

# Das Wärmeleitungsvermögen von Gneiss und seine Abhängigkeit von der Temperatur.

Von

Robert Weber.

Fourier ist in seiner klassischen Untersuchung über die Wärmeleitung von der Voraussetzung ausgegangen, dass die 4 Grössen: Dichte, specifische Wärme, äusseres Wärmeleitungsvermögen, inneres Wärmeleitungsvermögen von der Temperatur unabhängig sind.

Die Grössen der Wärmeleitungsvermögen sind bis jetzt hauptsächlich nach zwei Methoden bestimmt worden. Die eine ergibt das Verhältniss des Wärmeleitungsvermögens irgend eines Körpers zum Wärmeleitungsvermögen eines bestimmten (indessen willkürlich angenommenen) Körpers. Die andere Methode liefert die Werthe für beide Wärmeleitungsvermögen in absolutem Maass, d. h. sie giebt an, welche Wärmemenge in der Zeiteinheit (1 Sekunde) durch die Flächeneinheit (1 Q. Cm.) strömt, wenn die Differenz der Temperaturen an zwei parallelen um 1 Cm. von einander abstehenden Flächen constant gleich  $1^{\circ}$  ist. In diesen Einheiten ausgedrückt sollen die im Nachfolgenden gegebenen Zahlen verstanden sein.

Die wenigen Untersuchungen über Veränderlichkeit des inneren Wärmeleitungsvermögens  $k$  sind diejenigen von Angström, und diejenigen von Forbes, ausgeführt an Kupfer und Eisen, ausgeführt also für gute Wärmeleiter. Diese Untersuchungen ergaben, dass  $k$  langsam mit steigender Temperatur abnimmt. — Es benutzte nämlich Angström<sup>1)</sup> einen langen Metallstab von

<sup>1)</sup> Pogg. 114.

parallelepipedischer Form. Diesen erhitzte und erkältete er während bestimmten Zwischenzeiten  $T$ . Die entstehenden Temperatur-Max. und -Min. pflanzen sich im Stab fort, werden aber nach einiger Zeit constant. Theoretisch geht Angström aus von der allgemeinen Formel, welche für so geformte Stäbe gilt, nämlich von

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c \cdot \delta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h \cdot p}{c \cdot \delta \cdot w}$$

worin  $u$  die Temperatur,  $p$  den Perimeter,  $w$  den Querschnitt,  $\delta$  die Dichte des Metallstabes bezeichnet. Für zwei Querschnitte  $x = 0$  und  $x = l$  beobachtet er die Temperatur jede Minute, und zwar an *Hg.* Thermometern, welche in Quecksilber getaucht, in aequidistanten Löchern des Stabes stecken. Diese Beobachtungen genügen, um Beziehungen aufzustellen, welche bald auf den einfachen Ausdruck

$$k = c \cdot \delta \cdot \frac{\pi \cdot l^2}{\alpha \alpha' T}$$

führen. Aus den Beobachtungen können auf Grund der vorangegangenen Theorie für  $\alpha$  und  $\alpha'$  die Werthe berechnet werden. Die ihnen zugehörigen  $l$  und  $T$ , sowie  $c$  und  $\delta$  geben dann  $k$ . — In dieser Weise fand Angström

für Kupfer	$k = 0,9103$	$\left( \begin{smallmatrix} \text{cm.} \\ \text{gr.} \\ \text{sec.} \end{smallmatrix} \right)$
Eisen	$k = 0,1629$	

Forbes<sup>1)</sup> untersuchte das Leitungsvermögen der Metalle mittelst Stäben, indem er den stationären Temperaturzustand verband mit der Erkaltungsgeschwindigkeit des betreffenden Metalles. — Wenn nämlich ein Stab am einen Ende auf  $T^{\circ}$  über die Temperatur der Umgebung erhitzt wird, während sein anderes Ende in Folge seiner

<sup>1)</sup> Philos. Transactions.

Länge doch keine andere Temperatur als diejenige der Umgebung annimmt, so ist die Temperatur an der Stelle  $x$

$$t = T \cdot e^{-ax}, \text{ wo } a = \sqrt{\frac{h.p}{k.q}}$$

$T$  und  $a$  lassen sich berechnen, wenn man die Temperaturen an verschiedenen Stellen  $x$  des Stabes beobachtet. Die durch einen bestimmten Querschnitt gehende Wärmemenge wird hinter ihm ausgestrahlt. Diese Wärmemenge ist

$$W = -kq \frac{dt}{dx} = kqaTe^{-ax}$$

Dieselbe ist aber auch in anderer Ausdrucksweise

$$W = \int_x^l q \delta c v dx = q \delta c \int_x^l v dx$$

worin  $v$  die Erkaltungsgeschwindigkeit an irgend einer Stelle des Stabes bezeichnet. Die Grösse  $v$  bestimmte Forbes dadurch, dass er die Art der Abkühlung eines gleich beschaffenen Stabes beobachtete, welcher Stab zu Anfang in allen seinen Theilen die Temperatur der Stelle  $x$  angenommen hatte, und welcher auf die Temperatur der Um-

gebung sich abkühlte. Den Werth von  $\int_x^l v dx = F$  bildete Forbes auf graphische Weise. Nun war also

$$kqaTe^{-ax} = q\delta c F$$

oder

$$k = \frac{\delta \cdot c \cdot F}{a \cdot T \cdot e^{-ax}}$$

entsprechend einem bestimmten Querschnitt mit bestimmter Temperatur. Da verschiedene Querschnitte verschiedene Temperaturen haben, so musste sich  $k$  ändern, wenn über-

haupt  $k$  mit der Temperatur sich ändert. — Forbes fand,

dass für Eisen bei $0^\circ$	$k = 0,2070$	$\left(\begin{smallmatrix} \text{cm.} \\ \text{gr.} \\ \text{sec.} \end{smallmatrix}\right)$
$50^\circ$	$= 0,1772$	
$200^\circ$	$= 0,1357$	

Neumann giebt für Eisen	$k = 0,163$	$\left(\begin{smallmatrix} \text{cm.} \\ \text{gr.} \\ \text{sec.} \end{smallmatrix}\right)$
Kupfer	$k = 1,108$	

Für Substanzen mit sehr kleinem Leitungsvermögen ist bisher weder die Grösse des inneren Wärmeleitungsvermögens sehr genau bestimmt worden, noch ist eine Untersuchung auf die Grösse der Veränderlichkeit der Wärmeleitung solcher Substanzen angestellt worden. Es soll die Aufgabe der vorliegenden Arbeit sein, erstens genaue Werthe für die beiden Leitungsvermögen  $k$  und  $h$  zu finden, welche Werthe der mittleren Temperatur eines bestimmten kleinen Intervalls entsprechen; zweitens sollen diese kleinen Temperaturintervalle in möglichst verschiedener Höhe genommen werden, um eine allfällige Veränderlichkeit der Werthe für  $k$  und  $h$  sicher zu constatiren.

