2\mathrm{II}'}$, so sind die Sehnen $A_1{}^1 A_2{}^1$ und $A_1{}^2 A_2{}^2$ zu einander parallel. Daraus folgt, dass die ihnen in Bezug auf $Q_1{}^{\mathrm{I}'} Q_2{}^{\mathrm{I}'}$ zugeordneten Sehnen sich mit letzteren in einer Geraden $(A_1{}^1 A_2{}^1)^*$ durch M_1 parallel $A_1{}^1 A_2{}^1$ schneiden. Zugleich bilden diese Sehnen mit der zugeordneten in Q' und $(A_1{}^1 A_2{}^1)^*$ ein harmonisches Büschel. In $(A_1{}^1 A_2{}^1)^*$ liegen aber auch die Schnittpunkte der Sehnen $Q_1{}^{\mathrm{II}'} Q_2{}^{\mathrm{II}'}$ und ihrer zugeordneten $A_1{}^{1\mathrm{II}'} A_2{}^{1\mathrm{II}'}$, $A_1{}^{2\mathrm{II}'} A_2{}^{2\mathrm{II}'}$, ferner der Schnittpunkt von $Q_1{}^{\mathrm{II}'}$, $Q_2{}^{\mathrm{II}'}$ mit $A_1{}^{1\mathrm{I}'} A_2{}^{1\mathrm{II}'}$, $A_1{}^{2\mathrm{I}'} A_2{}^{2\mathrm{II}'}$. Ein vierter Schnittpunkt ist der von $Q_1{}^{\mathrm{II}'} Q_2{}^{\mathrm{I}'}$ mit $A_1{}^{1\mathrm{II}'} A_2{}^{1\mathrm{I}'}$ und $A_1{}^{2\mathrm{II}'} A_2{}^{2\mathrm{I}'}$. Da aber $A_1{}^1 A_2{}^2$ parallel zu $A_2{}^1 A_1{}^2$ ist, so folgt, dass die vier Paare von Sehnen, welche diesen Linien in Bezug auf die vier Sehnen zugeordnet sind, die $\varrho_1\, \varrho_2$ aus Q' schneiden, sich mit diesen respective in vier Punkten einer Geraden $(A^1 A_2{}^2)^*$ durch M_1

parallel $A_1{}^1 A_2{}^2$ treffen. Wie oben haben wir auch hier in jedem dieser Punkte auf $(A_1{}^1 A_2{}^{2*})$ den Scheitel eines harmonischen Büschels. Bemerken wir noch, dass die Linien $(A_1{}^1 A_2{}^1)^*$ und $(A_1{}^1 A_2{}^2)^*$ die Winkel $\varrho_1\,\varrho_2$ halbiren, so ergibt sich:

Die 16 Sehnen der acht Punkte von $C^{4\prime}$ auf zwei Radii vectoren schneiden sich achtmal zu zweien in denjenigen Punkten, in welchen die Halbirungslinien der Winkel der Radii vectoren das Sehnenviereck treffen, welche diese aus dem Kegelschnitt Q' schneiden. In jedem dieser Punkte bilden die zwei Sehnen mit der zugeordneten Sehne von Q' und der Linie nach M_1 eine harmonische Gruppe.

Geben wir einen Kegelschnitt Q' und M_1, so können wir stets zwei Curven $C^{4\prime}$ zeichnen, welche durch einen gegebenen Punkt A' gehen. Wir schneiden mit $M_1 A'$ oder $\varrho_1 Q'$ und je nachdem wir A' dem einen oder anderen dieser Schnittpunkte mit Q' zuordnen, erhalten wir zwei verschiedene Curven $C^{4\prime}$.

15. Bestimmen wir die einem Punkte $A_1{}^{1\prime}$ entsprechenden Curven S^{I} und $S^{\mathrm{I}\prime}$, so sind diese nach 10 von der dritten Ordnung. Sie liegen zu einander centrisch ähnlich mit $Q_1{}^{\mathrm{I}\prime}$ als Aehnlichkeitspunkt. S^{I} geht durch $A_1{}^1$, $S^{\mathrm{I}\prime}$ durch M_1. Beide berühren sich und Q' in dem Punkte $Q_1{}^{\mathrm{I}\prime}$.

Je zwei Punkte von $S^{\mathrm{I}\prime}$ auf einem Strahle aus $Q_1{}^{\mathrm{I}\prime}$ bilden mit diesem und dem zweiten Schnittpunkte des Strahles und Q' eine harmonische Gruppe, da in dem Büschel über ihr aus M_1 zwei Strahlen den Winkel der beiden anderen halbiren. Wir folgern aus dieser harmonischen Gruppirung, dass $S^{\mathrm{I}\prime}$ zu sich selbst centrisch involutorisch liegt in einer Involution zweiter Ordnung mit $Q_1^{\mathrm{I}\prime}$ als Centrum und Q' als Leitcurve.

Je zwei Punkte von S^{I} auf einer Geraden durch $Q_1^{\mathrm{I}\prime}$ erscheinen von $A_1{}^1$ aus unter rechtem Winkel.

Wir entnehmen aus diesen Bemerkungen, dass weder $S^{\mathrm{I}\prime}$ noch S' Doppelpunkte haben können.

Wir erhalten die Zahl und Richtung der unendlich fernen Punkte von $S^{\mathrm{I}\prime}$ — mithin auch von S^{I} — indem wir aus M_1 einen Kreis beschreiben, der durch $Q_1^{\mathrm{I}\prime}$ geht. Seine Schnittpunkte mit Q' ergeben die Anzahl der unendlich fernen Punkte, die Verbindungslinien der Schnittpunkte mit $Q_1^{\mathrm{I}\prime}$ die Richtung. Es folgt dies unmittelbar aus der Raumanschauung, welche uns in 10 auf die Curve $S^{\mathrm{I}\prime}$ führte. Also haben die Curven S drei oder eine Asymptote. Im ersteren Falle können zwei Asymptoten in einen parabolischen Ast zusammenfallen.

Bestimmen wir die Curve S', welche dem Punkte $A_1{}^{1\mathrm{I}\prime}$ und die, welche $A_1{}^{2\mathrm{I}\prime}$ zugeordnet sind, so ergibt die Construction nur *eine* Curve dritter Ordnung. Also folgt, dass zu zwei einem Punkte Q' zugeordneten Punkten von $C^{4\prime}$ nur *eine* Curve S' gehört und wir sagen daher, dass jedem Punkte von Q' ein S' correspondirt. Die beiden S dagegen liegen so, dass je ein Punkt von $S_1^{\mathrm{I}\prime}$ auf einer Geraden durch $Q_1^{\mathrm{I}\prime}$ in der Mitte von zwei Punkten S_1^{I} und S_1^{II} sich befindet.

Aus dem Zusammenfallen der zwei zu $A_1{}^{1\mathrm{I}\prime}$ und $A_1{}^{2\mathrm{I}\prime}$ gehörenden Curven S' ergibt sich: Projiciren wir die $C^{4\prime}$ aus zweien ihrer sich entsprechenden Punkte der Involution $(M_1 Q')$, so schneiden sich die Strahlen nach entsprechenden Punkten dieser Involution in Punkten einer Curve dritter Ordnung.

16. Geben wir einen Kegelschnitt Q' und einen Punkt M_1, so leiten wir nach obigem folgende *Erzeugungsweise einer Curve $S^{3\prime}$ und $C^{4\prime}$* ab.

