Die Beziehung zwischen dem Wärmeleitungsvermögen und dem electrischen Leitungsvermögen der Metalle.

Von

H. F. Weber in Zürich.

(Dieser Auszug einer grösseren Abhandlung wurde von Hrn. Helmholtz der k. Academie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Mai vorgelegt.)

1. Forbes[1]) hat im Jahre 1831 zuerst bemerkt, dass die Reihenfolge nach welcher sich die Metalle bezüglich der Höhe ihres electrischen Leitungsvermögens ordnen lassen nahezu vollständig mit der Reihenfolge übereinstimmt in welcher die Metalle in Betreff der Güte ihres Wärmeleitungsvermögens auf einander folgen.

Mehr als zwanzig Jahre später haben die HH. Wiedemann und Franz[2]) in einer umfangreichen Arbeit die relativen Wärmeleitungsvermögen von neun Metallen mit möglichster Sorgfalt gemessen und die gefundenen Werthe mit den für dieselben Metalle von anderen Physikern ermittelten relativen Werthen des electrischen Leitungsvermögens verglichen. Sie fanden dass der Quotient aus dem relativ gemessenen electrischen Leitungsvermögen in das relativ gemessene Wärmeleitungsvermögen für alle die untersuchten Metalle fast genau der gleiche ist, dass also die von Forbes bemerkte Beziehung in der That zutrifft.

Auch Hr. F. E. Neumann[3]) kam bei seinen absoluten Messungen des Wärmeleitungsvermögens, die er in den

---

1) Philosoph. Magazine, Vol. IV. (1834) p. 15.

2) Pogg. Annalen, Bd. 89, (1853) p. 530.

3) Annales de Chimie et de Physique, T. 66, III. Sér. (1863) p. 185.

Jahren 1860 bis 1863 für die Metalle Kupfer, Messing, Zink, Neusilber und Eisen ausführte, zu dem Schluss, dass der Quotient aus dem electrischen Leitungsvermögen in das Wärmeleitungsvermögen nahezu constant ist; die Werthe dieses Quotienten betrugen für die genannten Metalle 17.6, 19.8, 17.1, 19.9 und 18.9. Die vorhandenen kleinen Schwankungen dieses Quotienten glaubte Hr. Neumann auf Rechnung des Umstandes setzen zu müssen, dass die Temperaturen, aus welchen die Wärmeleitungsvermögen berechnet wurden, nicht für alle untersuchten Metalle genau die gleichen waren.

In einer viel strengeren, einwurfsfreieren Weise als die bisher angeführten Untersuchungen die Beziehung zwischen dem thermischen und dem electrischen Leitungsvermögen der Metalle untersucht hatten, prüfte Hr. R. Lenz[1]) im Jahre 1869 die Gültigkeit dieser Beziehung von neuem. Seine Untersuchungen bezogen sich auf die Metalle Kupfer, Messing, Neusilber und Eisen und führten ihn zu dem Resultat, dass der Quotient aus dem electrischen Leitungsvermögen in das Wärmeleitungsvermögen für die verschiedensten Metalle vollkommen derselbe ist.

Seitdem wurde die Proportionalität der Leitungsvermögen der Metalle für Wärme und Electricität allgemein angenommen.

Dieses Resultat der besprochenen Experimentaluntersuchungen befindet sich indess mit unseren bisherigen Vorstellungen über den Process der Wärmeleitung in ponderablen Substanzen in vollkommenem Widerspruch. Nach diesen Vorstellungen steht die Wärmemenge, die im Inneren einer Substanz auf dem Wege der Wärmeleitung von

[1]) Bull. de l'Académie de St. Petersbourg, T. XV, p. 54—59 (1870).

Schicht zu Schicht übertragen wird, in dem engsten Zusammenhange mit der specifischen Wärme der Volumeneinheit. Für die Gase ist dieser Zusammenhang sowohl von theoretischer als auch von experimenteller Seite schon seit einigen Jahren festgestellt, und für die tropfbaren Flüssigkeiten habe ich ihn in einer kürzlich publicirten ausführlichen Experimentaluntersuchung klar zu legen gesucht. Wäre für die metallischen Wärmeleiter keine solche Abhängigkeit des Wärmeleitungsvermögens von der specifischen Wärme der Volumeneinheit vorhanden, so würde der Process der Wärmeleitung in Metallen mit einer von Schicht zu Schicht erfolgenden Uebertragung der lebendigen Kraft der ponderablen Massentheile nichts zu thun haben und es wäre die Wärmeleitung in Metallen ein vorläufig völlig räthselhafter Vorgang.

Eine nähere Durchsicht der Versuche, auf welche sich die obige Annahme stützt, drängte mir aber die Ueberzeugung auf, dass die behauptete Constanz des Quotienten aus dem electrischen Leitungsvermögen in das Wärmeleitungsvermögen der Metalle auf höchst unsicherem Boden ruht. Diese Behauptung stützt sich theils auf Versuchsresultate, die mit Hülfe der von Fourier in die Theorie der Wärmeleitung eingeführten, aber nur sehr näherungsweise zutreffenden Prämissen aus den Beobachtungen abgeleitet worden sind und welche daher unmöglich völlig exact sein können — dahin gehören die Untersuchungen der HH. Wiedemann und Franz und die Messungen des Hrn. F. E. Neumann —, theils beruht diese Behauptung auf Versuchsergebnissen, die zwar aus exacten Voraussetzungen abgeleitet wurden, die sich aber nur auf einige wenige Metalle beziehen, welche fast genau dieselbe specifische Wärme der Volumeneinheit haben, so dass aus ihnen gar nichts über die etwa bestehende Abhängigkeit des Wärmeleitungsvermögens von der specifischen Wärme der Volumeneinheit gefolgert werden kann — dahin gehören die Untersuchungen, welche Hr. R. Lenz ausgeführt hat.

Ich habe es desswegen für nöthig erachtet, neue messende Versuche zur Aufklärung der Beziehung zwischen dem Wärmeleitungsvermögen und dem electrischen Leitungsvermögen der Metalle anzustellen. Um möglichst fehlerfreie Aufschlüsse in dieser Richtung zu erhalten, habe ich die beiden Leitungsvermögen in absolutem Maasse bestimmt und die Theorie der zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit benutzten Methode in voller Strenge und auf Gruud von Prämissen entwickelt, die mit der Erfahrung in vollkommenem Einklang stehen; endlich habe ich die beiden Leitungsvermögen an genau demselben Metallstück gemessen, so dass sich die gefundenen Leitungsvermögen eines Metalles für Wärme und Electricität auf vollkommen identische Substanz beziehen. Letzteres war zur Erlangung sicherer Resultate unumgänglich nothwendig, da ja bekanntlich sowohl das Wärmeleitungsvermögen, als auch das electrische Leitungsvermögen desselben Metalles von Varietät zu Varietät in der allererheblichsten Weise variirt.