Die Untersuchung wurde an Gneiss vorgenommen, weil dieser in der Erdmasse in grosser Menge vorkommt, und daher die Resultate in geologischer Beziehung Interesse haben.

### Darstellung der Methode.

A. *Theoretischer Theil.* Zur Bestimmung der Wärmeleitungsvermögen wurde der variable Temperaturzustand des betreffenden Körpers benutzt. Der Körper wurde in Kugelform gebracht, weil diese Form für die Untersuchung die einfachste ist.

Eine Beziehung zwischen den Wärmeleitungsvermögen, der Temperatur, der Zeit u. s. f. für einen in Kugelform

gebrachten Körper veröffentlichte im Jahr 1811 M. Fourier in seiner «Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides». Wenn nämlich für eine bestimmte Zeit  $z$  die Temperatur eines Punktes  $t$  ist, welcher Punkt den Abstand  $r$  vom Mittelpunkt der Kugel mit dem Radius  $R$  hat, wenn die Kugel aus einem Zustand ganz gleichmässiger Temperatur zur Zeit  $z = 0$  in eine Umgebung von anderer constanter Temperatur  $T_u$ , von welcher an  $t$  gezählt ist, gebracht wird, wenn  $h$  das äussere,  $k$  das innere Wärmeleitungsvermögen,  $D$  die Dichte,  $c$  die specifische Wärme des festen Körpers bezeichnet, so ist nach Fourier a. a. O. die Wärmeleitung im Innern der Kugel durch die Differentialgleichungen bestimmt

$$\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{k}{cD} \left\{ \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{h}{k} t = 0 \quad \text{für } r = R \quad (2)$$

Ausserdem ist nach obiger Angabe

$$\text{für } z = 0 \text{ dann auch } t = T = C \text{ für alle } r \quad (3)$$

Die Gleichung (1) gilt für das Innere; Gleichung (2) für die Oberfläche. In beiden Gleichungen ist  $k$ ,  $h$ ,  $c$ ,  $D$  als constant angenommen. Diese Gleichungen werden jedoch auch noch gelten für den Fall, dass  $k$ ,  $h$ ,  $c$ ,  $D$  variabel sind, insofern die Veränderlichkeit eine sehr kleine ist, und man unter  $k$ ,  $h$ ,  $c$  die mittleren Werthe von denjenigen versteht, welche ihnen innerhalb eines kleinen Temperaturintervalls von etwa  $10^\circ$  eigentlich zukämen.

Die Differentialgleichung (1), welche dem Zustand im Innern entspricht und die Oberflächengleichung (2) werden leichter integrirt durch Einführung einer neuen Variablen  $s$ , welche mit den alten Variablen  $t$  und  $r$  in der Beziehung steht  $tr = s$ . Die beiden Gleichungen (1) und (2)

gehen dann über in

$$\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{k}{cD} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} \quad (4)$$

$$\frac{k}{r} \left( \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \frac{s}{r} \left( h - \frac{k}{r} \right) = 0 \quad \text{für } r = R \quad (5)$$

Ausserdem ist für  $r = 0$  dann auch  $s = 0$  für alle  $z$  (6)

und bleibt für  $z = 0$   $t = T = C$  für alle  $r$  (3)

Die Gleichung (4) wird erfüllt durch die Annahmen

$$s = A e^{-\alpha z} \sin(\beta r)$$

$$s = A e^{-\alpha z} \cos(\beta r)$$

Von diesen lässt aber die Bedingung (6) nur zu

$$s = A e^{-\alpha z} \sin(\beta r)$$

Es sind noch die Bedingungsgleichungen (Grenzgleichungen) (5) und (3) zu erfüllen. Dieses geschieht durch passende Wahl der Constanten in

$$s = A e^{-\alpha z} \sin(\beta r)$$

Damit die Differentialgleichung (4) erfüllt sei, müssen die Constanten  $\alpha$  und  $\beta$  in der Beziehung stehen

$$\alpha = \frac{k}{cD} \beta^2$$

wodurch man als particuläre Lösung von (4) erhält

$$s = A e^{-\frac{k}{cD} \beta^2 z} \sin(\beta r)$$

Damit ferner auch die Oberflächengleichung (5) erfüllt sei für dieses  $s$ , muss

$$\frac{\beta R}{1 - \frac{hR}{k}} = \operatorname{tg}(\beta R) \quad (7)$$

Die Wurzeln dieser transcendenten Gleichung seien, der Grösse nach geordnet

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$$

Dann ist die allgemeine Lösung von (4) gegeben in

$$s = \Sigma A_i \cdot \sin(\beta_i r) \cdot e^{-\frac{k}{cD} \beta_i^2 z} \quad (8)$$

In dieser Summe lassen sich die Constanten  $A_i$  aus dem Anfangszustand des Körpers, d. i. für  $z = 0$  bestimmen. Es wird nämlich (8) mit Hülfe von (3)

$$C = \frac{\Sigma A_i \cdot \sin(\beta_i r)}{r} \quad (9)$$

Multipliziert man hier beide Seiten mit  $r \cdot \sin(\beta_k r) \cdot dr$  und integrirt von  $r = 0$  bis  $r = R$ , so verschwinden rechts, da nach (7)

$$1 - \frac{hR}{k} = \frac{\beta_1 R}{\text{tg}(\beta_1 R)} = \frac{\beta_2 R}{\text{tg}(\beta_2 R)} = \dots$$

ist, alle Glieder mit Ausnahme des  $k$ ten:

$$\int_0^R A_x \sin^2(\beta_x r) dr$$

Hiernach wird aus (9)

$$C \int_0^R r \sin(\beta_x r) dr = A_x \int_0^R \sin^2(\beta_x r) dr$$

oder

$$C \frac{\sin(\beta_x R) - \beta_x R \cos(\beta_x R)}{\beta_x^2} = A_x \frac{1}{\beta_x} \left\{ \frac{\beta_x R}{2} - \frac{1}{2} \sin(\beta_x R) \cos(\beta_x R) \right\}$$

also

$$A_x = \frac{2}{\beta_x} \left\{ \frac{1 - \beta_x R \cotg(\beta_x R)}{\frac{\beta_x R}{\sin(\beta_x R)} - \cos(\beta_x R)} \right\} C$$

oder nach (7)

$$A_x = \frac{2 h R}{k \beta_x [\beta_x R \operatorname{cosec}(\beta_x R) - \cos(\beta_x R)]} C$$