Wir bilden aus einem beliebigen Punkte von Q' und aus M_1 zwei Büschel (1) und (2) über den Punkten des Kegelschnittes. Diese Büschel sind einzweideutig mit sich entsprechendem Scheitelstrahle wie die Büschel (1) (2) in 13. Zu dem Büschel aus M_1 construiren wir ein neues (3) concentrisches, indem wir die Halbirungslinien je eines Winkels eines Strahles mit dem Strahle $M_1\,Q_1{}'$ ziehen. Dann gehören zu jedem Strahle des Büschels (2) im Büschel (3) zwei Strahlen. Der Strahl $M_1\,Q_1$ correspondirt sich selbst und zweitens entspricht ihm im Büschel (3) der Normalstrahl zu $M_1\,Q'$.

Es entsprechen also jedem Strahle des Büschels (2) im Büschel (1) und (3) zwei Strahlen. Indem wir nun die letzteren Büschel vermittelst des Büschels (2) einander zuordnen, erhalten wir als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Curve dritter Ordnung ($S_3{}'$ . .), welche durch $Q_1{}'$ und M_1 geht.

Bilden wir über diesem Orte aus einem beliebigen Punkte A' auf $M_1\,Q_1{}'$ ein weiteres Büschel (4), so ist dies zum Büschel (2) einvierdeutig, d. h. jedem Strahle des Büschels (2) entsprechen vier Strahlen von (4).

Den Tangenten aus M_1 an Q' correspondiren zwei Paare zusammenfallender Strahlen aus A'. Der Strahl $A'\,Q_1{}'$ entspricht sich selbst und überdies correspondirt ihm ein Strahl aus A' nach dem Schnittpunkte der Tangente in $Q_1{}'$ mit dem Normalstrahle zu $M_1\,Q_1{}'$ in M_1.

Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen der Büschel (4) und (2) ist eine Curve vierter Ordnung ($C^{4\prime}$).

Wir erwähnen einige *Specialfälle dieser Erzeugungsart.* Liegt M_1 unendlich ferne in gegebener Richtung und ziehen wir in derselben eine Gerade ϱ_1, welche Q' in Q_1' schneidet, so ergibt sich sofort, dass die zu Q_1' gehörende Curve S_1' aus der unendlich fernen Geraden und einem zu Q' im Verhältniss $\frac{1}{2}$ centrisch ähnlichen Kegelschnitt besteht mit dem Aehnlichkeitspunkte Q_1'.

Nehmen wir nun auf ϱ_1 einen beliebigen Punkt A' an und construiren wir die Curve $C^{4\prime}$, welche durch ihn geht, so zerfällt dieselbe in zwei Kegelschnitte, welche Parallelcurven von Q' sind im Abstande $Q_1' A'$. Denn schneidet eine Gerade durch $Q_1' Q'$ in Q_2', so liegen auf ihr zwei Punkte von S und zwar der eine in der Mitte von $Q_1' Q_2'$, der andere unendlich ferne. Projiciren wir diese von A' aus auf eine Parallele ϱ_2 zu ϱ_1 durch Q_2', so erhalten wir auf ϱ_2 zwei Punkte von $C^{4\prime}$ im Abstande $\pm Q_1' A'$ von Q_2. Auf gleiche Weise liegen in jeder Geraden ϱ durch einen Punkt Q' zwei Punkte von $C^{4\prime}$. Also hat sie die oben erwähnte Form.

Ist Q' Parabel oder Hyperbel, so können wir Q_1' unendlich ferne annehmen in der Richtung der Axe resp. einer Asymptote. Dann werden alle Sehnen der Curve S', welche parallel der Axe resp. der betreffenden Asymptote von Q' durch letzteren Kegelschnitt halbirt. Ist Q' Parabel, so hat S' einen parabolischen Ast. Ist Q' Hyperbel, so berührt S' den Kegelschnitt Q' in der Asymptote, auf welcher Q_1' liegt.

17. Die *Tangenten* in den Punkten $A_1{}^1 A_1{}^2$ auf ϱ_1 an den Kreis $(M_1 r_1)$ sind parallel und normal zu ϱ_1. Daher werden sich die Tangenten in den einem Punkte $Q_1{}^{I\prime}$ zugeordneten Punkten der $C^{4\prime}$ mit der Tangente in $Q_1{}^{I\prime}$ an Q' und mit einer Normalen aus M_1 zu ϱ_1 schnei-

den. Zugleich bilden sie mit diesen Linien ein harmonisches Büschel über der Gruppe $M_1\ Q_1{}^{1\prime} A_1{}^{11\prime} A_1{}^{21\prime}$.

Indem wir alle diese Schnittpunkte bestimmen, erhalten wir eine *Curve* T als den Ort der Schnittpunkte von Tangenten an Q' mit den Normalen aus M_1 zu den Verbindungslinien von M_1 und den respectiven Berührungspunkten der Tangenten. M_1 ist ein Doppelpunkt dieser Curve, wie die Construction zeigt. Auf jeder Geraden ϱ_1 durch M_1 liegen zwei Punkte der Curve. Wir erhalten dieselben, indem wir in M_1 die Normale n_1 zu ϱ_1 ziehen und damit Q' schneiden. Die Tangenten an Q' in den beiden Schnittpunkten treffen ϱ_1 in zwei Punkten von T.

Die Curve T ist also von der vierten Ordnung und wir fragen nach den weiteren Doppelpunkten. Sei m_1 die Polare von M_1 im Kegelschnitte Q' und auf ihr die Involution harmonischer Pole $x\,x_1, y\,y_1 \ldots$ bestimmt. Ziehen wir von x die Tangenten an Q', so geht die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte von M_1 nach x_1 und eine Normale zu ihr durch M_1 trifft die Tangenten in zwei Punkten der Curve T.

Diese Punkte können nur dann zusammenfallen, wenn jene Normale durch x geht und $M_1\,x$, $M_1\,x_1$ also ein Rechtwinkelpaar der Involution harmonischer Polaren um M_1 in Bezug auf Q' ist.

Construiren wir daher auf bekannte Weise dieses Rechtwinkelpaar (m_2, m_3), so schneidet es die Polare m_1 in zwei weiteren Doppelpunkten (M_3, M_2) der Curve T^4. $M_1\ M_2\ M_3$ sind stets reell und zwei der Punkte liegen ausserhalb des Kegelschnittes Q'. Von ihnen gehen reelle Tangenten an Q' uud sie liegen auf dem reellen Theile der Curve T^4. Der dritte Punkt M befindet sich innerhalb Q' und ist ein singulärer Punkt von T^4.

Zwei Punkte T auf einem Strahle ϱ_1 bilden mit M_1 und dem Schnittpunkte $M_1{}^*$ von ϱ_1 und m_1 eine harmonische Gruppe. Ziehen wir nämlich in M_1 die Normale n_1 zu ϱ_1 und in ihren Schnittpunkten mit Q' die Tangenten, so treffen diese sich auf m_1 und bilden mit m_1 und dem Strahle nach M_1 ein harmonisches Büschel. Sein Schnitt mit ϱ_1 ist die oben erwähnte harmonische Gruppe. T^4 ist zu sich selbst centrisch involutorisch mit M_1 als Centrum und m_1 als Axe.

