Die Berührungspunkte sämmtlicher 28 Doppeltangenten liegen nach 18) auf bestimmte Weise zu je 8 auf einem Kegelschnitt, deren im Ganzen $\frac{63 \cdot 15}{3} = 315$ vorhanden sind. Diejenigen, welche durch die Berührungspunkte von g_0 gehn, sind *Kreise*, von denen es $\frac{27 \cdot 5}{3} = 45$ gibt. Man hat also:

Die Berührungspunkte der 27 im Endlichen gelegenen Doppeltangenten von C liegen auf bestimmte Weise 45 mal zu je sechs auf einem Kreise.

Notizen.

Zusätzliche Bemerkungen zu „Geometrische Mittheilungen V“. In Art. 18 der vorgenannten Abhandlung p. 241 f. habe ich den Einfluss erläutert, welchen die Parallelverschiebung der Bildebene nach ihren Normalen auf die Darstellung des Kegelschnittes ausübt, in dem sich zwei orthogonale Rotationskegel durchdringen, deren Axen zur Bildebene normal sind; ich habe aber dort in Ermangelung einer zugehörigen Figur, für welche die beigegebene Tafel keinen Raum bot, und um die Abhandlung nicht noch mehr zu verlängern, die ohnediess den vorgesteckten Umfang überschritt, mich mit dem nächstliegenden Hauptresultate begnügt, der Existenz unendlich vieler Paare von Grundkreisen des Kegelschnittes, welche constante Differenz oder Summe der Radien besitzen. Auf einiges weitere dahin Gehörige hätte ich mich sehr gern bei den literarischen Parallelen am Schluss der Abhandlung bezogen; und weil ich glaube, dass es durch die Anknüpfung an die vorhandenen Figuren hinreichend deutlich gemacht werden kann, so benutze ich die Gelegenheit, dasselbe mit einigen weitern Anmerkungen nun doch hier nachzutragen.

Man hat gesehen, dass die erzeugenden Kreise des Kegelschnittes zu einem Kreise (O^* mit dem Mittelpunkt J in Fig. 10 u. 11 der Tafel) orthogonal sind, wenn durch denselben ein einfaches orthogonales Rotationshyperboloid geht, das die Bildebene zur Hauptebene hat (O^* ist sein Kehlkreis oder sein Querschnitt in dieser Ebene). In Folge dessen sind die Radien der erzeugenden Kreise zugleich die Längen der vom Punkte (P') des Kegelschnittes an diesen Kreis (O^*) gehenden Tangenten. Weil sie aber auch die normalen Abstände der zugehörigen Kegelschnittpunkte (P) von der Bildebene sind und diese bei einer Verschiebung derselben nach ihren Normalen unveränderliche Differenz oder Summe behalten für zwei beliebige Punkte (P_1, P_2) des Kegelschnittes, nämlich (Art. 18) die Radiendifferenz oder Radiensumme der Leitkreise je nach der Lage der Spitzen der durch den Kegelschnitt gehenden beiden orthogonalen Rotationskegel zur Bildebene; und weil ferner der besagte Kehlkreis des Netzhyperboloids, dem der Kegelschnitt angehört, in seiner Eigenschaft als Umriss des Hyperboloids das Bild des Kegelschnittes in der Spur (s) seiner Ebene doppelt berührt und bei der bezeichneten Verschiebung der Bildebene sich sammt der Spur der Ebene ändert, ohne diese Eigenschaft zu verlieren, so hat man den Satz von der constanten Differenz oder Summe der Tangenten von den Punkten eines Kegelschnittes an zwei Kreise, welche denselben doppelt berühren, dessen meisterliche Ausführung als einer neuen Methode der Erzeugung der Kegelschnitte die Abhandlung von J. Steiner im 45. Bande von „Crelle's Journal" p. 189–211 (1852) enthält, der eine zweite „Allgemeine Betrachtung über einander doppelt berührende Kegelschnitte" p. 212–224 angeschlossen ist.