Schliesslich ist demnach die allgemeine Lösung

$$t = \frac{2hR}{k} C \sum_i \frac{\sin(\beta_i r)}{\beta_i r [\beta_i R \operatorname{cosec}(\beta_i R) - \cos(\beta_i R)]} e^{-\frac{k}{cD} \beta_i^2 z} \quad (9)$$

worin die  $\beta_i$  sich bestimmen aus (7)

$$\frac{\beta R}{\operatorname{tg}(\beta R)} = 1 - \frac{hR}{k} \quad (10)$$

Die Gleichung (9) enthält  $h$  und  $k$ . Diese lassen sich also bestimmen, wenn die übrigen vorkommenden Grössen bestimmt sind. Vor allem aber ist zur Bestimmung von  $h$  und  $k$  sehr wünschbar, dass aus (9) eine einfachere, immerhin vollkommen genügende Form hergeleitet werde.

Die Wurzeln ( $\beta R$ ) der transcendenten Gleichung (10) liegen abwechselnd im 2. und 4. Quadranten und ihr Unterschied nähert sich asymptotisch der Grenze  $\pi$ . Mehr als irgend zwei aufeinander folgende Wurzeln ( $\beta R$ ) unterscheiden sich die beiden ersten von einander. Dasselbe gilt also auch für  $\beta_1$  und  $\beta_2$ . Diese  $\beta_i$  ändern sich etwa wie z. B.

$$0,9408 : 2,054 : 3,126 : \dots$$

Sie bewirken daher in doppelter Weise eine rasche Convergenz von (9). Einmal weil sie im Exponenten erscheinen und dann weil sie mit  $r$  multiplicirt das Argument des sinus sind. Es würden demnach schon 2 bis 3 Glieder von (9) genügen. Man kann sich aber geradezu auf das erste Glied von (9) beschränken, wenn man die seit Anfang verfllossene Zeit  $z$  bedeutend gross nimmt. Für diesen Fall bleibt

$$t = C \frac{2hR}{k} \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r [\beta_1 R \operatorname{cosec}(\beta_1 R) - \cos(\beta_1 R)]} e^{-\frac{k}{cD} \beta_1^2 z} \quad (11)$$

Ob dieses erste Glied wirklich genügen kann, wird



durch den Versuch entschieden werden können. Bestimmt man in gleichen Zeitabständen die Temperaturen an einer und derselben Stelle der Kugel, bleibt also  $r$  constant und entsprechen den Zeiten  $z_1, z_2, \dots$  die Temperaturen  $t_1, t_2, \dots$ ; bildet man dann die Quotienten dieser Temperaturen, so ergibt die Formel (11) für diesen Fall

$$\frac{t_1}{t_2} = e^{-\frac{k}{cD} \cdot \beta_1^2 (z_1 - z_2)} = \text{Const.} \quad (12)$$

Da die Differenzen  $z_1 - z_2, \dots, z_n - z_{n+1}, \dots$  nach Voraussetzung gleich sein sollen, so ist der Exponent, also auch die Potenz constant. Wenn nun auch, nachdem von Anfang an eine genügend lange Zeit verstrichen ist, die Beobachtung ergibt, dass der Quotient von je zwei sich folgenden Temperaturen constant ist, so wird die in (11) gemachte Reduction gerechtfertigt sein. — Die gemachten Messungen lieferten vollkommen befriedigende Resultate.

Eben diese Beziehung (12) ergibt nun durch Umkehrung

$$k = \frac{c \cdot D}{\beta_1^2 (z_2 - z_1)} \cdot 2,302585 \cdot \log \text{com} \frac{t_1}{t_2} \quad (13)$$

eine zur Berechnung von  $k$  sehr bequeme Formel, wenn  $\beta_1$  bekannt wäre.

Auch  $\beta_1$  ergibt sich leicht. Sind  $T_c$  und  $t_o$  die Temperaturen von zwei Punkten der Kugel, welche bezüglich die Abstände  $r_c$  und  $r_o$  vom Centrum haben, beide zu derselben Zeit  $z$ , so ist nach (9), wenn man noch zur Abkürzung

$$N_i = [\beta_i R \cdot \text{cosec} (\beta_i R) - \cos (\beta_i R)]$$

setzt,

$$T_c = C \cdot \frac{2hR}{k} \cdot \sum \frac{\sin (\beta_i r_c)}{\beta_i r_c \cdot N_i} \cdot e^{-\frac{k}{cD} \beta_i^2 z}$$

$$t_o = C \cdot \frac{2hR}{k} \cdot \sum \frac{\sin (\beta_i r_o)}{\beta_i r_o \cdot N_i} \cdot e^{-\frac{k}{cD} \beta_i^2 z}$$

und somit ihr Quotient

$$\frac{T_c}{t_o} = \frac{r_o}{r_c} \left\{ \frac{\sin(\beta_1 r_c)}{\sin(\beta_1 r_o)} + \right. \quad (14)$$

$$\left. + \frac{\sin(\beta_1 r_o) \sin(\beta_2 r_c) - \sin(\beta_1 r_1) \sin(\beta_2 r_o)}{\sin^2(\beta_1 r_o)} \frac{\beta_1 N_1}{\beta_2 N_2} e^{-\frac{kz}{cD}(\beta_2^2 - \beta_1^2)} + \dots \right\}$$

Immer noch gilt die Voraussetzung, es soll  $z$  sehr gross sein. Ein grosser Werth von  $z$  aber bewirkt, dass in (14) nur das erste Glied der unendlichen Reihe in Betracht kommt, da sich für diesen Fall (14) reduziert auf

$$\frac{T_c}{t_o} = \frac{\sin(\beta_1 r_c)}{r_c} : \frac{\sin(\beta_1 r_o)}{r_o}, \text{ d. i. Const.} \quad (15)$$

Noch einfacher wird die Beziehung, wenn man annimmt, es sei  $r_c = o$  und sei  $r_o$  nahezu  $R$ ; also  $T_c$  und  $t_o$  die Temperaturen am Centrum und bezüglich dicht unter der Oberfläche. Dann wird (15) zu

$$\frac{T_c}{t_o} = \frac{\beta_1 r_o}{\sin(\beta_1 r_o)} = \text{Const.} \quad (16)$$

Die Erfahrung zeigt übereinstimmend, dass  $\frac{T_c}{t_o} = \text{Const.}$  wird, sobald eine genügend lange Zeit  $z$  verstrichen ist. Diese aus einer Versuchsreihe entnommene Const.  $\frac{T_c}{t_o}$  muss also  $= \frac{\beta_1 r_o}{\sin(\beta_1 r_o)}$  sein. Hieraus ergibt sich  $\beta_1$ .