Bestimmen wir zu ϱ_1 den vierten harmonischen ϱ_2 in Bezug auf m_2 und m_3 und auf ϱ_2 die zwei Punkte T, so liegen diese mit den Punkten T in ϱ_1 auf Geraden durch M_2 resp. M_3. Um dies zu zeigen, construiren wir in M_1 die Normalen n_1, n_2 zu ϱ_1 ϱ_2. Da nun $(\varrho_1\ \varrho_2\ m_2\ m_3) = -1$, so folgt, dass auch $(n_1\ n_2\ m_3\ m_2) = -1$ ist. Es werden also die Verbindungslinien der Schnittpunkte von $n_1\ n_2$ mit Q' durch M_2 resp. M_3 gehen. Folglich schneiden sich die Tangenten in diesen Punkten auf Q' paarweise in m_2 resp. m_3, sind also Linien einer centrischen Involution erster Ordnung $(M_2\, m_2)$ resp. $(M_3\, m_3)$, welche sich entsprechen.

In diesen Involutionen sind aber auch ϱ_1 und ϱ_2 einander zugeordnet. Also müssen die Schnittpunkte derselben mit den Tangenten d. h. die vier Punkte T auf Geraden aus M_2 resp. M_3 gelegen sein.

Wir folgern hieraus, dass zwei Punkte T auf einer Geraden aus M_2 resp. M_3 mit diesen Punkten und $M_2{}^*$ resp. $M_3{}^*$ — den Schnittpunkten der Strahlen mit m_2 resp. m_3 — eine harmonische Gruppe bilden. Also ist T^4 zu sich selbst involutorisch in den centrischen Involutionen $(M_1\, m_1)$ $(M_2\, m_2)$ und $(M_3\, m_3)$. Bestimmen wir in diesen Involutionen die resp. Gegenaxen, welche die

Abstände $M_1 m_1$, $M_2 m_2$ und $M_3 m_3$ halbiren, so geben uns die Richtungen von M_1 resp. M_2, M_3 nach den Schnittpunkten dieser Gegenaxen mit T^4 die unendlich fernen Punkte von T^4.

18. Indem wir uns wieder den *Curven* S' zuwenden, von denen je eine einem Punkte auf Q' zugeordnet ist, zeigen wir, dass alle diese Curven wie durch M_1 so auch durch M_2 und M_3 gehen. Sei S_1' die zu Q_1' gehörende Curve und treffe $Q_1' M_2$ den Kegelschnitt Q' in Q_2' und m_2 in M_2^*, so ist $(Q_1' Q_2' M_2^* M_2) = -1$. Das Büschel über dieser Gruppe ist daher ein harmonisches und weil in demselben m_2 auf m_3 normal steht, so müssen die Strahlen aus M_1 nach M_2^* und M_2 die Winkel der Strahlen nach $Q_1' Q_2'$ halbiren. Mithin ist M_2^* — und worauf es hier ankommt — M_2 ein Punkt auf S_1'. Analog beweisen wir, dass auch M_3 auf S_1' liegt.

Anknüpfend an die Raumvorstellung, welche uns die Ordnung der Curven S' gaben, erhalten wir auch die Tangenten dieser Curven. Seien S_2' $S_2^{*\prime}$ zwei Curvenpunkte auf einer Geraden $Q_1' Q_2'$, so construiren wir die Tangente in Q_2' und schneiden sie mit einer Normalen in M_1 zu $M_1 Q_2'$. Von diesem Schnittpunkte aus gehen die Tangenten an $S_2' S_2^{*\prime}$. Es ist dies die Tangentenconstruction an die Orthogonalprojection der Durchdringungscurve zweier Kegel. Die so bestimmten zwei Tangenten bilden mit der Tangente in Q_2' und dem Strahle nach Q_1 eine harmonische Gruppe.

Der Scheitel derselben — der oben construirte Schnittpunkt der Tangente in Q_2' und der Normalen in M_1 zu $M_1 Q_2'$ — ist ein Punkt der Curve T^4. Wollen wir umgekehrt aus einem Punkte T von T^4 die Tangenten an S_1' construiren, so bestimmen wir die Tangente von T

an Q', welche zwischen T und dem Berührungspunkte Q_2' von M_1 aus unter rechtem Winkel erscheint. Auf $Q_2' Q_1'$ liegen die Berührungspunkte der gesuchten Tangenten, deren also stets zwei sind.

Auf diese Weise erhalten wir sämmtliche Tangenten an die S' und da stets ein Paar mit einer Tangente an Q' und dem Strahle nach Q_1' ein harmonisches Büschel bilden, so können dabei keine Doppeltangenten auftreten. Oben sahen wir, dass die Curven S' auch keine Doppelpunkte haben. Wir ergänzen daher nach den Plücker'schen Gleichungen die Charakteristiken der S' — mithin auch der S. Sie sind von der sechsten Classe, haben 9 Inflexionstangenten, von welchen 3 reell sein können. Schliesslich erwähnen wir noch, dass die Punkte M_2, M_3 für die Curven S' eine analoge Bedeutung haben wie M_1. Verbinden wir nämlich Q_1' mit zwei Punkten auf Q', die in einer Geraden ϱ_1^* aus M_1 liegen und bestimmen wir auf diesen Verbindungslinien die Punkte $S_2 S_2^{*\prime}$ und $S_3 S_3^{*\prime}$, so liegen diese paarweise auf zwei Geraden durch M_1 und auf zwei Geraden, welche sich in ϱ_1^* schneiden. Je zwei dieser Geraden bilden mit ϱ_1^* und der Geraden nach Q_1' eine harmonische Gruppe. Dies folgt unmittelbar aus der Construction der Punkte S'. Ziehen wir dagegen durch Q_1' Gerade nach zwei Punkten $Q_2' Q_3'$ von Q', welche in einer Geraden ϱ_2^* aus M_2 liegen und bestimmen wir wieder auf $Q_1' Q_2'$ und $Q_1' Q_3'$ die Punkte $S_2' S_2^{*\prime}$ und $S_3' S_3^{*\prime}$ von S_1', so liegen diese paarweise auf Geraden durch M_2 und auf Geraden, die sich in ϱ_2^* treffen. Je zwei der Geraden bilden mit ϱ_2^* und der Linie nach Q_1' eine harmonische Gruppe. Es sind nämlich: $S_2^{*\prime} S_2' Q_2' Q_1'$ und $S_3^{*\prime} S_3' Q_3' Q_1'$ zwei harmonische perspectivische Gruppen mit dem Perspectivcentrum in M_2. Indem wir das analoge für M_3 zeigen, fassen wir die Bedeutung der M, m für die S' dahin zusammen: Zu einer Geraden durch ein M gehören zwei Sehnen einer Curve S_1' aus diesem Punkte M, welche mit jener Geraden und der Verbindungslinie des M und des Q', zu welchem S_1' gehört, eine harmonische Gruppe bilden. In jedem Punkte einer Linie m schneiden sich zwei Sehnen der Curve S_1', welche mit den Strahlen nach dem m gegenüberliegenden M und nach dem Punkte Q', zu dem S_1' gehört, eine harmonische Gruppe bilden.