2. Zur Messung der absoluten Wärmeleitungsfähigkeit habe ich für die meisten der untersuchten Metalle die Abkühlung eines **Ringes** in einem Raume von constanter Temperatur benutzt. Zur Berechnung dieser Abkühlung habe ich an Stelle der von Fourier in die Theorie der Wärmeleitung eingeführten, aber der Erfahrung widerstreitenden Prämissen — nach welchen die specifische Wärme der Volumeneinheit, das innere und das äussere Wärmeleitungsvermögen Constante sind — die allgemeinere und mit der Erfahrung in vollkommenem Einklange

stehende Voraussetzung eingeführt, dass diese drei den Process der Wärmeleitung bestimmende Elemente lineare Functionen der Temperatur sind. Die auf Grund dieser Voraussetzung entwickelte Theorie der Wärmeleitung im Ring schliesst demnach das schon von Fourier behandelte Problem der Wärmeleitung im Ring als speciellen Fall ein.

Der metallene Ring dessen Wärmeleitungsfähigkeit gemessen werden sollte, wurde in einen Raum mit der constanten Temperatur u_a gebracht und in einem seiner (überall gleichen) Querschnitte dauernd so lange auf die hohe Temperatur U erwärmt, bis die Temperaturvertheilung im ganzen Ringe eine stationäre geworden war. Hierauf wurde die Heizung unterbrochen und die nun erfolgende Abkühlung wurde messend verfolgt. Aus dem beobachteten zeitlichen Verlaufe der Abkühlung lassen sich die Werthe des inneren und äusseren Wärmeleitungsvermögens der Ringsubstanz und deren Veränderlichkeit mit steigender Temperatur bestimmen.

Der Halbmesser der Ringmittellinie sei r; p sei der Umfang und q sei die Fläche des überall gleichen Ringquerschnittes. Von diesen drei Grössen darf angenommen werden, dass sie unveränderlich mit der Temperatur sind, da die thermischen Ausdehnungscoefficienten der Metalle sehr kleine Grössen sind gegenüber den Temperaturcoefficienten der specifischen Wärme, des inneren und des äusseren Wärmeleitungsvermögens. Es werde angenommen: für die Temperatur u sei die specifische Wärme der Volumeneinheit

$$c = c_0 + c_1 \,.\, u$$

und das innere Wärmeleitungsvermögen

$$k = k_0 - k_1 \,.\, u$$

Dieses sind Annahmen, die für alle bis jetzt von mir untersuchten festen Metalle zutreffen. Bezüglich des äusseren

Wärmeleitungsvermögens soll die Voraussetzung gemacht werden, dass das Oberflächenelement dS, welches zur Zeit t die Temperatur u besitzt während des Zeitelementes dt an eine kühlere Umgebung von der constanten Temperatur u_a die Wärmemenge

$$\{ h_0 (u - u_a) + h_1 (u - u_a)^2 \} dS \, . \, dt$$

abgiebt. Dieses für den Vorgang der äusseren Wärmeleitung zu Grunde gelegte Elementargesetz wurde in jeder ausgeführten Versuchsreihe auf seine Richtigkeit geprüft und wurde stets als in vollkommenstem Einklang mit der Erfahrung stehend befunden.

Auf Grund dieser verallgemeinerten Fourier'schen Prämissen lässt sich zunächst die partielle Differentialgleichung angeben, welcher die Temperatur in jedem Volumenelemente des Ringes und in jedem Zeitmomente genügen muss. Der Einfachheit der Rechnung halber möge angenommen werden: die Querschnittsdimensionen des Ringes seien so gewählt, dass die Temperaturen aller Massenpuncte je eines Querschnittes in jedem Zeitelemente gleich seien, dass also die Bewegung der Wärme im Ring nur eine lineare, in Richtung der Mittellinie der Ringquerschnitte erfolgende sei. Durch Rechnung lässt sich mit voller Strenge ermitteln, wie gross die Querschnittsdimensionen des Ringes gewählt werden dürfen, damit die grösste in einem Ringquerschnitt vorkommende Temperaturdifferenz einen festgesetzten kleinen Betrag nicht überschreiten soll. Ich habe die Querschnittsdimensionen der untersuchten Metallringe stets so gewählt, dass die grösste in einem Querschnitt vorkommende Temperaturdifferenz kleiner ausfiel, als der 500. Theil der mittleren Temperatur dieses Querschnittes [1]). Nehmen wir

---

[1]) Bisher war unter den Experimentatoren auf dem Gebiete der

die Mittellinie der aufeinanderfolgenden Ringquerschnitte als die Abscissenaxe der x an, so hat die Temperatur u in jedem Ringelement und in jedem Zeitmoment t die partielle Differentialgleichung zu erfüllen:

$$c_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_1}{2} \frac{\partial (u^2)}{\partial t} - k_0 \frac{\partial^2 (u)}{\partial x^2} + \frac{k_1}{2} \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2} + \frac{h_0 p}{q} (u - u_a) + \\ + \frac{h_1 p}{q} (u - u_a)^2 = 0$$

oder, falls $u - u_a$ mit v bezeichnet und

$$\left.\begin{aligned} c_0 + c_1 \,.\, u_a &= c_a \\ k_0 - k_1 \,.\, u_a &= k_a \end{aligned}\right\} \text{ gesetzt wird,}$$

der folgenden partiellen Differentialgleichung Genüge zu leisten:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{c_1}{c_a} \frac{\partial (v^2)}{\partial t} - \frac{k_a}{c_a} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{k_1}{c_a} \frac{\partial^2 (v^2)}{\partial x^2} + \frac{h_0 p}{c_a q} \,.\, v + \frac{h_1 p}{c_a q} \,.\, v^2 = 0 \quad (1)$$

Der durch den Nullpunct der Abscissenaxe gehende Ringquerschnitt möge derjenige sein, welcher bis zu dem Ein-

---

Wärmeleitung allgemein die Ansicht verbreitet, dass die Querschnitte von Stäben, deren Wärmeleitungsfähigkeit nach den bisher üblichen Methoden bestimmt werden sollte, ausserordentlich klein sein müssten, kleine Bruchtheile eines Quadratcentimeters betragen müssten, damit die Wärmebewegung als eine lineare betrachtet werden dürfe. Diese Auffassung beruht auf einem Irrthum. Aus den Principien der Theorie der Wärmeleitung lässt sich folgern, dass z. B. ein einseitig erwärmter Kupferstab einen Querschnitt von circa 10 cm. Höhe und circa 10 cm. Breite haben darf, ohne dass die grösste, in je einem Querschnitt vorkommende Temperaturdifferenz den 1000. Theil der mittleren Temperatur dieses Querschnittes übersteigt. Für eine andere Substanz mit kleinerem Leitungsvermögen müsste man zur Erreichung derselben näherungsweisen Gleichheit der Temperatur in allen Puncten eines Stabquerschnittes die angegebenen Querschnittsdimensionen im Verhältniss der kleineren Leitungsfähigkeit der Substanz zu der des Kupfers verkleinern.