Nachdem so nach (16) das  $\beta_1$ , dann nach (13) das  $k$  bestimmt ist, ergibt sich ohne weiteres auch noch  $h$ . Durch Umformung von (7)

$$\frac{\beta_1 R}{1 - hR} = \text{tg}(\beta_1 R)$$

wird nämlich

$$h = \frac{k}{R} \left\{ 1 - \frac{\beta_1 R}{\text{tg}\beta_1 R} \right\} \quad (17)$$

*B. Experimenteller Theil.* Die Berechnung von  $\beta_1$ ,  $k$ ,  $h$  nach den Formeln (16), (13), (17) verlangt die Kenntniss von  $r_o$ ,  $R$ ; derselben Zeit entsprechende Werthe von  $T_c$  und  $t_o$ ; entsprechende Werthe von  $t$  und  $z$ , und noch  $c$  und  $D$ .

Von diesen Grössen lassen sich die Dichte  $D$ , die Kugelradien  $R$  und  $r_o$  ohne Schwierigkeit genau bestimmen. Grössere Schwierigkeiten bietet die genaue Bestimmung der specifischen Wärme  $c$ , sowie die genaue auf bestimmte Zeit fallende Temperaturbestimmung im Centrum und der Oberfläche der Kugel.

1) Für den später benutzten sehr feinkörnigen granitischen Gneiss ergab sich die Dichte  $D = 2,683$ .

2) Zur Bestimmung der specifischen Wärme  $c$  diente das Wassercalorimeter. Das Calorimetergefäss war aus dünnem Kupferblech gefertigt, und ebenso der Rührer. Das Gefäss (ohne Rührer) wog 27,266 gr. Bei den meisten Bestimmungen von  $c$  wurde dann so viel Wasser genommen, dass Wasser und Gefäss zusammen 230 gr. wogen. Der Wasserwerth  $m \gamma$  des Kupfergefässes sammt Rührer betrug 3,272 Calorien. Bevor eine Temperatur abgelesen wurde, und auch nachdem der Körper eingeworfen war, wurde das Wasser im Calorimeter stetig gerührt. Die Temperaturen wurden von 30 zu 30 Sekunden abgelesen.

Das Verfahren bei der Bestimmung der specifischen Wärme gründete sich auf folgende Gleichung

$$Mc (T-t) = (W+m\gamma) (t-t_o) + \text{Correctionsgrösse.}$$

Hierin bedeuten  $M, c, T$  das Gewicht, die spec. Wärme, und die Anfangstemperatur der zu untersuchenden Körper. Ferner  $W, t_o$  das Gewicht und die Anfangstemperatur des Wassers im Calorimeter; ferner  $m, \gamma$  Gewicht und spec. Wärme des Calorimetergefässes; endlich  $t$  die Maximal-

temperatur der Mischung. Die Correctionsgrösse soll den Wärmeverlust ersetzen, der von der Zeit des Einschüttens bis zur Zeit der Maximaltemperatur nothwendig auftritt. Diese Grösse ist offenbar der Zeit sowie der Temperaturdifferenz zwischen der Mischung und der äusseren Umgebung proportional.

Wenn man die Zwischentemperaturen  $t_0, t_1, t_2, \dots, \dots, t_n$  von der Temperatur beim Einschütten  $t_a$  bis zum Temperaturmaximum  $t_n$  der Mischung in gleichen Zeitabständen abliest, so ist die Correctionsgrösse

$$\begin{aligned} &= H \left\{ \left( \frac{t_0+t_1}{2} - t_a \right) + \left( \frac{t_1+t_2}{2} - t_a \right) + \dots + \left( \frac{t_{n-1}+t_n}{2} - t_a \right) \right\} \\ &= H \left\{ \frac{t_0+t_n}{2} + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} - nt_a \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

Zur Bestimmung der Constante  $H$  wurde folgender Weg eingeschlagen: Die bei jedem Versuch hergestellten Verhältnisse betreffend Wassermenge, Temperaturdifferenz gegen die Umgebung, u. s. f. waren dieselben. Nur wurde in das Wasser des Calorimeters kein Körper eingeworfen. Dann hatte man also die Beziehungen

$$H \left( \frac{t_1+t_2}{2} - t_a \right) = (W+m\gamma) (t_1-t_2)$$

$$H \left( \frac{t_2+t_3}{2} - t_a \right) = (W+m\gamma) (t_2-t_3)$$

.....

Somit durch Addition

$$H \left( \frac{t_1+t_n}{2} + t_2 + t_3 + \dots + t_{n-1} - nt_a \right) = (W+m\gamma) (t_1-t_n) \quad (20)$$

Hiernach ergab sich als Wärmemenge  $H$ , welche bei der Temperaturdifferenz von  $1^\circ$  per Minute für die genannte Anordnung vom Calorimeter nach der Umgebung abgegeben (oder aufgenommen) wurde

$$H = 0,0242 \text{ Calor.}$$

Bei den nun folgenden Gruppen von Versuchen wurden möglichst gleiche Anfangstemperaturen für den einzuwerfenden Körper und für das Wasser im Calorimeter herzustellen gesucht. Die negativen Temperaturen wurden gemessen mit Hilfe eines Thermoelementes in einer Weise, welche später angegeben wird. Die eine Löthstelle des Thermoelementes reichte dabei in die Mitte eines dünnwandigen, cylindrischen Kupfergefässes von etwa 12 Cm. Länge und 2,5 Cm. Durchmesser, in welchem Gefäss passende Stücke des Körpers lagen. Das Ganze wurde wohl verschlossen etwa eine Stunde lang in einer Kältemischung von gegen  $-21,6^{\circ}$  gehalten, bevor der Körper ins Calorimeterwasser gebracht wurde. Die Anfangstemperatur  $T$  wurde gemessen, als der Körper im Gefäss noch in der Kältemischung sich befand. Die Ablesung wurde erst gemacht, nachdem innerhalb 5 Minuten sich die Temperatur nicht mehr um  $\frac{1}{70}$  Grad veränderte.