19. Es bleibt uns noch übrig, *die Charakteristiken* der Curve vierter Ordnung $C^{4\prime}$ zu vervollständigen. Da die Curven SS' von der sechsten Classe, so wird $C^{4\prime}$ mindestens von der achten Classe sein. Dass dem so ist, lehrt folgender Gedankengang. Den Tangenten, welche durch einen beliebigen Punkt A_1' an $C^{4\prime}$ gehen, entsprechen im ungestrichenen Systeme Kegelschnitte, die M_1 berühren und zu L in einer centrischen Collineation erster Ordnung mit M_1 als Centrum und der respectiven Tangente als Axe stehen. Ausserdem müssen diese Kegelschnitte durch die zwei Punkte $A_1{}^{\mathrm{I}} A_1{}^{\mathrm{II}}$ gehen, welche A_1' correspondiren. Wir bestimmen nun die Collineationsaxen aller Kegelschnitte, welche $A_1{}^{\mathrm{I}}$, $A_1{}^{\mathrm{II}}$ enthalten, zu L collinear sind mit M_1 als Centrum und die je einen Punkt A auf M_1 haben. Diesem Punkte correspondirt dann in der Collineation erster Ordnung der eine oder andere Punkt $(A_1 A_2)$ in dem $M_1 A$ die Curve L schneidet. Ist $L_1{}^{\mathrm{I}}$ der Punkt in Bezug auf welchen in der Involution zweiter Ordnung dem A_1' der Punkt $A_1{}^{\mathrm{I}}$ entspricht, so sind $A_1{}^{\mathrm{I}}$ und $L_1{}^{\mathrm{I}}$ in der Collineation erster Ordnung zugeordnete Punkte. Daher correspon-

dirt in derselben der Linie $A_1{}^I A$ entweder $L_1{}^I A_1$ oder $L_1{}^I A_2$ und die Schnittpunkte der letzten zwei Linien mit $A_1{}^I A$ ergeben uns zwei Punkte D, welche mit A_1' verbunden mögliche Collineationsaxen sind. Die Punkte D liegen auf einer Curve D der vierten Ordnung. Denn die oben angeführte Construction derselben gibt uns zugleich die orthogonale Parallelprojection der Durchdringungscurve zweier Kegel zweiten Grades mit den Leitcurven L und $(M_1 r_1)$. Die Orthogonalprojectionen der Spitzen sind $L_1{}^I$ und $A_1{}^I$. Die Verbindungslinie der Spitzen trifft in M_1 die Bildebene. Die Tangenten von A_1' an die Curve D ergeben Collineationsaxen für solche Kegelschnitte, welche $M_1 r_1$ berühren, sind also Tangenten durch A_1' an C_4'. Nun hat die Curve D in $L_1{}^I$ einen Berührungsknoten und keine weiteren singulären Punkte ist also von der achten Classe, mithin auch $C^{4\prime}$.

Um über die Frage zu entscheiden, wie viele Doppelpunkte $C^{4\prime}$ hat, gehen wir zurück auf die in 1 angeführte Darstellungsmethode. Nach derselben ist $C^{4\prime}$ die Projection der Durchdringungscurve D^4 des Kegels $(P_1 M_1)$ und des Cylinders L von $P_1{}^*$ aus. Diese Durchdringungscurve hat im Allgemeinen keine Doppelpunkte. Es wird als $C^{4\prime}$ nur dann Doppelpunkte haben, wenn zwei nicht benachbarte Punkte von D^4 auf einem Strahle aus $P_1{}^*$ liegen. Wir bemerken nun, dass der projicirende Kegel aus $P_1{}^*$, welcher die Bildebene in $C^{4\prime}$ schneidet, von der vierten Ordnung ist. Er durchdringt daher den Cylinder L noch in einer zweiten Curve D^{4*}. Ueber ihr bilden wir einen projicirenden Kegel aus P_1, welcher die Bildebene in einer Curve vierter Ordnung C^{4*} schneidet. Denken wir uns nun einen Doppelpunkt der Curve $C^{4\prime}$ und verbinden wir ihn mit $P_1{}^*$, so schneidet diese

Linie den Cylinder L in zwei Punkten und die Geraden von P_1 nach diesen müssen sowohl dem Kegel aus P_1 nach $M_1 r_1$ als dem aus P_1 nach D^{4*} resp. C^{4*} angehören. Daraus schliessen wir, dass die 8 gemeinsamen Punkte des Kreises $M_1 r_1$ und der Curve C^{4*} zu vier Paaren auf Geraden aus M_1 liegen und dass nur in diesen Geraden Doppelpunkte von $C^{4\prime}$ vorkommen können. Zwei dieser Linien sind die Tangenten von M_1 an L und in ihnen gehen die Doppelpunkte in unendlich benachbarte über. Es bleiben also noch zwei solcher Linien und auf ihnen befinden sich die möglichen Doppelpunkte von $C^{4\prime}$. Nach den Plücker'schen Gleichungen ergänzen wir die Charakteristiken von $C^{4\prime}$ und erweitern dann den unter 14 erwähnten Satz dahin:

Satz. Der Ort der Aehnlichkeitspunkte aller Kreise, deren Mittelpunkte auf einem Kegelschnitt liegen und welche einen Kreis ($M_1 r_1$) *berühren, mit diesem Kreise ist eine Curve vierter Ordnung, achter Classe mit* 2 *Doppelpunkten,* 8 *Doppeltangenten,* 12 *Inflexionstangenten und keinem Rückkehrpunkte. Die Sehnen der Curve schneiden sich in unendlich vielen Curven dritter Ordnung, sechster Classe, welche sämmtlich durch* 3 *feste Punkte* ($M_1 M_2 M_3$) *gehen. In einer Curve vierter Ordnung mit diesen Punkten als Doppelpunkten treffen sich je zwei und nur* 2 *Tangenten der Curve* $C^{4\prime}$.

Ist M_1 Brennpunkt von L, so zerfällt, wie sich leicht zeigen lässt — $C^{4\prime}$ in zwei confocale Kegelschnitte, deren Directrix die in eine Gerade übergehende Curve T ist.

20. Um schliesslich darzuthun, wie wir durch *Rechnung* die oben hergeleiteten Curven erhalten können, wollen wir die Gleichungen derselben für den Fall auf-

stellen, in welchem L ein Kreis ist. Sei derselbe wie unter 13 gegeben durch:

$$1)\quad \varrho^2 - 2\varrho f \cos\varphi + f^2 - r^2 = 0,$$

so erhalten wir die Radii vectoren ϱ_1', ϱ_2' zweier den Punkten $A_1{}^1 A_1{}^2$ des Kreises $M_1 r_1$ in Bezug auf einen Punkt (ϱ, φ) von L correspondirender Punkte durch die allgemeine Relation:

$$2)\quad \varrho(r_1 + \varrho_1') = 2 r_1 \varrho_1' \quad \text{und} \quad 3)\quad \varrho(-r_1 + \varrho_2') = -2 r_1 \varrho_2'.$$

Indem wir hieraus ϱ_1' und ϱ_2' berechnen und die Gleichung zweiten Grades in ϱ' aufstellen, deren Wurzeln ϱ_1', ϱ_2' sind, folgt:

$$4)\quad \varrho'^2 \left\{4 r_1{}^2 - \varrho^2\right\} - 4 r_1{}^2 \varrho + \varrho^2 r_1{}^2 = 0.$$

Ausser dieser und der Gleichung 1 eliminiren wir ϱ. Setzen wir dann $f^2 - r^2 = c^2$, so erhalten wir als Resultat der Elimination die Gleichung der Curve $C^{4\prime}$:

$$5)\quad \varrho'^4(c^4 - 16 r_1{}^4 + 8 c^2 r_1{}^2 - 16 f^2 \cos^2\varphi\, r_1{}^2) + 8 r_1{}^2 \varrho'^3 f \cos\varphi\,(c^2 - 4 r_1{}^2)$$
$$+ 2 r_1{}^2 \varrho'^2 (4 c^2 r_1{}^2 - c^4 + 8 f^2 \cos^2\varphi) - 8 c^2 r_1{}^4 \varrho' f \cos\varphi + c^4 r_1{}^4 = 0.$$

Die Gleichung ist in $\cos\varphi$ vom zweiten Grade und wir folgern daraus, dass die Curve $C^{4\prime}$ zur Axe des Coordinatensystems symmetrisch liegt. Ferner geht sie durch die imaginären Kreispunkte der Ebene.