tritt des stationären Temperaturzustandes auf die Temperatur U erwärmt wurde. Die eine Bedingung, welcher die Lösung der Differentialgleichung (1) zu genügen hat, ist dann die folgende:

$$\left.\begin{array}{l}\text{in jedem Zeitmomente ist}\\ \qquad v_{x=+x} = v_{x=-x}\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Eine weitere Bedingung, welche die Lösung v der obigen Differentialgleichung zu erfüllen hat, fliesst aus der Ringgestalt:

$$\left.\begin{array}{l}\text{in jedem Zeitmomente muss}\\ \qquad v_{x=x} = v_{x=x+2r\pi} \quad \text{sein}\end{array}\right\} \quad . \; . \quad (3)$$

Die Anfangsbedingung endlich, welcher v zu genügen hat, ist: es muss für $t = 0$ v denjenigen Werth v_0 haben, welcher der stationären Temperaturvertheilung entspricht. Diese stationäre Temperaturvertheilung wäre zunächst anzugeben. Sie ist, wie aus (1) hervorgeht, durch die Differentialgleichung bestimmt:

$$\frac{d^2 v_0}{dx^2} - \frac{1}{2}\frac{k_1}{k_a}\frac{d^2(v_0{}^2)}{dx^2} - \frac{h_0 p}{k_a q} \cdot v_0 - \frac{h_1 p}{k_a q} v_0{}^2 = 0 \,,$$

deren angenäherte Lösung (in welcher schon die Glieder mit den Quadraten und Producten der sehr kleinen Coefficienten $\frac{h_1}{h_0}$ und $\frac{k_1}{k_a}$ fortgelassen sind) ist:

$$v_0 = Me^{-\lambda x} + Ne^{+\lambda x} + \frac{1}{3} M^2 \left(\frac{h_1}{h_0} + \frac{2k_1}{k_a}\right) e^{-2\lambda x} +$$

$$+ \frac{1}{3} N^2 \left(\frac{h_1}{h_0} + \frac{2k_1}{k_a}\right) e^{+2\lambda x} - \frac{2h_1}{h_0} . M . N \quad . \; . \quad (4)$$

$$\left[\lambda^2 = \frac{h_0 \cdot p}{k_a \cdot q} \text{ gesetzt}\right]$$

Die Constanten M und N sind durch die beiden für $x = 0$ und für $x = r\pi$ gültigen Bedingungsgleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} U-u_a &= M+N+\frac{1}{3}M^2\left(\frac{h_1}{h_0}+\frac{2k_1}{k_a}\right)+\frac{1}{3}\left(N^2\frac{h_1}{h_0}+\frac{2k_1}{k_a}\right)-\frac{2h_1}{h_0}.M.N \\ 0 &= -Me^{-\lambda r\pi}+Ne^{+\lambda r\pi}-\frac{2}{3}M^2\left(\frac{h_1}{h_0}+\frac{2k_1}{k_a}\right)e^{-2\lambda r\pi}+ \\ &\quad +\frac{2}{3}N^2\left(\frac{h_1}{h_0}+\frac{2k_1}{k_a}\right)e^{+2\lambda r\pi} \end{aligned}\right\}$$

von denen die letztere sagt, dass in dem der Heizstelle $x=0$ diametral gegenüberliegenden Querschnitt $\frac{dv_0}{dx}$ in jedem Momente gleich Null sein muss.

Die allgemeinste Lösung welche die Differentialgleichung (1) erfüllt und zu gleicher Zeit den Bedingungsgleichungen (2) und (3) genügt, lässt sich mit beliebiger Annäherung ermitteln. Wird die Annäherung nur so weit getrieben, dass schon die Glieder mit den Quadraten und Producten der sehr kleinen Coefficienten $\frac{h_1}{h_0}$, $\frac{k_1}{k_a}$ und $\frac{c_1}{c_a}$ vernachlässigt werden, so ist diese allgemeinste Lösung, welche die Gleichungen (1) bis (3) erfüllt, die folgende:

$$\begin{aligned} v &= A_0 . e^{-\frac{h_0 p}{c_a q}.t} + A_0^2\left(\frac{h_1}{h_0}-\frac{c_1}{c_a}\right)\cdot e^{-\frac{2h_0 p}{c_a\cdot q}.t} \\ &+ A_1\cos\left(\frac{x}{r}\right)\cdot e^{-\left(\frac{h_0 p}{c_a q}+\frac{k_a}{c_a}\cdot\frac{1}{r^2}\right).t} + \\ &+ 2A_0A_1\left\{\frac{h_1}{h_0}-\frac{c_1}{c_a}-\frac{k_a q}{2h_0 p}\frac{1}{r^2}\left(\frac{k_1}{k_a}+\frac{c_1}{c_a}\right)\right\}\cos\left(\frac{x}{r}\right).e^{-\left(\frac{2h_0 p}{c_a q}+\frac{k_a}{c_a}\frac{1}{r^2}\right)\cdot t} \\ &+ A_2\cos\left(\frac{2x}{r}\right)\cdot e^{-\left(\frac{h_0 p}{c_a q}+\frac{4k_a}{c_a}\frac{1}{r^2}\right)\cdot t} + \\ &+ A_1^2\,\frac{\left\{\frac{h_1}{k_a}\cdot\frac{p}{q}-\frac{h_0}{k_a}\frac{c_1}{c_a}\frac{p}{q}-\frac{c_1}{c_a}\frac{1}{r^2}\right\}}{2\left(\frac{h_0}{k_a}\cdot\frac{p}{q}+\frac{2}{r^2}\right)}\cdot e^{-\left(\frac{2h_0 p}{c_a q}+\frac{2k_a}{c_a}\frac{1}{r^2}\right)\cdot t} \end{aligned}$$

$$+ A_1{}^2 \frac{\left\{\frac{h_1}{k_a} \cdot \frac{p}{q} - \frac{h_0}{k_a}\frac{c_1}{c_a}\frac{p}{q} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{c_1}{c_a} - \frac{2k_1}{k_a}\right)\right\}}{2\left(\frac{h_0}{k_a} \cdot \frac{p}{q} - \frac{2}{r^2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{2x}{r}\right) \cdot e^{-\left(\frac{2h_0 p}{c_a q} + \frac{2k_a}{c_a}\frac{1}{r^2}\right) \cdot t}$$

$$+ 2A_0A_2\left\{\frac{h_1}{h_0} - \frac{c_1}{c_a} - \frac{2k_a q}{h_0 p r^2}\left(\frac{c_1}{c_a} + \frac{k_1}{k_a}\right)\right\} \cdot \cos\left(\frac{2x}{r}\right) \cdot e^{-\left(\frac{2h_0 p}{c_a q} + \frac{4k_a}{c_a}\frac{1}{r^2}\right) \cdot t}$$