Dem Körper konnte dadurch eine in allen seinen Theilen gleichmässige höhere Temperatur beigebracht werden, dass das ihn fassende Gefäss von Dämpfen siedenden Wassers lebhaft umströmt wurde. Die Temperatur dieser Dämpfe wurde angegeben durch den Barometerstand.

Die constante hohe Temperatur von etwa  $200^{\circ}$  wurde durch ein Oelbad hergestellt. In dieses Oel tauchte ein Hg.-Thermometer, und neben dieses das cylindrische, dünnwandige Glasgefäss, welches die Substanz enthielt. Das Oel wurde umgerührt, und dann die Temperatur nicht eher abgelesen, als bis sie sich innerhalb einer halben Stunde nicht um mehr als  $1^{\circ}$  änderte.

Die in solcher Weise mit Gneiss vorgenommenen Versuche ergaben dann folgende Resultate:

Datum.	A. T. d. G.	A. T. d. W.	c
26. II.	-18,91°	+19,34°	0,1736°
26. II.	-19,60	+20,59	0,1716
ferner:			
28. II.	+98,84	+15,86	0,1981
28. II.	+98,84	+16,55	0,1920
28. II.	+98,84	+19,26	0,1982
ferner:			
20. III.	+213,0	+16,05	0,21316
21. III.	+210,9	+17,77	0,2167
22. III.	+210,0	+17,07	0,2163
22. III.	+218,0	+16,45	0,2121
22. III.	+216,8	+16,17	0,2135
22. III.	+210,0	+16,65	0,2142

Demnach ist im Mittel für das Temperaturintervall

$$\text{von } -19,25^\circ \text{ bis } +19,95^\circ \quad c = 0,1726$$

$$+17,22^\circ \text{ bis } +98,84^\circ \quad c = 0,1961$$

$$+16,69^\circ \text{ bis } +213,2^\circ \quad c = 0,2143$$

Hieraus ergibt sich, dass für *Gneiss* die spezifische Wärme mit der Temperatur veränderlich ist, und zwar ist in erster Annäherung für Temperaturen zwischen

$$0^\circ \text{ bis } 60^\circ \quad c = 0,1723 + 0,000353 t$$

$$60^\circ \text{ bis } 120^\circ \quad c = 0,2005 + 0,000248 (t - 60^\circ)$$

Da später im Kapitel «Prüfung der Methodé» auch das Paraffin besprochen werden soll, so mögen gleich hier auch die Resultate folgen, welche für die spezifische Wärme des Paraffin gefunden wurden.

Datum.	A. T. d. P.	A. T. d. W.	c
9. II.	0°	20,00°	0,6912
9. II.	0	20,06	0,6964
11. II.	0	20,05	0,6901
11. II.	0	20,00	0,6971

Datum.	A. T. d. P.	A. T. d. W.	c
ferner:			
21. II.	-16,70°	+17,56°	0,5247
21. II.	-21,60	+21,11	0,5112
22. II.	-18,91	+19,18	0,5175
22. II.	-18,90	+20,38	0,5329
ferner:			
12. II.	-19,20°	+3,50°	0,3691
12. II.	-19,60	+3,51	0,3771
13. II.	-19,20	+3,17	0,3756
14. II.	-20,35	+2,82	0,3849

Im Mittel ist somit für das Temperaturintervall

von 0° bis + 20°	c = 0,6939
-19,03° bis +19,58°	c = 0,5251
-19,59° bis + 3,25°	c = 0,3768

Die spezifische Wärme des *Paraffin* ist somit in hohem Maasse von der Temperatur abhängig, was wegen des Kohlenstoffgehalts von vornherein zu erwarten war. Die Abhängigkeit lässt sich in erster Annäherung durch eine lineare Function der Temperatur darstellen wie folgt:

Für Temperaturen

von -10° bis 0° ist	c = 0,5156 - 0,0170 t
0° bis +10° ist	c = 0,5156 + 0,01787 t

3. Zur Bestimmung der Temperaturen in den auf Wärmeleitung untersuchten Kugeln dienten Thermo-elemente. — Die Thermo-elemente wurden hergestellt aus einem nicht ganz einen Meter langen und etwa  $\frac{3}{4}$  mm. dicken Neusilberdrahte und zwei 40 bis 50 Cm. langen, 1 mm. dicken Kupferdrähten. Zum Löthen wurde Silber verwendet. Die Drähte wurden mit Baumwolle von einander und gegen aussen isolirt. Die Isolation wurde vollständiger gemacht durch Tränkung der Baumwolle mit

einer Lösung von Mennige. — Wenn man die nicht gelötheten Kupferenden mit den Drahtenden eines Galvanometers verbindet, und die Löthstellen auf verschiedene Temperaturen bringt, so geht durch den geschlossenen Kreis ein thermoelektrischer Strom, dessen electromotorische Kraft  $E$  von der Temperaturdifferenz der beiden Löthstellen abhängt. Diese Thatsache diene zur Temperaturbestimmung. Ein feingestelltes Wiedemann'sches Spiegelgalvanometer wurde zur Messung der Stromstärke benutzt. Es ist allgemein für thermoelectrische Paare

$$E = A(t_1 - t_2) \left\{ T_0 - \frac{t_1 + t_2}{2} \right\}$$

oder für kleine Differenzen  $(t_1 - t_2)$

$$E = A_1(t_1 - t_2) - B_1(t_1 - t_2)^2$$

Ist dann  $w$  der Widerstand des Schliessungskreises,  $I$  die Stromstärke, so ist

$$I = \frac{A_1}{w} (t_1 - t_2) - \frac{B_1}{w} (t_1 - t_2)^2$$

Da aber  $I = C \cdot \text{tang } u$ , wo  $u$  der Ausschlagswinkel der Galvanometernadel ist, und ferner  $\text{tang. } 2u = \frac{s}{D}$ , wo  $s$  der Ausschlag auf der Scala und  $D$  ihre Entfernung vom Spiegel des Galvanometers ist, so erhält man als Zusammenhang zwischen dem beobachteten Ausschlag  $s$  und der Temperaturdifferenz der Löthstellen eine Gleichung von der Form

$$s = \alpha (t_1 - t_2) + \beta (t_1 - t_2)^2 \quad (21)$$

Darin sind  $\alpha$  und  $\beta$  für jede Anordnung und jedes Thermo-element besonders zu bestimmende Constanten.