Wollen wir den Radius vector (ϱ_d') bestimmen, der uns einen *Doppelpunkt* der Curve gibt, so kann nach 19 derselbe nur der entsprechende von A_1' in Bezug auf $L_1{}^{\mathrm{I}}$ (oder $L_1{}^{\mathrm{II}}$) und der entsprechende von $A_1{}^2$ in Bezug auf $L_1{}^{\mathrm{II}}$ (oder $L_1{}^{\mathrm{I}}$) sein. In beiden Fällen ist (s. Fig.):

$$6)\quad \frac{r_1 - \varrho^{\mathrm{I}}}{\varrho^{\mathrm{I}} - \varrho_d'} = \frac{\varrho^{\mathrm{II}} + r_1}{\varrho^{\mathrm{II}} - \varrho_d'}.$$

Allgemein ist aber

$$7) \quad r_1(\varrho^{II} - \varrho^{I}) = \varrho_d'(\varrho^{I} + \varrho^{II})$$

da $\varrho^{I}(r_1 + \varrho_d') = 2r_1\varrho_d'$ und $\varrho^{II}(-r_1 + \varrho_d') = -2r_1\varrho_d'$.

Bemerken wir ferner, dass für den Kreis L:

$$8) \quad \varrho^{I} . \varrho^{II} = f^2 - r^2 = c^2$$

ist, so können wir die Radii vectoren ϱ^{I}, ϱ^{II} der Punkte L berechnen, in Bezug auf welche Doppelpunkte möglich sind. Wir erhalten:

$$9) \quad \varrho^{I} = \frac{-c^2 \pm c\sqrt{c_2 + (2r_1)^2}}{2r_1} \qquad \varrho^{II} = \frac{2r_1c^2}{-c^2 \pm \sqrt{c^2 + (2r_1)^2}}.$$

Je einer dieser Werthe von ϱ^{I} ist gleich einem von ϱ^{II}. Construiren wir daher einen Werth von ϱ

$$10) \quad \varrho = \frac{c}{2r_1}\left(\sqrt{c^2 + (2r_1)^2} - c\right)$$

und scheiden wir mit einem Kreise aus M_1, der dieses ϱ zum Radius hat, den Kreis L, so liegen auf den Radii vectoren durch diese Schnittpunkte die Doppelpunkte der Curve $C^{4\prime}$ und damit sind diese selbst bestimmt. Sie werden reell sein, wenn ϱ zwischen $f + r$ und $f - r$ liegt.

Sie fallen zusammen, wenn $\varrho = f + r$ oder $\varrho = f - r$ ist. Aus den letzteren Bedingungen können wir r_1, d. h. solche Kreise aus M_1 bestimmen, deren entsprechende Curven vierter Ordnung zwei zusammenfallende Doppelpunkte haben. Wir unterscheiden die $C^{4\prime}$ darnach in solche mit zwei reellen, mit einem Paare zusammenfallender und mit zwei imaginären Doppelpunkten. Eine weitere Unterscheidung in jeder dieser Gruppen entnehmen wir der Anzahl der Asymptoten. Entweder kommen zwei vor oder keine oder ein parabolischer Ast.

21. Für die *Curve* T^4 ergibt sich sofort, dass M_2 in der Polare m_1 von M_1 in Bezug auf den Kreis Q'

liegt u. z. im Schnittpunkte der Polaren mit der Axe des Coordinatensystems, welche also zugleich mit m_3 zusammenfällt. M_3 befindet sich in der Richtung normal zu dieser Axe unendlich ferne. Da Punkte T auf einem Strahle aus M_3 mit M_3, M_3^* eine harmonische Gruppe bilden, so folgt, dass die Curve T^4 zur Linie m^3 orthogonal symmetrisch liegt.

Schneide die Linie ϱ_1 durch M_1 den Kreis Q' in Q_1' und sei T_1 der Punkt von T^4, welcher auf der Tangente in Q_1' an Q' liegt. Construiren wir sodann den Kreis K^*, welcher durch $M_1\,Q_1'\,T_1$ geht, der also seinen Mittelpunkt in der Mitte von $Q_1'\,T_1$ hat, so geht dieser Kreis auch durch M_2. Es steht nämlich nach Construction Kreis K^* orthogonal zum Kreise Q'. $M_1\,M_2$ sind aber zwei zum Kreise Q' radial conjugirte Punkte und da einer derselben auf K^* liegt, so muss auch der andere — also M_2 — sich auf K^* befinden (s. Fig.).

Wir schliessen nun daraus, dass $Q_1'\,M_2\,T_1$ ein rechter Winkel ist, dass wir also die Curve T^4 von M_2 ausgehend auf gleiche Weise construiren können wie von M_1 aus. Wir ziehen durch M_2 eine Gerade ϱ_2 und schneiden die Tangenten in den Schnittpunkten von ϱ_2 und Q' mit der Normalen in M_2 zu ϱ_2 und erhalten zwei Punkte von T^4.

Die Punkte von T^4 liegen also sämmtlich auf Kreisen, welche durch $M_1\,M_2$ gehen und die zum Kreise Q' orthogonal sind. Alle diese Kreise, deren Mittelpunkte in einer Normalen n zu $M_2\,M_3$ sich befinden, bilden ein Kreisbüschel, für das Q' der Orthogonalkreis ist. Indem wir die Schnittpunkte von einem dieser Kreise und Q' mit dem Mittelpunkte verbinden, so treffen diese Verbindungslinien den Kreis in zwei weiteren Punkten, welche der T^4 angehören.

Unter Benutzung von n können wir die Construction von T^4 auch so aussprechen. Wir ziehen die Tangente in einem Punkte von Q' und tragen das Stück derselben vom Berührungspunkte bis zum Schnittpunkte mit n von letzterem aus auf die entgegengesetzte Seite ab und erhalten einen Punkt von T^4.

Wir fassen diese Constructionen in dem Satze zusammen:

Die Tangenten des Orthogonalkreises Q' eines Kreisbüschels mit der Mittelpunktslinie n schneiden die Kreise des Büschels ausser in Q' noch in einer Curve vierter Ordnung, welche die Grundpunkte und den unendlich fernen Punkt auf n zu Doppelpunkten hat.