In Erinnerung an den dort gewählten Entwickelungsgang nach den Werthen der Differenz oder Summe der Tangentenlänge und an das Auftreten der innern oder äussern Tangenten der beiden gegebenen Kreise, wenn der bezügliche Werth mit der Länge von jenen oder diesen zwischen den Berührungspunkten übereinstimmt, will ich anmerken, dass diese Wahrnehmung sofort zu dem Satze führt, der das eine Hauptstück in der Steiner'schen Construction des Malfatti'schen Problems bildet: Wenn die Kreise so liegen, dass drei der ihnen in Paaren gemeinsamen Tangenten durch einen Punkt gehen, so gehen immer auch die drei andern durch einen Punkt. Die Verbindungslinien der Berührungspunkte des Kegelschnittes mit zweien seiner doppelt berührenden Kreise sind die von Steiner a. a. O. (p. 197 f.) als Wechselsehnen benannten Geraden mit der doppelten Eigenschaft, dass sie in den Kreisen gleiche Sehnen bilden und dass diese Kreise vom Schnittpunkt der zugehörigen Tangenten oder den Wechselschnitten aus unter gleichen Winkeln erscheinen; der Ort der Wechselschnitte ist somit der Kreis des Büschels der gegebenen Kreise, der durch ihre Aehnlichkeitspunkte geht, und die Enveloppe der Wechselsehnen die Parabel, welche ihre vier gemeinsamen Tangenten bestimmen. Diese Doppeleigenschaft bildet die andere Grundlage der Steiner'schen Construction des Malfatti'schen Problems. Beide gelten auch für die Kreise auf der Kugel.

Es ist ersichtlich, dass die Tangenten von den Punkten des Kegelschnittbildes an den Kehlkreis des Netzhyperboloides die Bilder der geradlinigen Erzeugenden (beider Regelschaaren) des Letzteren sind, welche von den Punkten des Kegelschnitts selbst ausgehen (die Ebenen dieser Paare haben die zugehörigen Berührungssehnen im Kehlkreis zu Spuren und diese beiden umhüllen somit einen neuen Kegelschnitt, der den Kehlkreis in denselben beiden Punkten mit dem Bilde des gegebenen berührt, etc.); somit auch, dass die betrachteten Tangentenlängen in der Bildebene durch Vergrösserung im Verhältniss $1:\sqrt{2}$ die Längen der geraden Erzeugenden des Netzhyperboloides von den Punkten des Kegelschnitts bis zum Kehlkreis selbst liefern, so dass die ausgesprochene Relation constanter Differenz oder Summe auf diese letzten übergeht.

Wenn die Bildebene durch die Spitze M_2 des einen der beiden sich durchdringenden orthogonalen Rotationskegel geht, so fällt das Netzhyperboloid mit diesem und sein Kehlkreis mit der Spitze M_2 zusammen, diese ist der eine Brennpunkt und die entsprechende Spur s die zugehörige Directrix oder Berührungssehne; man hat die bekannte allgemeine Definition der Brennpunkte und sieht den Weg zur Erweiterung der fundamentalen Eigenschaft der Brennpunkte zu der der doppelt berührenden Kreise anschaulich vorgezeichnet.

Zieht man aber weiter für den Berührungspunkt des Kegelschnittbildes mit einem doppelt berührenden Kreise (O^* Fig. 10) die Radienvectoren (die Geraden nach M_1', M_2') und den Radius dieses Kehlkreises (also nach J), so ist der letzte die Halbirungslinie des einen Winkels der ersten, und wenn man durch den betrachteten Berührungspunkt und die Brennpunkte (aus einem Punkte der Nebenaxe des Kegelschnittbildes) den Kreis legt, so wird derselbe von dem bezeichneten Kehlkreisradius in dem einen Punkte der Nebenaxe (oder mit einer zur Hauptaxe des Kegelschnittbildes parallelen Tangente) geschnitten. Bedenkt man dann, dass die Leitkreise constante Differenz oder Summe der Radien haben und dass der Kehlkreis ein zugehöriger Potenzkreis ist (Art. 14, Art. 4 der Abh.), so tritt die Fragestellung einer andern berühmten und mit der eben erwähnten in der That eng verbundenen Steiner'schen Abhandlung in den Kreis unserer Anschauung ein, nämlich der im 37. Bd. des „Crelle'schen Journals" enthaltenen „Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte", p. 161—192. (1847).