Um rasch nach einander mehrere Ausschläge ablesen zu können, ist zu vermeiden, dass der Magnet des Galvanometers mehrmals um seine Gleichgewichtslage hin und



her schwingt. Durch Anwendung des Hauy'schen Magnetstabes wurde desswegen der Magnet so nahe aperiodisch gemacht, dass er bei einem Ausschlag von 500 Scalentheilen von der Ruhelage aus fast ohne Schwingung sich in die vorgeschriebene Gleichgewichtslage einstellte, oder beim Loslassen aus dieser Gleichgewichtslage nur um 2 Scalentheile die Ruhelage überschritt, um sofort asymptotisch sich der definitiven Ruhelage zu nähern. Die Empfindlichkeit des Galvanometers wurde so regulirt, dass bequem noch Ausschläge sicher beobachtet werden konnten, welche einer Temperaturdifferenz von  $\frac{1}{70}$  bis  $\frac{1}{250}$  Grad entsprachen.

Die Bestimmung der Constanten  $\alpha$  und  $\beta$  geschah folgendermaassen: Das Galvanometer wurde so gestellt, und die Verbindungsdrähte nach dem Thermoelement so gelegt, wie sie beim Hauptversuch sein sollten. Die eine Löthstelle wurde durch Eis oder Schnee auf der constanten Temperatur  $0^{\circ}$  erhalten. Die andere Löthstelle aber tauchte in ein dickwandiges, etwa 3 bis 4 Liter haltendes Gefäss mit Wasser. In dieses nämliche Wasser neben die Löthstelle tauchte ein sehr feines in Zehntel-Grade eingetheiltes Hg.-Thermometer. Durch Eis oder warmes Wasser wurde in diesem Gefäss eine passende Temperatur hergestellt, und durch stetiges Umrühren des Wassers bewirkt, dass stets alle im Gefäss befindlichen Theile dieselbe Temperatur hatten. Letztere änderte sich dabei nur sehr langsam. Nun wurden möglichst rasch nach einander abgelesen: 1) Die Ruhelage des Magneten bei unterbrochener Leitung; dann nach Schliessung der Leitung 2) am Hg.-Thermometer die Temperatur des Wassers; dann 3) der ihr entsprechende Ausschlag in Scalentheilen; 4) nach neuer Unterbrechung der Leitung

wieder die Ruhelage; u. s. f. 3 bis 6 zusammengehörige Werthe bestimmt. Die unmittelbar vor und nach der Ablesung eines Ausschlages abgelesene Ruhelage hatte den Zweck, allfällige Aenderungen der Deklination u. s. f. zu eliminiren. Das arithmetische Mittel der Ausschläge in Scalentheilen und die entsprechende Temperaturdifferenz der Löthstellen gab eine der Gleichungen

$$s = \alpha(t_1 - t_2) + \beta(t_1 - t_2)^2$$

So ergab die Graduirung vom 7. II. unter anderem für  $R$  als Ruhelage,  $A$  als Ausschlag in Scalentheilen, und  $t$  als Temperatur in Graden des Hg.-Thermometers:

$R_1$	$A$	$t$	$R_2$
483,2	555	3,10°	487
487,2	553,7	3,50	485
485	558,4	3,40	488
488	561,8	3,38	488,6
488,6	564	3,53	488

also die Gleichung

$$71,72 = \alpha 3,402 + \beta 3,402^2$$

Ferner

478,4	997	19,51°	479
479	994,2	19,49	474,2
474,2	988	19,44	470,4

die Gleichung

$$515,4 = \alpha 19,48 + \beta 19,48^2$$

Diese beiden Gleichungen würden  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmen. Als Mittelwerth aus mehreren solcher Gleichungen ergab sich

$$\alpha = 21,0366 \qquad \beta = 0,3409$$

Diese Constantenbestimmung wurde wiederholt ausgeführt; je wenn die Anordnung etwas geändert war, oder durch zufällige Umstände geändert schien.

Irgend eine Beobachtungsreihe wird nun in folgender Weise zur Berechnung von  $k$  und  $h$  verarbeitet: Es sei z. B. in einer mit Gneiss gemachten Reihe unter  $z$  die Zeit der neben ihr stehenden Ablesung, unter  $R$  die Ruhelage, unter  $S_c$  und  $S_0$  die Scalenableesungen dem Centrum und der Oberfläche entsprechend, unter  $T_u$  die Temperatur der Umgebung verstanden. Dann giebt  $S_c - \frac{R_1 + R_2}{2}$ , sowie  $S_0 - \frac{R_1 + R_2}{2}$  den Ausschlag in Scalentheilen. Dieser ist mit Hülfe der Constanten.

$$\begin{aligned} \alpha_c &= 51,263 & \beta_c &= 0,1435 \\ \alpha_0 &= 28,231 & \beta_0 &= 0,05526 \end{aligned}$$

in die entsprechenden Temperaturen  $T_c$  und  $t_0$  umgewandelt. Die folgende Columnne giebt den von (16) verlangten Quotienten von, einer nämlichen Zeit entsprechenden, Temperaturen am Centrum und der Oberfläche. Die beiden letzten Columnnen finden Anwendung bei Berechnung von  $k$  nach (13). Dabei ist als die Zeit ( $z_2 - z_1$ ) immer 5 Minuten = 300 Sec. genommen. Der Kugelradius war  $R = 2,982$  Cm. und  $r_0 = 2,960$  Cm.

$z$	$R_1$	$S_c$	$S_0$	$T_u$	$R_2$	$T_c$	$t_0$	$\frac{T_c}{t_0}$	$\log \log \frac{T_1}{T_2}$	$\log \log \frac{t_1}{t_2}$
8.15	Eintauchen in $T_u$ aus $+ 20^0$ .									
9.5	443	1036,3	557	97,8 <sup>0</sup>	443	11,2187 <sup>0</sup>	3,8802 <sup>0</sup>	2,8912		
9.10	443,2	955	541		443,2	9,7200	3,2585	2,9830	$\bar{2},79428$	$\bar{2},87990$
15	441,6	888	523,2		442	8,4988	2,7300	3,1130	$\bar{2},76574$	$\bar{2},88564$
9.20	440,2	829,3	513,2	97,8	440,2	7,4325	2,4608	3,0204	$\bar{2},76507$	$\bar{2},65398$
25	435,6	777,7	500,8		436,4	6,5437	2,1850	2,9948	$\bar{2},74288$	$\bar{2},71290$
9.30	453	755,8	512,3		453,4	5,8052	2,0152	2,8806	$\bar{2},71609$	$\bar{2},54568$
35	453	722,3	510,5	97,8	453,2	5,1779	1,9575			
		Mittel:		97,8 <sup>0</sup>				2,9805	$\bar{2},74668$	$\bar{2},73562$

Die mittlere Temperatur dieses Intervalls ist  $t = + 92^0$ .