Auf obiges gestützt wollen wir T berechnen und es wird dies am einfachsten von Q' aus geschehen. Wir machen den Mittelpunkt von Q' zum Nullpunkt. Die Richtung von n sei x Axe. Zugleich sei d der Abstand der Linie n von dieser Axe. Dann geben wir Q' durch die Gleichung:

$$1) \quad x^2 + y^2 = r^2$$

und seien $x_1\, y_1$ die Coordinaten eines Punktes T auf T^4, so ist, weil jeder Punkt von T auf einer Tangente an Q' liegt:

$$2) \quad \frac{x - x_1}{y_1 - y} = \frac{y}{x}.$$

Aus der Construction von T folgt:

$$3) \quad y^1 - n = n - y.$$

Aus diesen Gleichungen eliminiren wir x und y und erhalten als Gleichung von T:

$$4)\quad y_1^4 - 4ny_1^3 + 4n^2y_1^2 + 2r^2y_1^2 - 4nr^2y_1 + x_1^2(y_1^2 - 4ny_1 + 4n^2 - r^2) + r^4 = 0.$$

Setzen wir $x_1 = 0$, so gibt die Gleichung die zwei Doppelwurzeln:

$$y_1 = n \pm \sqrt{n^2 - r^2}$$

d. h. die Punkte M_1 und M_2.

Schliesslich wollen wir noch eine der Curven S' berechnen. Wir wählen diejenige, welche einem der Schnittpunkte von Q' und der Verbindungslinie von M_1 mit dem Mittelpunkte von Q' zugeordnet ist. Zugleich machen wir diese Linie zur Axe des Polarcoordinatensystems, M_1 zum Nullpunkt und geben Q' durch

$$5)\quad \varrho^2 - 2\varrho f \cos\varphi + f^2 - r^2 = 0.$$

Schneide die Axe Q' in Q_1' und sei $M_1 Q_1' = d = f + r$, so ziehen wir durch Q' eine Sehne, welche Q' in Q_2' treffe. $M_1 Q_2'$ sei ϱ. Die Halbirungslinie des Winkels $Q_1' M_1 Q_2'$ trifft $Q_1' Q_2'$ in einem Punkte S_1' von S'. $M_1 S_1'$ sei ϱ' und unter φ' gegen die Axe geneigt.

$M_1 S_1' Q_2'$ sei φ_1 und $M_1 Q_2' S_1'$ sei φ_2. Dann ist in Dreieck $M_1 S_1' Q_2'$ (s. Fig.):

$$6)\quad \varrho : \varrho' = \sin\varphi_1 : \sin\varphi_2$$

und in Dreieck $M_1 Q_1 Q'_2$ ist:

$$7)\quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{d \,.\, \sin 2\varphi'}{\varrho - d\cos 2\varphi'}$$

Berücksichtigen wir, dass $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi' = 180°$, so folgt

$$8)\quad \sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 \cos\varphi' + \cos\varphi_2 \sin\varphi'.$$

Dies in 6) eingesetzt, ergibt

$$9)\quad \varrho : \varrho' = \cos\varphi' \sin\varphi' \frac{\varrho - d\cos 2\varphi'}{d\sin 2\varphi'}$$

Daraus ϱ in 5 substituirt und φ mit $2\,\varphi'$ vertauscht, so lautet die Gleichung für S':

$$10)\quad f\cos\varphi'\,\varrho'^2-(2f\cos^2\varphi'-r)(f+r)\,\varrho'+(f^2-r^2)(f+r)\cos^2\varphi'=0.$$

S' geht also durch M_1 und liegt orthogonal symmetrisch zur Axe.

22. Wir wollen nun die *centrische Involution zweiter Ordnung* betrachten, *für welche* die *Leitcurve* L *durch das Centrum* M_1 *geht.* Nach 11 entspricht dann jedem Punkte der einen Ebene erstens M_1 und zweitens in Bezug auf einen Punkt der Leitcurve ein Punkt der anderen Ebene.

Den Punkten einer Geraden g correspondirt ein Kegelschnitt G' durch M_1, der zu L in der centrischen Collineation erster Ordnung mit $\varDelta = 2$ und g als Axe steht, daher L in M_1 berührt. Q' ist also ein Kegelschnitt durch M_1, dessen Punkte die Abstände $M_1\,L$ halbiren.

Construiren wir nun G' mit Hülfe von Q', so finden wir (vgl. Nr. 12), dass G' auch zu Q' in einer centrischen Collineation erster Ordnung sich befindet mit g^* durch M_1 parallel g als Axe, mit g als eine Gegenaxe und mit der Charakteristik $\varDelta = 1$. Daraus schliessen wir, dass G' den Kegelschnitt Q' in M_1 osculirt und dass g^* die gemeinsame Sehne von G' und Q' ist.

In der letzterwähnten Collineation sind — wie die Construction ergibt — die zu g^* conjugirten Durchmesser entsprechende Linien, werden also von M_1 aus unter demselben Winkel gesehen. Es folgt mithin:

Die gemeinsame Sehne zweier osculirender Kegelschnitte ist parallel zur conjugirten Richtung der Durchmesser, welche vom Osculationspunkte aus unter demselben Winkel erscheinen.

Dieser Winkel ist 90°, wenn einer der Kegelschnitte ein Kreis ist. Haben wir daher in einem Punkte eines Kegelschnittes den Osculationskreis zu zeichnen, so construiren wir den Durchmesser des Kegelschnittes, welcher von M_1 aus unter rechtem Winkel erscheint. Zu diesem Zwecke bestimmen wir die Durchmesserinvolution des Kegelschnittes und projiciren ihre Schnittpunkte mit demselben von M_1 aus. Damit erhalten wir in M eine Involution, dessen Rechtwinkelpaar den Kegelschnitt in dem verlangten Durchmesser schneidet.

Kennen wir die Axen des Kegelschnittes, so erhalten wir den Osculationskreis in M auch aus folgender Bemerkung, welche sich aus obigem ergibt:

Die gemeinsame Sehne zwischen Kegelschnitt und Osculationskreis in einem Punkte M des Kegelschnittes ist parallel zu der Tangente des Kegelschnittes, die zur Tangente in M in Bezug auf eine Axe orthogonal symmetrisch liegt.

Wie in 13 wollen wir die Gleichung des Kegelschnittes G', der g correspondirt, für den Fall berechnen, in welchem L ein Kreis durch M_1 vom Radius r ist. Sei M_1 Pol und die Verbindungslinie von M_1 mit dem Mittelpunkte von L Axe, so sind Punkte von L gegeben durch $(\varrho\,\varphi)$ und es ist:

$$1)\quad \varrho = 2r\cos\varphi\,;$$

die Gerade g sei bestimmt durch:

$$2)\quad rg = \frac{a\,b}{a\sin\varphi + b\cos\varphi}.$$

Ist dann ϱ' Radius vector von Punkten auf G', so folgt:

$$3)\quad \varrho\,(rg + \varrho') = 2rg\,.\,\varrho'.$$

Daraus folgt als Gleichung von G':

$$4)\quad \varrho'\left\{-ab + ar\sin\varphi\cos\varphi + br\cos^2\varphi\right\} + abr\cos\varphi = 0.$$

Ist die Gleichung eines Kegelschnittes gegeben und bringen wir sie auf Form 4), wobei ein Punkt des Kegelschnittes Nullpunkt des Polarcoordinatensystems ist, so wird nach vorstehendem $\frac{r}{2}$ — d. h. der Radius von Q' — Radius des Osculationskreises im Nullpunkte sein.