In Art. 5 p. 223 meiner Abhandlung ist die Darstellung der Ebene oder das durch drei Kreise bestimmte zweifach unendliche System von Kreisen mit einerlei Aehnlichkeitsaxe behandelt und gezeigt, wie die drei Kreise von den drei Centren M_1, M_2, M_3 drei Paare zur Bildebene orthogonalsymmetrischer Punkte 11*, 22*, 33* und damit vier Paare zu ihr orthogonalsymmetrischer Ebenen bestimmen, deren Spuren die vier Aehnlichkeitsaxen der Kreise sind. Sind A_1 und J_1 die Aehnlichkeitspunkte der Kreise M_2 und M_3, A_2 und J_2 die von M_3, M_1 und A_3, J_3 von M_1, M_2, so sind s_0 oder $A_1\ A_2\ A_3$ die Spur von 123 und 1*2*3*, s_1 oder $A_1\ J_2\ J_3$ die Spur von 1*23 und 12*3*, s_2 oder $J_1\ A_2\ J_3$ die von 12*3 und 1*23* und s_3 oder $J_1\ J_2\ A_3$ die von 123* und 1*2*3. Die Anschauung dieser vier Ebenenpaare giebt aber sofort durch die Betrachtung ihrer Schnittlinien ausserhalb der Bildebene den Satz: Die drei Paare gerader Verbindungslinien der Mittelpunkte der drei Kreise mit den Aehnlichkeitspunkten der jedesmaligen beiden andern sind die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks oder sie schneiden sich viermal zu drei in einem Punkte. Denn z. B. die Geraden $M_1\,J_1$, $M_2\,J_2$, $M_3\,J_3$ sind die Bilder der Schnittlinien von jedesmal zwei Ebenenpaaren, nämlich die erste von 12*3, 123* und 1*23*, 1*2*3 oder kürzer von 2*, 3*, 2, 3, die zweite ebenso von 3*, 1*, 3, 1 und die dritte von 1*, 2*, 1, 2, d. h. sie schneiden sich in dem Punkte S'_0, der die zur Bildebene orthogonalsymmetrischen Punkte S_0 und $S_0{}^*$ repräsentirt, von denen der erste der Schnittpunkte der drei Ebenen 3*, 1*, 2* und der letzte der Schnittpunkt der Ebenen 3, 1, 2 ist. Analog für die drei andern Punkte S_1', wo sich $M_1\,J_1$, $M_2\,A_2$, $M_3\,A_3$; S_2', wo sich $M_1\,A_1$, $M_2\,J_2$ und $M_3\,A_3$; S_3', wo sich $M_1\,A_1$, $M_2\,A_2$, $M_3\,J_3$ respective durchschneiden. Aus meiner Ableitung ersieht man, dass die acht so gefundenen Punkte als einfache Schnittpunkte des Systems der acht Ebenen, zusammen mit den sechs Aehnlickkeitspunkten als vierfachen und den sechs gegebenen Punkten als ebenfalls vierfachen Schnittpunkten die Gesammtzahl ihrer 56 Schnittpunkte liefern. Der ergänzende Gegensatz des Vierseits der Aehnlichkeitsaxen und des Vierecks dieser Punkte ist offenbar; jenes hat die Centrallinien der drei Kreise in Paaren zu seinen Diagonalen, dieses die Centra zu Diagonalpunkten oder beide haben dasselbe Diagonal-Tripel. Der anschauliche Beweis zeigt auch, dass die sechs Gruppen von je vier Punkten in gerader Linie $S_0'\,S_1'\,J_1\,M_1$, $S_0'\,S_2'\,J_2\,M_2$, $S_0'\,S'_3\,J_3\,M_3$, $S_2'\,S_3'\,A_1\,M_1$, $S_3'\,S_1'\,A_2\,M_2$, $S_1'\,S_2'\,A_3\,M_3$ harmonische Gruppen sind, weil $S_0\,S_1$ durch M_1, $S_1\,S_3$ durch M_2 gehen, etc. Die Geraden s_i sind die Harmonikalen der Punkte S_i' in Bezug auf das Dreieck der Centra $M_1\,M_2\,M_3$. Man erhält daraus ebenso unmittelbar die Evidenz der in Steiner's „Geometrische Constructionen" p. 58 unter II gemachten Bemerkung über ähnlich liegende Punkte. Denn wenn man durch die Punkte 1, 2, 3, 1*, 2*, 3* gerade Linien von einerlei Richtung bis zur Bildebene zieht, so sind ihre Fusspunkte in dieser P_1, P_2, P_3, $P_1{}^*$, $P_2{}^*$, $P_3{}^*$ solche ähnlich liegende Punkte; $P_1\,P_1{}^*$, $P_2\,P_2{}^*$, $P_3\,P_3{}^*$ mit M_1, M_2, M_3 respective als den Mittelpunkten ihrer Strecken; ferner $P_1\,P_2$ und $P_1{}^*\,P_2{}^*$ mit A_3, $P_2\,P_3$ und $P_2{}^*\,P_3{}^*$ mit A_1, $P_3\,P_1$ und $P_3{}^*\,P_1{}^*$ mit

A_2, P_1 P_2^* und P_1^* P_2 mit J_3, P_2 P_3^* und P_2^* P_3 mit J_1 und P_3 P_1^*, P_3^* P_1 mit J_2 respective in gerader Linie. Man erhält also z. B. aus P_1, P_2 die Punkte P_3 und P_3^* als Schnittpunkte der Paare von Geraden P_1 A_2, P_2 A_1 uud P_1 J_2, P_2 J_1, etc.