Aus dem Quotienten 2,9805 ergibt sich nach (16) als Werth für

$$\beta_1 = \text{Num log } \bar{1},88475$$

Dann wird nach (13) mit Benutzung der Temperaturen  $T$  am Centrum (also des Mittelwerthes aus der vorletzten Columne) der Werth für

$$k_c = 4,0380 \cdot 10^{-4} \left( \frac{\text{cm.}}{\text{gr.}} \right) \left( \frac{\text{sec.}}{\text{sec.}} \right)$$

Mit Benutzung der Temperaturen  $t$  an der Oberfläche (das Mittel aus der letzten Columne) wird

$$k_0 = 3,9364 \cdot 10^{-4} \left( \frac{\text{cm.}}{\text{gr.}} \right) \left( \frac{\text{sec.}}{\text{sec.}} \right)$$

Diesen beiden Werthen von  $k$  entsprechend ergeben sich nach (17) auch sofort zwei Werthe für  $h$ ; nämlich

$$h_c = 4,5646 \cdot 10^{-4} \left( \frac{\text{cm.}}{\text{gr.}} \right) \left( \frac{\text{sec.}}{\text{sec.}} \right)$$

$$h_0 = 4,4500 \cdot 10^{-4} \left( \frac{\text{cm.}}{\text{gr.}} \right) \left( \frac{\text{sec.}}{\text{sec.}} \right)$$

Diese  $k$  und  $h$  entsprechen einer Temperatur von etwa  $91^\circ$ .

### Ausführung der Beobachtungen zur Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens für Gneiss, und Resultate.

Aus einem sehr feinkörnigen Stück Granit wurde eine Kugel hergestellt von 2,982 Cm. Radius. In sie, nach dem Centrum hin, wurde ein Loch gebohrt von etwa 2 mm. Durchmesser. Dieses musste die eine Löthstelle eines Thermoelementes einlassen, um durch dieses die Temperatur im Centrum der Kugel bestimmen zu können. Die

Berührung der Löthstelle mit der Kugel dauerte je nur während der kurzen Zeit, welche zu einer Ablesung nöthig war. Durch Wegheben der Löthstelle um 1 bis 2 mm. wurde ein allfälliger Wärmeentzug, oder eine Wärmezufuhr durch das berührende Metall möglichst reducirt. Die Kugel hieng an 4 Faden an der Decke eines cylindrischen Kupfergefässes. Dieses hatte etwa 11 Cm. Durchmesser und 14 Cm. Höhe. Nach aussen hin war sein oberer Rand versehen mit einer 1,5 Cm. breiten und 8 Cm. dicken am Gefäss festgelötheten, eisernen Flansche. Der ebene Deckel hatte ebenfalls eine Flansche von denselben Dimensionen. Deckel und Gefäss waren auf einander gepasst und konnten durch 8 Schrauben fest zusammengehalten werden. Eine zwischen beide Flanschen gelegte Kautschuklamelle machte den Verschluss luftdicht. Um im Inneren trockene Luft zu haben, also den störenden Einfluss allfällig eindringender Wasserdämpfe zu beseitigen, wurden noch einige Stücke Chlorcalcium hineingelegt. In den Deckel wurden zwei Messingröhren von 1 Cm. Durchmesser und 12 Cm. Länge eingelöthet; in diese ein Glasrohr gesteckt (um die Thermoelemente nicht mit gut leitendem Metall in Berührung zu bringen); dann durch die Glasröhren nach dem Centrum der Kugel sowie nach ihrer Oberfläche die einen Löthstellen zweier Thermoelemente geführt. Die anderen Löthstellen dieser Thermoelemente wurden auf constanter Temperatur  $T_u$  erhalten, und zwar entweder durch Eis, oder durch eine grosse Masse Wasser, oder endlich durch Wasserdampf. — Die freien Kupferenden der Thermoelemente giengen nach 2 Quecksilbernäpfen von grossem Querschnitt, und von diesem gieng eine Leitung nach den Drahtenden des Wiedemann'schen Galvanometers. Um aber nicht störende Neben-

schliessungen zu erhalten, ist darauf zu achten, dass keine andern Drahtenden in die beiden Nöpfe tauchen als diejenigen, welche die gewollte Schliessung eines Stromkreises vermitteln. Die Leitung war in der Regel unterbrochen, und wurde dieselbe nur hergestellt etwa 10 Sec. (nach Bedürfniss bis 30 Sec.) vor dem Zeitpunkt, für welchen man die Temperatur im Innern der Kugel haben wollte. Sofort nach dieser Bestimmung wurde die Leitung wieder unterbrochen. Kurz vor und nach Herstellung der geschlossenen Leitung wurde die Ruhelage des Magneten abgelesen. Der Ausschlag für die Temperaturen am Centrum wurde abgelesen zu den Zeiten  $0^m$ ,  $5^m$ ,  $10^m$ , ... und dazwischen zur Kontrolle oder zur Auswahl zu den Zeiten  $2^m$ ,  $7^m$ ,  $12^m$ , ...