23. Sei ein Kegelschnitt C durch M_1 gegeben, so entspricht demselben in unserer speziellen Involution zweiter Ordnung eine Curve dritter Ordnung ($C^{3\prime}$) durch M_1. Auf jedem Radius vector ϱ_1 entspricht einem Punkte von C in Bezug auf einen Punkt von L ein Punkt von C'. Es liegt also auf jeder Geraden durch M_1 ein Punkt von $C^{3\prime}$; folglich hat $C^{3\prime}$ in M_1 einen Doppelpunkt.

Wir construiren $C^{3\prime}$ mit Hülfe von Q'. Jedem Punkte, jeder Sehne von C correspondirt in Bezug auf einen Punkt, eine Sehne von Q' ein Punkt, eine Sehne von $C^{3\prime}$. Ferner ist einem Punkte A' auf C' — mithin auch einem Punkte von Q' — eine Curve S und S' zugeordnet. Ein Uebergang in den Raum, analog dem unter 9 zeigt uns, dass diese Curven SS' Kegelschnitte sind. Je ein S und ein S', welche zu demselben Punkte von Q' gehören, sind zu einander ähnlich mit diesem Punkte als Aehnlichkeitspunkt.

Schneide ϱ_1 durch M_1 Q' in Q_1', C in A_1 und $C^{3\prime}$ in A_1', so berühren sich die A_1' zugeordneten Kegelschnitte S_1, S_1' in Q_1' längs einer Tangente, welche durch den Schnittpunkt der Tangente an C in M_1 mit Q' geht. M_1 liegt auf S_1'. S_1 geht durch A_1 und durch die drei Punkte, welche Q' und C ausser M_1 noch gemein haben.

Kennen wir S_1', A_1' und Q', so erhalten wir die Punkte von $C^{3\prime}$, indem wir aus A_1' Strahlen nach den

Punkten von S_1' ziehen und sie mit entsprechenden Strahlen eines Büschels aus M_1 zum Schnitte bringen, das nach Punkten von Q' geht. Die Strahlen nach den unendlich fernen Punkten von $C^{3\prime}$ sind parallel den Strahlen von M_1 nach den Schnittpunkten von Q' und C.

Wir leiten daraus folgende Erzeugungsweise von $C^{3\prime}$ aus zwei beliebigen Kegelschnitten — in unserem Falle $Q'S_1'$ — ab. Sind zwei Kegelschnitte K_1, K_2 gegeben, so bilden wir aus zweien ihrer Schnittpunkte (1, 2) über den Punkten des einen dieser Kegelschnitte — etwa K_1 — zwei eindeutig entsprechende Büschel (1) und (2). Die Strahlen des einen Büschels — etwa von (1) — schneiden wir mit den Punkten des anderen Kegelschnittes — also mit K_2 — und bilden über ihnen ein Büschel (3) aus einem beliebigen Punkte 3 auf 12. Dann sind die Strahlen des Büschels (3), denen von (2) mittelst Büschel (1) zugeordnet. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen der Büschel (2) und (3) liegen auf einer Curve dritter Ordnung, welche im Scheitel von (2) einen Doppelpunkt hat und durch Punkt (3) geht.

Es folgt aus dieser Erzeugungsweise, dass eine Tangente in 2 an $C^{3\prime}$ zugleich Tangente in diesem Punkte an K_1 ist. Die zweite Tangente in 2 ist die entsprechende zur Tangente in 1 an K_2 und geht durch den Schnittpunkt letzterer mit K_1. Ziehen wir sodann in 1 die Tangente an K_1 und schneiden damit K_2, so geht durch diesen Punkt die Tangente in 3 an $C^{3\prime}$.

Das Parallelenbüschel (4) aus (1) zum Büschel (3) schneidet Büschel (2) in einem Kegelschnitte K_3 der zu K_2 mit 2 als Aehnlichkeitspunkt ähnlich ist. Construiren wir seine Schnittpunkte mit K_1, so ist einer derselben

Punkt 2. Die drei übrigen mit 1 verbunden ergeben die Richtung der Asymptoten von $C^{3\prime}$.

Die Schnittpunkte einer Geraden g durch 3 mit $C^{3\prime}$ bekommen wir, indem wir mit g K_2 schneiden und diese Punkte mit 1 verbinden. Zu den so erhaltenen Strahlen in Büschel 1 suchen wir in (2) die correspondirenden, welche g in den gesuchten Punkten treffen. Zwei der Geraden durch (3) sind Tangenten an K_2, mithin berühren sie auch $C^{3\prime}$.

Die Schnittpunkte von K_3 mit K_1 — ausgenommen 2 —, ferner Punkt 1 und der Schnittpunkt von 12 mit K_3 bestimmen einen weiteren Kegelschnitt K_4, der zu $C^{3\prime}$ in einer centrischen Involution zweiter Ordnung steht mit 1 als Centrum und K_1 als Gegencurve.

24. Indem wir wieder zu dieser Involution zurückkehren, erörtern wir die Construction der *Tangenten* an Punkte von $C^{3\prime}$. Wir erhalten die Tangente in A_1', indem wir die Tangente in Q_1' mit einer Parallelen durch M_1 zur Tangente in A zum Schnitte bringen. Von diesem Schnittpunkte T aus geht die Tangente an A_1'. Alle Punkte T liegen auf einer Curve T.

Diese ist eine specielle Form einer allgemeinen Curve vierter Ordnung, die wir folgendermassen construiren. Seien gegeben zwei Kegelschnitte K_1, K_2 und ein Punkt M_1. Wir ziehen die Tangenten in den Schnittpunkten einer Geraden durch M_1 mit K_1, K_2.

Die Parallelen durch M_1 zu diesen Tangenten an einen Kegelschnitt schneiden wir mit den Tangenten an den anderen und bekommen als Ort der Schnittpunkte eine Curve vierter Ordnung. In unserem Falle sind die Kegelschnitte Q' und C, die M_1 gemein haben. Auf jeder Geraden ϱ_1 durch M_1 liegen zwei Punkte T_1, T_2 von T, also ist M_1 ein Doppelpunkt von T. Wir erhalten $T_1\,T_2$, indem wir an C die Tangenten $A_1\,A_2$ parallel ϱ_1 ziehen und ihre Berührungspunkte mit M_1 verbinden.

In den Schnittpunkten dieser Verbindungslinien und Q' ziehen wir die Tangenten $A_1'\,A_2'$ an Q' und diese treffen ϱ_1 in zwei Punkten von T. Aus dieser Construction erhellt, dass weitere Doppelpunkte von T^4 nur auf Q' liegen können.

Wir zeigen nun, dass die Schnittpunkte von je zwei Tangenten $A_1'\,A_2'$ sich auf einer Geraden p befinden. Indem wir nämlich die Berührungspunkte der parallelen Tangenten $A_1\,A_2$ mit M_1 verbinden, bilden wir aus M_1 eine Involution über den Durchmessern des Kegelschnittes C. Mit den Strahlen dieser Involution schneiden wir Q', übertragen also diese Involution auf Q'. Die Polare derselben ist p und auf ihr schneiden sich $A_1'\,A_2'$. Ein Doppelpunkt von T^4 kann daher nur auf p liegen. Es werden also die Schnittpunkte M_2, M_3 von p mit Q' Doppelpunkte von T^4 sein.