$$+ 2A_1A_2\left\{\left(\frac{h_1}{k_a}\frac{p}{q} - \frac{9}{2}\frac{k_1}{k_a}\frac{1}{r^2} - \frac{c_1}{c_a}\frac{h_0 p}{k_a q} - \frac{5}{2}\frac{c_1}{c_a}\frac{1}{r^2}\right)\cos\left(\frac{3x}{r}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{h_1 p}{k_a q} - \frac{1}{2}\frac{k_1}{k_a}\frac{1}{r^2} - \frac{c_1}{c_a}\frac{h_0 p}{k_a q} - \frac{5}{2}\frac{c_1}{c_a}\frac{1}{r^2}\right)\cos\left(\frac{x}{r}\right)\right\} \cdot e^{-\left(\frac{2h_0 p}{c_a q} + \frac{5\,k_a}{c_a r^2}\right) \cdot t}$$

$$+ A_3 \cdot \cos\left(\frac{3x}{r}\right) \cdot e^{-\left(\frac{h_0 p}{c_a q} + \frac{9\,k_a}{c_a}\frac{1}{r^2}\right) \cdot t}$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Werden die Constanten $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ so bestimmt, dass die Anfangsbedingung:

$$\text{für } t = 0 \text{ ist } \quad v = v_0$$

erfüllt wird, so befriedigt die angegebene Lösung alle vorgeschriebenen Bedingungen. Auf diese Constantenbestimmung soll hier nicht näher eingegangen werden; es genügt hier die Bemerkung, dass A_n mit wachsender Indexzahl rasch an Grösse abnimmt.

Von diesem allgemeinen Temperaturausdruck bleiben schon nach kurzer Zeit seit Beginn der Abkühlung des Ringes nur die ersten Glieder bestehen; von diesen können alle Terme mit dem Factor $\cos\left(\frac{2x}{r}\right)$ gleich Null gemacht werden, wenn die Abkühlung des Ringes in den Abcissenorten $x = \frac{2r\pi}{8}$ und $x = 5 \,.\, \frac{2r\pi}{8}$ beobachtet wird. Von den allerersten Zeitmomenten seit Beginn der Abkühlung abgesehen ist also der Ausdruck des Ueberschusses der Ringtemperatur in x über die Temperatur der Umgebung zur Zeit t:

$$v = A_0 \cdot e^{-\frac{h_0 p}{c_a q} \cdot t} + A_0^2 \left(\frac{h_1}{h_0} - \frac{c_1}{c_a}\right) \cdot e^{-\frac{2h_0 p}{c_a q} \cdot t}$$

$$+ A_1 \cdot \cos\left(\frac{x}{r}\right) \cdot e^{-\left(\frac{h_0 p}{c_a q} + \frac{k_a}{c_a}\frac{1}{r^2}\right) \cdot t} +$$

$$+ 2A_0 A_1 \left\{\frac{h_1}{h_0} - \frac{c_1}{c_a} - \frac{k_a \cdot q}{2h_0 p}\frac{1}{r^2}\left(\frac{k_1}{k_a} + \frac{c_1}{c_a}\right)\right\} . \cos\left(\frac{x}{r}\right) . e^{-\left(\frac{2h_0 p}{c_a q} + \frac{k_a}{c_a}\frac{1}{r^2}\right) . t}$$

Die halbe Summe der in den Ringquerschnitten $x = \frac{2r\pi}{8}$ und $x = 5 \,.\, \frac{2r\pi}{8}$ stattfindenden Temperaturüberschüsse beträgt demnach nach Ablauf einer gewissen Zeit:

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = \Sigma = A_0 \cdot e^{-\frac{h_0 p}{c_a q} \cdot t} \left\{1 + A_0 \left(\frac{h_1}{h_0} - \frac{c_1}{c_a}\right) \cdot e^{-\frac{h_0 p}{c_a q} \cdot t}\right\}$$

Durch Beobachtung des zeitlichen Verlaufes dieser halben Summe lässt sich erstens der Werth $\frac{h_0 p}{c_a q}$ und zweitens der Coefficient $\left(\frac{h_1}{h_0} - \frac{c_1}{c_a}\right)$ bestimmen; daraus sind durch Bestimmung der specifischen Wärme und durch Ausmessung der Grössen p und q die absoluten Werthe von h_0 und h_1 ableitbar.

Als allgemeines Resultat hat sich bei der Ausführung der Beobachtungen ergeben, dass h_0 und

h_1 für alle untersuchten Metalle für gleiche Form und gleiche Dimensionen die gleichen Werthe besitzen.

Die halbe Differenz der in den Ringquerschnitten $x = \frac{2r\pi}{8}$ und $x = 5 \cdot \frac{2r\pi}{8}$ vorkommenden Temperaturüberschüsse beträgt:

$$\frac{v_1 - v_2}{2} = \varDelta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot A_1 \cdot e^{-\left(\frac{h_0 p}{c_a q} + \frac{k_a}{c_a} \frac{1}{r^2}\right) \cdot t} + .$$

$$+ \sqrt{2} A_0 . A_1 \left\{ \frac{h_1}{h_0} - \frac{c_1}{c_a} - \frac{k_a q}{2 h_0 p} \frac{1}{r^2} \left(\frac{k_1}{k_a} + \frac{c_1}{c_a} \right) \right\} \cdot e^{-\left(\frac{2 h_0 p}{c_a q} + \frac{k_a}{c_a} \frac{1}{r^2}\right) \cdot t}$$

Der kleine Werth des zweiten Gliedes dieses Ausdrucks wurde nach vorhergegangener Messung des Coefficienten $\left(\frac{h_1}{h_0} - \frac{c_1}{c_a}\right)$ und nach vorhergegangener approximativer Messung von $\left(\frac{k_1}{k_a} + \frac{c_1}{c_a}\right)$ durch passende Wahl der Grössen, r, p und q verschwindend klein gemacht. So blieb:

$$\varDelta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot A_1 \cdot e^{-\left(\frac{h_0 p}{c_a q} + \frac{k_a}{c_a} \frac{1}{r^2}\right) \cdot t}$$

Durch die Ermittlung des zeitlichen Verlaufes dieser halben Temperaturdifferenz liess sich die Summe

$$\frac{h_0 p}{c_a q} + \frac{k_a}{c_a} \frac{1}{r^2}$$

finden und hieraus liess sich mit Hülfe des oben für $\frac{h_0 p}{c_a q}$ gefundenen Werthes auch die Grösse $\frac{k_a}{c_a} \frac{1}{r^2}$, und daraus k_a bestimmen.

Wurde eine zweite Beobachtungsreihe für die äussere Temperatur $u_a = 0^\circ$ unternommen, so gestattete diese den

Werth von k_0 abzuleiten. Aus der Combination der beiden Beobachtungsreihen liess sich sodann auch die Grösse k_1 ermitteln.

Ich führe in diesem Auszuge nur diejenigen absoluten Werthe des Wärmeleitungsvermögens k an, die ich für die Temperatur 0° erhalten habe. Werden Gramm, Centimeter, Secunde und 1° C. als Einheiten zu Grunde gelegt, so sind die für 0° gefundenen Wärmeleitungsvermögen für:

	k_0
Kupfer [1])	0.8190
Silber [2])	1.0960
Cadmium [3])	0.2213
Zink [4])	0.3056
Messing [5])	0.1500
Zinn [6])	0.1446

3. Für dieselben unveränderten Ringe wurde ferner der absolute Werth des electrischen Leitungsvermögens nach electromagnetischem Maasse mittelst der electromagnetischen Dämpfung bestimmt.