Man kann diese Ergebnisse als Theile einer Analyse des Dreiecks im Sinne meiner Abbildung bezeichnen. Vier beliebige Kreise der Bildebene führen zur analogen Analyse des Vierecks, etc.; im Falle des Vierecks treten an Stelle der vier Paare orthogonalsymmetrischer Ebenen von vorher acht Paare orthogonalsymmetrischer Vierecke, beim Fünfeck sechzehn Paare orthogonalsymmetrischer Fünfecke, etc. Sämmtlich als vollständige Vielecke im Raum, also mit $(n-1)$ kantigen Ecken $(n-2)$ flächigen Kanten und mit $\frac{1}{6}\,n\,(n-1)\,(n-2)$ Flächen. Man ist somit auf die Theorie der perspectivischen Raumfiguren und auf die der vollständigen n Ecke und n Flache geführt. Schon die Analyse des Vierecks bietet Neues dar, worauf ich für diesmal nicht eingehen kann.

Die Frage nach den Kreisen des ebenen Systems M,s, die durch einen Punkt gehen, und nach denen, die einen Kreis berühren, führt wieder auf die Kegelschnitt-Theorie, die ich entwickelte; die nach den eine Gerade berührenden Kreisen auf zwei Reihen mit einerlei Aehnlichkeitspunkt; etc.

Die bestimmten Aufgaben oder die Construction der Kreise des Systems M, s durch zwei Punkte P_1, P_2, oder an zwei Gerade t_1, t_2, oder an zwei Kreise K_1, K_2 und der Kreise des Systems mit den Bedingungen P, t oder t, K oder K, P bringen die Construction der Schnittpunkte einer Geraden mit dem Kegelschnitt, etc. Die Beachtung der möglichen Vertauschungen zwischen M und den K, und zwischen s und den t — vierzehn zusammen — liefert hier wie bei den Aufgaben über die lineare Reihe Ergebnisse von Interesse.

Wenn sodann in Art. 7 p. 225 kurz von der bezüglichen Darstellung des allgemeinen Kegels vom zweiten Grade gehandelt wird, so ist ersichtlich, dass damit die Durchdringungscurven von zwei solchen Kegeln, die Raumcurven dritter Ordnung und die Raumcurve vierter Ordnung erster Art, etc. in die betrachtete Darstellungsform eingehen. Sie erzeugen Kreis-reihen (Art. 12) besonderer Art und diese liefern zugehörige Umhüllungscurven; so führt die betrachtete Methode der Abbildung auf neue Probleme. Von der gleichseitigen zur Bildebene orthogonalsymmetrischen Hyperbel und dem analogen Linienpaar mit dem reellen oder imaginären Punkte- resp. Linien-Paar als Enveloppe der darstellenden Kreise hat der Kegelschnitt, dessen Hauptaxe die Falllinie seiner Ebene ist, zum Paar der Kreise als Enveloppe seiner erzeugenden Kreise geführt; man sieht, welche speciellen Fälle noch zu betrachten sind und gelangt zum allgemeinen Falle und weiter. Ebenso sind von den Flächen und ihren Bildern, den zweifach unendlichen Systemen von Kreisen (Art. 5) nur die Ebene, die gleichseitigen Rotationshyperboloide mit der Bildebene als Hauptebene und die gleichseitigen Rotationskegel mit zur Bildebene normaler Axe zur Erörterung gekommen — weil die gleichseitige Hyperbel, die dem Kreis an Einfachheit analoge unter den Curven zweiten Grades, zu ihnen führt.

Weil aber die Einsicht in alle Ergebnisse der in Rede stehenden Anschauung sehr erleichtert werden kann durch zweckmässige Darstellung, so will ich noch anmerken, dass die bequemste Darstellung des stereometrischen Sachverhalts in Verbindung mit dem ebenen Bilde durch die schiefe Axonometrie geleistet wird, wenn man die drei zu einander rechtwinkligen Axen OX, OY, OZ (in gewissen Fällen mögen auch OX, OY schiefwinklig zu einander sein) so projicirt voraussetzt, dass die Bilder von OX und OY parallel den Originalen und also den wahren Längen gleich sind, indess das Bild von OZ in beliebiger Richtung und Verjüngung erscheint. Denkt man die Ebene XOY als Bildebene, so erscheinen die Kreise unserer Darstellung durchweg als Kreise mit ihren wahren Radien und die zu ihnen in festem Verhältniss stehenden Coordinaten z liefern die Bilder der durch sie repräsentirten Punkte.

[W. Fiedler].