$M_2\,M_3$ sind nur dann reell, wenn die Durchmesserinvolution in C reelle Doppelstrahlen hat, also wenn C entweder Hyperbel oder Parabel ist. Wir bekommen in diesen Fällen $M_2\,M_3$ verschieden oder zusammenfallend als die Schnittpunkte von Q' mit Parallelen durch M_1 zu den Asymptoten resp. zur Axe von C. T' geht durch die imaginären Kreispunkte, wenn C ein Kreis ist.

T^4 berührt den Kegelschnitt Q' im Schnittpunkte desselben mit der Tangente in M_1 an C, wie die Specialisirung der Tangentenconstruction ergibt. Ferner entnehmen wir aus derselben, dass kein Punkt von T^4 innerhalb des Kegelschnittes Q' liegen kann und schliessen dass M_1, M_2, M_3 Spitzen von T^4 sein müssen.

Sei die Tangente eines Punktes S_1' auf $Q_1' Q_2'$ der zu Q_1' gehörenden Curve S_1' zu bestimmen, so schneide $M_1 Q_2'$ die Curve C in A_2. Dann geht die Tangente in S_1' durch den Schnittpunkt der Tangente in Q_2' mit einer Parallen durch M_1 zur Tangente in A_2. Dieser Schnittpunkt liegt aber auf T^4. Also ist T^4 auch der Ort der Schnittpunkte von Tangenten an Q' und S_1', deren Berührungspunkte in Strahlen aus Q_1' liegen. Es wird also S_1' — und mithin jede Curve S' — durch die Punkte $M_2 M_3$ gehen müssen.

Allgemein schliessen wir aber für zwei Kegelschnitte:

Die Tangenten zweier Kegelschnitte, deren Berührungspunkte in Strahlen aus einem gemeinsamen Punkte beider Kegelschnitte liegen, schneiden sich in einer Curve vierter Ordnung, für welche die übrigen drei gemeinsamen Punkte Spitzen sind.

Oben haben wir gesehen, dass von einem Punkte der $C^{3\prime}$ an dieselbe zwei Tangenten gezogen werden können. Es wird dieselbe also von vierter Classe sein und wir finden dies durch die Plücker'schen Gleichungen bestätigt, wenn wir sie auf eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, dessen Tangenten verschieden sind, anwenden. In Vervollständigung der Charaktere von $C^{3\prime}$ ergeben sich drei Inflexionen.

---

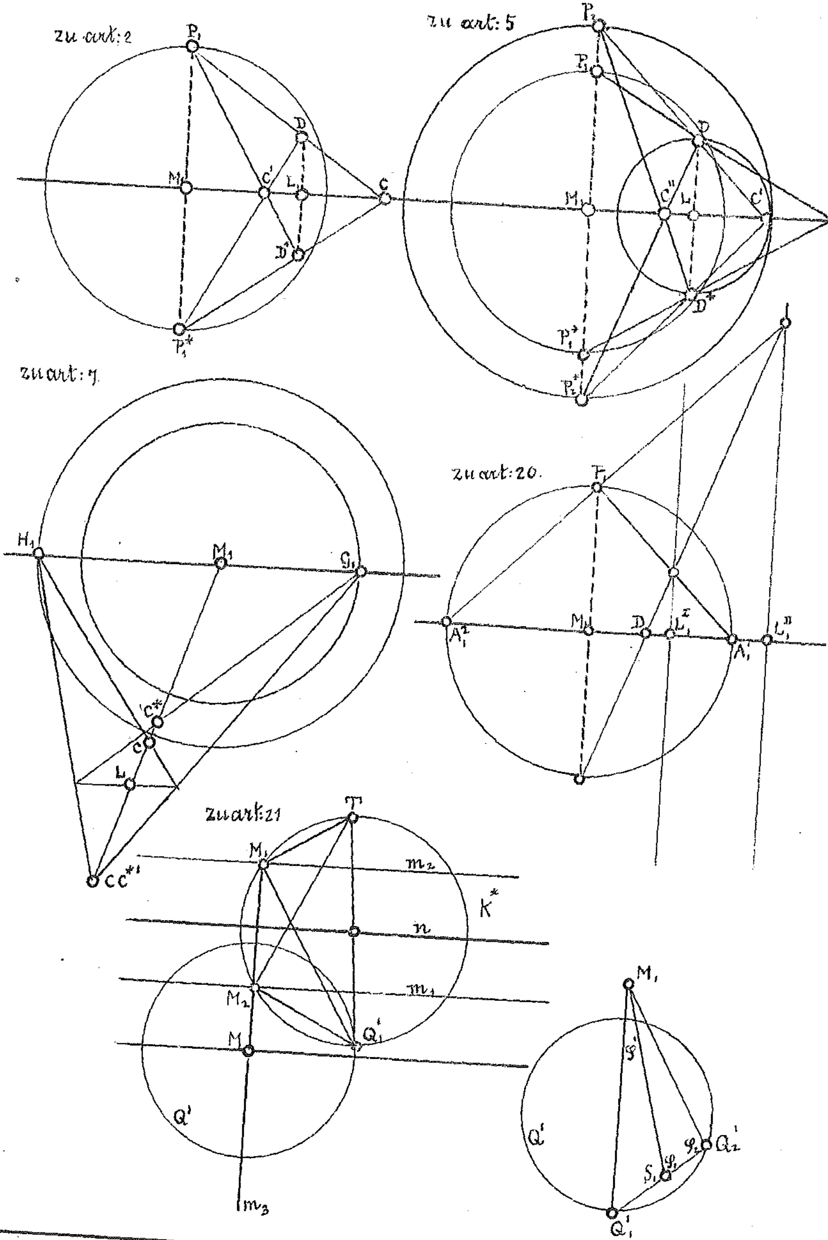
25. Wir haben nun gesehen, wie uns die Beziehungen der Aehnlichkeitspunkte von Kreisen einer Ebene mit einem resp. zwei festen Kreisen aus gleichem Mittelpunkte unter Zuhülfenahme der Abbildungsmethode von Herrn Prof. Fiedler auf eine centrische Collineation $n$ter Ordnung führten. Wir behandelten diese an einem speciellen

Beispiele der centrischen Involution zweiter Ordnung und zeigten dabei, wie wir in derselben Curven zweiter, dritter, vierter Ordnung herleiten, construiren und charakterisiren können.

Die allgemeinen Sätze, welche wir Eingangs vorausschickten, ergeben in ihrer Specialisirung die gleichen Curven und in ihrem Nachweise die Raumbilder dieser Curven.

Zum Schlusse erwähnen wir noch, dass eine Uebertragung dieser centrischen Beziehung aus der Ebene in den Raum uns ebenfalls zu einer n deutigen centrischen Correspondenz der Räume führen muss. Die Aehnlichkeitspunkte von Kugeln mit einer resp. zwei festen Kugeln aus gleichem Centrum werden diese Abhängigkeit vermitteln, eine Fläche L von der Ordnung n wird sie leiten. Analog wie oben muss es dann gelingen, aus Flächen niederer Ordnung solche höherer Ordnung zu erhalten.

Der Weg hiezu kann freilich nicht dem für die Ebene befolgten analog sein; denn der Uebergang aus unserem Raume in einen vierdimensionalen dürfte in seinen Consequenzen keine Beweiskraft für den dreidimensionalen haben.


zu art: 2
zu art: 5
zu art: 7
zu art: 20.
zu art: 21
K^*
Q'