Der Ring, dessen electrisches Leitungsvermögen gemessen werden sollte, wurde auf einen Holzrahmen so aufgesetzt, dass die Ebene seiner Mittellinie vertical und parallel dem magnetischen Meridian stund. In unmittelbarer Nähe des Ringes hing ein kräftiger Magnet; seine Mitte lag auf der Ringaxe und stand von der Mittelebene des Ringes nur um die kleine Länge d ab. Die Länge des Magnets war so klein gewählt, dass die fünften und höheren Potenzen des Quotienten aus dem Ringhalbmesser

[1]) Käufliches Kupfer.
[2]) Chemisch rein.
[3]) Chemisch rein.
[4]) Chemisch rein.
[5]) Käufliches Messing.
[6]) Chemisch rein.

r in die halbe Länge des Magnets als verschwindend klein gegen 1 betrachtet werden konnten, dass also der Magnet durch ein System zweier einfacher magnetischer Massenpuncte im Abstande $2l$ ersetzt werden durfte.

Bedeuten λ_1 und T_1 logarithmisches Decrement und Schwingungsdauer des Magnets für den Fall, dass die dämpfende Wirkung des Metallringes nicht vorhanden ist,

bedeuten λ_2 und T_2 die Werthe, welche logarithmisches Decrement und Schwingungsdauer unter der dämpfenden Einwirkung des Ringes annehmen, stellt M das magnetische Moment, Q das Trägheitsmoment des schwingenden Magnets und S die Grösse

$$S = \frac{2\pi r^2}{\sqrt{r^2 + d^2}^3} \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{l^2 (r^2 - 4d^2)}{(r^2 + d^2)^2} \right\}$$

dar, so ist der gesammte electrische Widerstand des Ringes in absolutem electromagnetischem Maasse:

$$W = \frac{M^2 \cdot S^2 \cdot T_1}{2\,Q \left\{ \lambda_2 \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_1^2}{\pi^2 + \lambda_2^2}} - \lambda_1 \right\}}$$

oder

$$= S^2 \cdot \frac{M}{H} \cdot \frac{1}{2T_1(1 + \Theta)} \cdot \frac{\pi^2 + \lambda_1^2}{\lambda_2 \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_1^2}{\pi^2 + \lambda_2^2}} - \lambda_1}$$

wo H die am Beobachtungsort stattfindende horizontale Componente der erdmagnetischen Kraft und Θ das Verhältniss aus der Torsionsconstante des den Magneten tragenden Fadens zum Producte $M.H$ bedeutet.

Verstehen wir nun unter der specifischen electrischen Leitungsfähigkeit $\varkappa$ der Ringsubstanz das Leitungsvermögen eines aus dieser Substanz geformten Würfels von der Kantenlänge 1, so erhalten wir für diese Grösse aus dem soeben angegebenen Werthe des gesammten Widerstandes W den folgenden Ausdruck:

$$\varkappa = \frac{2r\pi}{q \cdot S^2} \cdot \frac{H}{M} \cdot \frac{2T_1(1+\Theta)}{\pi^2+\lambda_1^2}\left(\cdot \lambda_2 \sqrt{\frac{\pi^2+\lambda_1^2}{\pi^2+\lambda_2^2}} - \lambda_1 \right)$$

Die Grössen $\frac{M}{H}$, l und Θ wurden zu Anfang und am Ende einer jeden Versuchsreihe nach den von Gauss eingeführten Verfahrungsweisen ermittelt; Schwingungsdauer und logarithmisches Decrement wurden ebenfalls nach den von Gauss gegebenen Vorschriften beobachtet. Eine jede der in den Ausdruck für $\varkappa$ eingehenden Grössen konnte so genau gemessen werden, dass der gesammte für $\varkappa$ resultirende Fehler den Werth $^1/_2\,{}^0/_0$ unmöglich übersteigen konnte.

Nach diesem Verfahren habe ich für die oben genannten sechs Metallringe die specifische electrische Leitungsfähigkeit für zwei verschiedene Temperaturen gemessen und daraus ihre Werthe für die Temperatur 0^0 und die Coefficienten α ihrer Abnahme für 1^0 Temperatursteigung nach der üblichen Formel berechnet:

$$\varkappa = \varkappa_0 \left\{ 1 - \alpha \cdot u \right\}$$

Die für 0^0 gefundenen specifischen electrischen Leitungsvermögen dieser sechs Metalle sind wenn Centimeter und Secunde als Maasseinheiten zu Grunde gelegt werden:

	$\varkappa_0$
Kupfer	40.81×10^{-5}
Silber	65.87×10^{-5}
Cadmium	14.61×10^{-5}
Zink	17.43×10^{-5}
Messing	7.62×10^{-5}
Zinn	10.34×10^{-5}

4. Der Quotient aus dem electrischen Leitungsvermögen bei 0° in das Wärmeleitungsvermögen bei 0° ist demnach:

	$\frac{k_0}{\varkappa_0}$
für Kupfer	$0.2007 \times 10^{+4}$
für Silber	$0.1664 \times 10^{+4}$
für Cadmium	$0.1515 \times 10^{+4}$
für Zink	$0.1753 \times 10^{+4}$
für Messing	$0.1968 \times 10^{+4}$
für Zinn	$0.1398 \times 10^{+4}$

Dieser Quotient ist also von Metall zu Metall variabel; die von Forbes und Wiedemann und Franz wahrscheinlich gemachte und von F. E. Neumann und R. Lenz behauptete Constanz dieses Quotienten ist nicht vorhanden. Da ich die electrische Leitungsfähigkeit bis auf die Genauigkeit von ½ % zu bestimmen vermochte, da die zur Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens benutzte Methode kaum einen Fehler von 1 % liefern konnte, da ferner die Messung beider Leitungsvermögen immer an genau demselben Ringe vollzogen wurde, der dabei keinerlei Abänderung, weder in materieller noch in formeller Richtung, unterworfen wurde, halte ich dieses Ergebniss für völlig begründet.

Eine aufmerksame Durchmusterung der erhaltenen Quotienten der beiden Leitungsvermögen lehrt aber, dass dieselben in engster Abhängigkeit von der specifischen Wärme der Volumeneinheit stehen. Dieses tritt sofort aus der folgenden Tabelle hervor, in welcher diese sechs Metalle nach der Grösse der specifischen Wärme der Volumeneinheit c_0 geordnet sind:

	c_0	k_0	$\varkappa_0$	$\frac{k_0}{\varkappa_0}$
Kupfer	0.827	0.8190	40.81×10^{-5}	$0.2007 \times 10^{+4}$
Messing	0.791	0.1500	7.62×10^{-5}	$0.1968 \times 10^{+4}$
Zink	0.662	0.3056	17.43×10^{-5}	$0.1753 \times 10^{+4}$
Silber	0.573	1.0960	65.87×10^{-5}	$0.1664 \times 10^{+4}$
Cadmium	0.475	0.2213	14.61×10^{-5}	$0.1515 \times 10^{+4}$
Zinn	0.380	0.1446	10.34×10^{-5}	$0.1398 \times 10^{+4}$

Mit abnehmender specifischer Wärme der Volumeneinheit nimmt auch der Quotient $\frac{k_0}{\varkappa_0}$ in der regelmässigsten Weise ab. Eine nähere Vergleichung der Zahlen zeigt, dass die Variationen des Quotienten $\frac{k_0}{\varkappa_0}$ den Variationen der specifischen Wärme der Volumeneinheit proportional sind. Setzt man

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = a + b \cdot c_0$$

und bestimmt die beiden Grössen a und b aus den Beobachtungen, die an den beiden Metallen mit den extremsten Werthen von c_0, an Kupfer und Zinn, ausgeführt wurden, so erhält man für a den Werth $0.0880 \times 10^{+4}$ und für b den Werth $0.1365 \times 10^{+4}$. Die mit Hülfe dieser Werthe für die übrigen vier Metalle berechneten Quotienten $\frac{k_0}{\varkappa_0}$ sind:

	$\frac{k_0}{\varkappa_0}$ (berechnet)	$\frac{k_0}{\varkappa_0}$ (beobachtet)
Messing	$0{,}1960 \times 10^{+4}$	$0.1968 \times 10^{+4}$
Zink	$0.1784 \times 10^{+4}$	$0.1753 \times 10^{+4}$
Silber	$0.1664 \times 10^{+4}$	$0.1662 \times 10^{+4}$
Cadmium	$0.1528 \times 10^{+4}$	$0.1515 \times 10^{+4}$

Der in diesen Zahlen sich aussprechende, verhältnissmässig hohe Grad von Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen des Quotienten $\frac{k_0}{\varkappa_0}$ lässt es wohl als höchst wahrscheinlich erscheinen, dass die Beziehung

$$k_0 = \varkappa_0 \left\{ a + b \cdot c_0 \right\}$$

Ausdruck der Wirklichkeit ist.

5. Nach dem in (2) beschriebenen Verfahren zur Bestimmung der absoluten Wärmeleitungsfähigkeit können nur für verhältnissmässig gute Wärmeleiter ganz sichere Resultate gewonnen werden. Für schlechtere Wärmeleiter, wie Blei, Wismuth u. A. wird der Einfluss der äusseren Wärmeleitung auf den zeitlichen Verlauf der Differenz der Temperaturen je zweier diametral gegenüberliegender Ringstellen ein viel zu grosser, als dass die Grösse des inneren Wärmeleitungsvermögens ganz sicher ermittelt werden könnte, weil jeder kleine, in der Ermittlung des äusseren Wärmeleitungsvermögens begangene Fehler den aus den Beobachtungen berechneten Werth des inneren Wärmeleitungsvermögens ganz erheblich fälscht. Die soeben constatirte Beziehung zwischen dem Wärmeleitungsvermögen und dem electrischen Leitungsvermögen liess es aber als wünschenswerth erscheinen, auch die schlechter leitenden Metalle auf das Verhältniss ihrer beiden Leitungsvermögen zu untersuchen.

Ich habe desswegen zur Bestimmung des absoluten Wärmeleitungsvermögens schlechter metallischer Leiter ein anderes Verfahren benutzt, das dem Verfahren nachgebildet ist, mittelst dessen ich im vorigen Jahre das absolute Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeiten bestimmt habe.

Die nach diesem Verfahren auf das Wärmeleitungsvermögen zu untersuchende Substanz hat die Form eines flachen Kreis-Cylinders. Ursprünglich besitzen alle Massenpuncte des Cylinders die gleiche Temperatur u_0 (etwa die gerade vorhandene Zimmertemperatur); von einem bestimmten Zeitmomente an, der als Moment Null genommen werden soll, wird die Mantelfläche dieses Cylinders und die nächste Umgebung seiner beiden freien Basisflächen auf eine um einige Grade niedrigere Temperatur u_a (auf die Temperatur des Wassers der Wasserleitung) gebracht und dauernd auf dieser Temperatur erhalten.

Aus dem zeitlichen Verlaufe, welchen die Temperatur der Mitte der oberen oder unteren Basisfläche während dieser Abkühlung zeigt, lässt sich die Grösse des inneren Wärmeleitungsvermögens der Cylindersubstanz herausfinden, sobald der Werth ihres äusseren Wärmeleitungsvermögens approximativ bekannt ist.

Der Ausdruck für den zeitlichen Verlauf der Temperatur irgend eines Massenpunctes des sich abkühlenden Cylinders soll zunächst entwickelt werden. Da bei diesem Verfahren die Temperatur des Cylinders nur innerhalb eines Intervalles von einigen Graden schwankt, da die innere Wärmeleitungsfähigkeit aller festen Metalle mit steigender Temperatur nur sehr wenig abnimmt und der Vorgang der äusseren Wärmeleitung auf den zeitlichen Verlauf der Abkühlung in diesem Falle nur einen ganz untergeordneten Einfluss ausübt, darf bei dieser Entwicklung ganz unbedenklich angenommen werden, dass die specifische Wärme der Volumeneinheit und die beiden Wärmeleitungsvermögen mit der Temperatur unveränderlich sind. Wir legen ein cylindrisches Coordinatensystem (r, φ, x) zu Grunde, das seinen Ursprung in der Mitte des Cylinders hat; $2l$ sei die Höhe des Cylinders, R sei sein Radius. Nach der Anordnung des Versuches ist die Temperatur u in jedem Zeitmoment t von der Richtung der φ unabhängig; es hat also der Ueberschuss v der Cylindertemperatur u in (x, r, φ) über die Temperatur u_a der Hülle und der Mantelfläche in jedem Zeitmomente die partielle Differentialgleichung zu erfüllen:

$$c\frac{\partial v}{\partial t} = k\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Die Lösung dieser Gleichung hat den drei Grenzgleichungen zu genügen:

$$\text{für } r = R \qquad \text{ist } v = 0 \text{ für jedes } t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{für } x = +l \qquad \left.\begin{array}{l}\text{ist } k\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=+l} + hv_{x=+l} = 0 \\ \text{für jedes } t\end{array}\right\} \ldots (3)$$

$$\text{für } x = -l \qquad \left.\begin{array}{l}\text{ist} -k\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=-l} + hv_{x=-l} = 0 \\ \text{für jedes } t\end{array}\right\} \ldots (4)$$

und als Anfangsbedingung gilt:

$$v = v_0 = u_0 - u_a \left\{\begin{array}{l}\text{für } t = 0 \\ \text{für alle } r \text{ und alle } x\end{array}\right\} \ldots (5)$$

Als allgemeine Lösung, welche die Differentialgleichung (1) erfüllt und alle Bedingungsgleichungen befriedigt ergiebt sich:

$$v = \left\{ A_1 \cdot \cos(q_1 x) \cdot e^{-\frac{k}{c} q_1^2 . t} + A_2 . \cos(q_2 x) . e^{-\frac{k}{c} q_2^2 . t} + \right.$$

$$\left. + A_3 \cdot \cos(q_3 x) \cdot e^{-\frac{k}{c} q_3^2 . t} + \ldots \right\} \times$$

$$\left\{ B_1 \cdot \overset{0}{J}_{(m_1 r)} \cdot e^{-\frac{k}{c} m_1^2 \cdot t} + B_2 \cdot \overset{0}{J}_{(m_2 r)} \cdot e^{-\frac{k}{c} m_2^2 \cdot t} + \right.$$

$$\left. + B_3 \cdot \overset{0}{J}_{(m_3 r)} \cdot e^{-\frac{k}{c} m_3^2 \cdot t} + \ldots \right\}$$

wo $\overset{0}{J}_{(mr)}$ die Bessel'sche Function erster Art mit dem Index 0 und dem Argument mr bedeutet, wo die $q_1, q_2, q_3, \ldots$ die auf einander folgenden Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$ql \; tg\,(ql) = \frac{h}{k} \cdot l$$

darstellen, wo die $m_1, m_2, m_3, \ldots$ die auf einander folgenden Wurzeln der Function $\overset{0}{J}_{mR}$ sind und wo endlich die Constanten A_n und B_n die Bedeutung haben:

$$A_n = \frac{4\,(u_0 - u_a) \sin\,(q_n l)}{2\,q_n l + \sin\,(2\,q_n l)} \qquad B_n = \frac{2}{R} \cdot \frac{1}{\overset{1}{J}_{(m_n R)}}$$

Die Quadrate der Wurzelwerthe q und der Wurzelwerthe m wachsen mit steigender Indexzahl n so rasch, dass alle auf das erste Glied folgenden Glieder des obigen allgemeinen Temperaturausdruckes schon nach wenigen Minuten seit Beginn der Abkühlung völlig bedeutungslos sind. Von dieser Zeit an ist dann:

$$v = A_1 \,.\, B_1 \,.\cos\,(q_1 x)\; \overset{0}{J}_{(m_1 r)} \cdot e^{-\frac{k}{c}(q_1^2 + m_1^2) \cdot t}$$

d. h. da $m_1^{\,2} = \frac{5.76..}{R_2}$ und $q_1^{\,2}$ sehr angenähert gleich $\frac{h}{k}\,\frac{1}{l}$ ist,

$$v = A_1 . B_1 . \cos\left(\sqrt{\frac{h}{k}\frac{1}{l}}x\right) \cdot J^0_{\left(\frac{2.40\ldots}{R}r\right)} \cdot e^{-\left(\frac{5.76\ldots}{R^2}\frac{k}{c} + \frac{k}{l.c}\right) \cdot t}$$

Wird also von den ersten Minuten der Abkühlung abgesehen, so ist der zeitliche Verlauf des Temperaturüberschusses für die Mitte der oberen oder unteren Basisfläche des abgekühlten Cylinders:

$$v = A_1 B_1 \cos\left(\sqrt{\frac{hl}{k}}\right) \cdot e^{-\left(\frac{5.76\ldots}{R^2}\frac{k}{c} + \frac{h}{l.c}\right) \cdot t}$$

Aus dem gemessenen zeitlichen Verlaufe dieses Temperaturüberschusses lässt sich die Grösse

$$\frac{5.76\ldots}{R_2} \cdot \frac{k}{c} + \frac{h}{l.c}$$

und daraus der Werth k finden, sobald der im Vergleich zu $\frac{5.76\ldots}{R^2} \cdot \frac{k}{c}$ sehr klein gemachte Werth $\frac{h}{l.c}$ angenähert bekannt ist.

Der gefundene Werth von k ist auf die benutzte mittlere Abkühlungstemperatur zu beziehen, welche in den ausgeführten Versuchen zwischen 6° und 8° lag.

Nach diesem Verfahren wurden für Blei, Wood'sches Metall und Wismuth Versuche ausgeführt und folgende Werthe für die Wärmeleitungsfähigkeit dieser Substanzen gewonnen:

	k	
Blei [1]	0.0719	Gramm, Centimeter, Secunde u. 1° C. als Einheiten zu Grunde gelegt und gültig für die mittlere Temperatur +7°.
Wood'sches Metall [2]	0.0319	
Wismuth [3]	0.0108	

[1] Chemisch rein.
[2] Chemisch rein.
[3] Chemisch rein.

Hierauf wurden aus den zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit benutzten kreisförmigen Platten Ringe ausgedreht und an diesen die electrische Leitungsfähigkeit nach der in (3) geschilderten Methode bestimmt. Die gefundenen, auf die Temperatur + 7° reducirten electrischen Leitungsfähigkeiten sind:

	$\varkappa$
Blei	5.350×10^{-5}
Wood'sches Metall	2.313×10^{-5}
Wismuth	0.838×10^{-5}

Daraus ergeben sich die folgenden Quotienten $\frac{k}{\varkappa}$:

	$\frac{k}{\varkappa}$
für Blei	$0.1345 \times 10^{+4}$
für Wood'sches Metall	$0.1379 \times 10^{+4}$
für Wismuth	$0.1288 \times 10^{+4}$

Der nach der Beziehung

$$\frac{k}{\varkappa} = 0.0880 \times 10^{+4} + 0.1365 \times 10^{+4} . c$$

aus der specifischen Wärme der Volumeneinheit berechnete Werth dieses Quotienten ist:

	c	$\frac{k}{\varkappa}$
für Blei	0.340	$0.1344 \times 10^{+4}$
für Wood'sches Metall	0.371	$0.1378 \times 10^{+4}$
für Wismuth	0.293	$0.1280 \times 10^{+4}$

Die für die guten metallischen Leiter gefundene Beziehung zwischen den beiden Leitungsvermögen hat also auch noch für die schlechter leitenden Metalle Gültigkeit.

Als zehnte Substanz, welche die angegebene Beziehung erfüllt, füge ich noch das Quecksilber bei. In meiner

Untersuchung über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten habe ich das absolute Wärmeleitungsvermögen des Quecksilbers in der Nähe von 0° gleich 0.0152 gefunden und in einer früheren Arbeit habe ich den absoluten Werth des electrischen Leitungsvermögens des Quecksilbers bei 0° gleich 1.047×10^{-5} bestimmt. Der aus den Beobachtungen abgeleitete Werth des Quotienten der beiden Leitungsvermögen beträgt hiernach für Quecksilber $0.1452 \times 10^{+4}$. Aus der Beziehung

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 0.0880 \times 10^{+4} + 0.1365 \times 10^{+4} \cdot c_0$$

berechnet er sich für

$$c_0 = 0.441 \quad \text{zu} \quad 0.1480 \times 10^{+4}$$

Auch Quecksilber fügt sich also mit grosser Annäherung der angegebenen Beziehung zwischen den beiden Leiuntgsvermögen.

Ich stelle jetzt in der folgenden Tabelle alle gefundenen Resultate zusammen und gebe in der letzten Columne den nach der Gleichung $k_0 = \varkappa_0 (a + b \cdot c_0)$ berechneten Werth des Quotienten $\frac{k_0}{\varkappa_0}$, der sich auf diejenigen Werthe von a und b stützt, die aus allen Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet wurden.

	c_0	k_0	$\varkappa_0$	$\frac{k_0}{\varkappa_0}$	$a + b \cdot c_0$
Kupfer	0.827	0.8190	40.81×10^{-5}	$0.2007 \times 10^{+4}$	$0.2002 \times 10^{+4}$
Messing	0.791	0.1500	7.62×10^{-5}	$0.1968 \times 10^{+4}$	$0.1953 \times 10^{+4}$
Zink	0.662	0.3056	17.43×10^{-5}	$0.1753 \times 10^{+4}$	$0.1777 \times 10^{+4}$
Silber	0.573	1.0960	65.87×10^{-5}	$0.1664 \times 10^{+4}$	$0.1656 \times 10^{+4}$
Cadmium	0.475	0.2213	14.61×10^{-5}	$0.1515 \times 10^{+4}$	$0.1523 \times 10^{+4}$
Quecksilber	0.441	0.0152	1.047×10^{-5}	$0.1452 \times 10^{+4}$	$0.1475 \times 10^{+4}$

	c^0	k_0	$\varkappa_0$	$\frac{k_0}{\varkappa_0}$	$a + b . c_0$
Zinn	0.380	0.1446	10.34×10^{-5}	$0.1398 \times 10^{+4}$	$0.1394 \times 10^{+4}$
Wood	0.371	0.0319	2.313×10^{-5}	$0.1379 \times 10^{+4}$	$0.1373 \times 10^{+4}$
Blei	0.340	0.0719	5.351×10^{-5}	$0.1345 \times 10^{+4}$	$0.1339 + 10^{+4}$
Wismuth	0.293	0.0108	0.838×10^{-5}	$0.1288 \times 10^{+4}$	$0.1275 \times 10^{+4}$

$$\left. \begin{aligned} a &= 0.0877 \times 10^{+4} \\ b &= 0.1360 \times 10^{+4} \end{aligned} \right\}$$

Das Eisen konnte ich nicht auf die Beziehung zwischen den beiden Leitungsvermögen untersuchen, da die von mir gewählte Methode zur Bestimmung der electrischen Leitungsfähigkeit die Benutzung des Eisens ausschloss.

7. Auch für die Amalgame scheint die gefundene Beziehung zwischen den beiden Leitungsvermögen gültig zu sein. Eine daraufhin gerichtete Untersuchung der HH. Tuchschmid und G. Weber, die in nächster Zeit zum Abschluss kommt, wird darüber näheren Aufschluss geben.

Die nichtmetallischen, aber Wärme und Electricität leitenden Substanzen fügen sich jedoch dieser Beziehung nicht; für die Kohle, für welche gegenwärtig Hr. E. Zeller ausführliche Versuche anstellt, ist z. B. die wirkliche Wärmeleitungsfähigkeit mindestens 10 bis 20 mal grösser als diejenige Wärmeleitungsfähigkeit, welche sich nach der obigen Relation aus dem electrischen Leitungsvermögen und der specifischen Wärme berechnet.

Die gefundene Beziehung zwischen den beiden Leitungsvermögen scheint also an die metallische Natur der Substanzen gebunden zu sein.

8. Das Wärmeleitungsvermögen aller bisher von mir untersuchten festen Metalle nimmt mit steigender Tem-

peratur ab und zwar für die verschiedenen Metalle in nicht sehr verschiedenem Grade; für alle untersuchten festen Metalle fand ich diese Abnahme der Wärmeleitungsfähigkeit ganz erheblich kleiner als die Abnahme der electrischen Leitungsfähigkeit. Die in dem oben gegebenen Zusammenhang der beiden Leitungsvermögen vorkommenden Grössen a und b sind demnach Functionen der Temperatur. Weitere und feinere Untersuchungen müssen die Natur dieser Functionen darlegen.

9. Zum Schluss will ich noch hervorheben, dass die von mir gefundenen Resultate in bester Uebereinstimmung mit den Ergebnissen stehen, zu welchen die HH. R. Lenz und F. E. Neumann gelangt sind.

Hr. Lenz untersuchte die vier Metalle Kupfer, Messing, Neusilber und Eisen auf ihre Leitungsfähigkeit für Wärme und Electricität und fand, dass der Quotient aus dem relativ gemessenen electrischen Leitungsvermögen in das relativ gemessene Wärmeleitungsvermögen für diese vier Metalle fast vollkommen derselbe ist. Er glaubte daraus folgern zu dürfen, dass dieses für alle Metalle Statt findet. Diese Schlussfolgerung ist unzulässig, obschon das für die vier genannten Metalle gefundene Resultat vollkommen richtig ist. Diese vier Metalle Kupfer, Messing, Neusilber und Eisen besitzen nämlich fast genau dieselbe specifische Wärme der Volumeneinheit — die entsprechenden Werthe sind 0.83, 0.80, 0.80 und 0.84 — und sie liefern desswegen auch fast genau denselben Quotienten aus dem electrischen Leitungsvermögen in das Wärmeleitungsvermögen.

Hr. F. E. Neumann hat in seinen Untersuchungen über die Wärmeleitung in Metallen nur für die fünf Metalle Kupfer, Messing, Zink, Neusilber und Eisen das absolute Wärmeleitungsvermögen und das relative electrische Leitungsvermögen gemessen. Aus seinen Messungen ergiebt sich der Mittelwerth des Quotienten aus der electrischen Leitungsfähigkeit in das Wärmeleitungsvermögen für die vier, nahezu die gleiche specifische Wärme der Volumeneinheit (0.82) besitzenden Metalle Kupfer, Messing, Neusilber und Eisen gleich 19.05, während sich der Quotient aus den beiden Leitungsvermögen für das Zink, dem die erheblich kleinere specifische Wärme der Volumeneinheit 0.67 zukommt, nur gleich 17.1 herausstellte. Aus diesen 2 Werthengruppen würde sich in der Relation

$$\frac{k}{\varkappa} = a + b \cdot c$$

die Grösse $a = 8.4$, die Grösse $b = 13.0$ und das Verhältniss $\frac{b}{a} = 1.545$ ergeben. Aus der von mir abgeleiteten Beziehung ergiebt sich das letztere Verhältniss gleich 1.550.

Notizen.

Ueber die frühern Versuche die Witterung vorauszubestimmen. Die Vorausbestimmung der Witterung ist schon oft und immer ohne Erfolg versucht worden. Zu den ältesten Methoden ist wol die Weissagung aus Zwiebelschalen und Salz zu rechnen, welche als blosse Spielerei keiner ernsten Widerlegung bedarf. Auch mit den Loostagen verhält es sich ähnlich, da diese Methode aus der Zeit stammt, wo nach dem alten Kalender gerechnet wurde, die Weihnacht also mindestens 10 Tage später eintrat. Die Rose von Jericho wird allmälig so selten, dass sie kaum mehr ernstlich als Wetterprophet benutzt wird. Ernster sieht es mit der Astrologie