Bei einer ersten Gruppe von Beobachtungen wurde das Gefäss mit der Kugel in der angeführten Anordnung aus der Zimmertemperatur in die Dämpfe von siedendem Wasser gebracht. Diese Dämpfe wurden nämlich in einen hölzernen Kasten geleitet, an dessen Deckel das Kupfergefäss festgemacht war. Nachdem einmal die Dampfentwicklung lebhaft im Gang war, wurde dieser hölzerne Deckel aufgesetzt und fest geschraubt. Dadurch wurde eine Temperatur der Umgebung  $T_u = 97$  bis  $98^\circ$  erzielt. Nach beinahe einer Stunde konnte die Beobachtung solcher Werthe beginnen, für welche die Formeln (16), (13), (17) anwendbar sind. Nach Verlauf einer weiteren Stunde betrug der Ausschlag immer noch 50 bis 60 Scalentheile. Kleinere Ausschläge wurden nicht mehr abgelesen, weil kleine Störungen verhältnissmässig grosse Fehler bewirkt hätten und die bezüglichen Resultate nicht zuverlässig geworden wären. Die auf Grund solcher Beobachtungen berechneten Resultate sind für  $k$  und  $h$  ausgedrückt in Zehntausendsteln und den Maasseinheiten Cm., Gr. Sec.:

$k_c$	$k_o$	$h_c$	$h_o$	$t$
4,6880	5,1090	4,0046	4,3642	91°
3,1678	3,1080	3,2456	3,1840	94
4,0380	3,9364	4,5646	4,4500	92
4,1590	3,9060	3,6334	3,4130	93
4,3435	3,8350	3,2290	2,8510	93
5,1658	4,4552	3,2247	2,7811	93
4,6872	4,5562	2,9310	2,8500	93
4,4837	4,4372	3,6404	3,6027	92
4,7279	4,0988	4,3855	3,8020	92
Im Mittel 4,3845	4,1602	3,6510	3,4776	93

Bei der folgenden Gruppe wurde die Kugel durch Dämpfe siedenden Wassers in jenem Kasten zuerst auf die constante Temperatur 98° gebracht und dann in ein grosses etwa 80 Liter haltendes Gefäss mit Wasser gestellt, dessen Temperatur  $T_u$  diejenige des Zimmers war

$k_c$	$k_o$	$h_c$	$h_o$	$t$
5,2680	5,0623	3,2435	3,1168	26°
5,9229	5,6026	3,1462	2,9760	24
5,7980	5,5505	3,1324	2,9990	24
5,3856	5,2195	3,4223	5,3170	27
5,4836	5,4500	3,4415	3,4200	26
5,6204	5,6000	3,0942	3,0830	23
6,1646	6,2372	2,9387	2,9734	25
4,3340	5,2570	2,6713	3,2400	25
5,2068	5,1620	3,2134	3,1854	26
5,0003	5,1420	3,2978	3,3910	25
4,9188	4,8217	3,2870	3,2221	25
Im Mittel 5,3730	5,3743	3,1717	3,1749	25

Aus diesen Versuchen geht somit hervor, dass sowohl das *innere* als auch das *äussere* Wärmeleitungsvermögen für *Gneiss* von der Temperatur *abhängig* ist, und zwar ist in erster Annäherung für Temperaturen von 0° bis 100°

$$k = (5,7786 - 0,0162 t) \cdot 10^{-4} \quad \left( \begin{array}{l} \text{cm.} \\ \text{gr.} \\ \text{sec.} \end{array} \right)$$

$$h = (3,0293 + 0,00575 t) \cdot 10^{-4}$$

Die Veränderlichkeit des inneren Leitungsvermögens ist somit ungefähr die dreifache von derjenigen des äussern Leitungsvermögens, und ausserdem von entgegengesetztem Vorzeichen.

Diese Untersuchung führte zu ziemlich unerwarteten Resultaten, so dass es als wünschenswerth erscheint, durch Vergleichung dieser Resultate mit früher veröffentlichten einen Anhaltspunkt über ihre Richtigkeit zu gewinnen. Wie Eingangs angeführt wurde, sind aber exacte absolute Messungen nur in geringer Anzahl gemacht werden. Von den mir bekannt gewordenen theile ich mit

Péclet: für Marmor  $k = 0,0048$ .

Despretz: feinkörnigen Marmor  $k = 0,0097$ ,  
grobkörnigen Marmor  $k = 0,0077$ .

Angström<sup>1)</sup> giebt für thonhaltigen Sand  $k = 0,0000194$ .  
feuchten Thon  $k = 0,0000215$ .

Diese sind berechnet aus gemessenen Erdtemperaturen

W. E. Ayrton und J. Perry<sup>2)</sup> in Tokio, für einen japanesischen Stein im Mittel

$$k = 0,00579 \quad h = 0,00316$$

Everett aus Beobachtungen von Erdtemperaturen im Garten der Greenwicher Sternwarte für «Gravel of Greenwich Observatory Hill»  $k = 0,0025$ .

G. Forbes<sup>3)</sup> für schwarzen Marmor  $k = 0,00177$ .

weissen Marmor  $k = 0,00115$ .

Quarz senkrecht zur Axe  $k = 0,0042$ .

» parallel » »  $k = 0,0009$ .

Stefan<sup>4)</sup> für Luft  $k = 0,000058$ .

<sup>1)</sup> Pogg. Bd. 114.

<sup>2)</sup> Phil. Mag. (5) IV. 1878.

<sup>3)</sup> Proceedings of the Roy. Soc. of Edinbourg. 1873.

<sup>4)</sup> Wiener Sitzungsberichte. Bd. 65. Abt. 2. 1872.



Tait hat Berechnungen angestellt, welche schliessen lassen, dass das Leitungsvermögen der Metalle für Wärme ihrer absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist.

Diese Zahlen stimmen viel zu wenig mit den für Gneiss gefundenen überein, als dass man einen sicheren Schluss auf ihre Richtigkeit machen könnte. Wenn auch die ersteren besser unter sich als mit denjenigen für Gneiss übereinstimmen, so sind letztere doch deswegen nicht zu verwerfen, weil viele mit Sorgfalt ausgeführte Beobachtungen sich gegenseitig unterstützen. Dieses drängt zu einer

### Prüfung der Methode.

Um eine Prüfung der Methode anstellen zu können, wurde

1)  $k$  und  $h$  für *Paraffin* nach der obigen Methode bestimmt. Die Resultate waren

$$h = (1,697 + 0,0475 t) \cdot 10^{-4} \left( \frac{\text{cm.}}{\text{gr.}} \right)$$

$$k = (2,294 + 0,1455 t) \cdot 10^{-4}$$

2) wurde für Paraffin  $h$  auch noch nach ganz anderer Methode *direct* bestimmt. Dieses geschah nach dem Vorschlage des Herrn Prof. Dr. H. F. Weber, meines hochverehrten Lehrers, in folgender Weise:

Bezeichnet  $O$  die Oberfläche einer kleinen Kupferkugel,  $M$  ihre Masse,  $dz$  und  $dt$  bezüglich die Elemente der Zeit und der Temperatur,  $t$  die Temperatur der Oberfläche,  $T_u$  die constante Temperatur der Umgebung, so ist die im Zeitelement nach aussen abgegebene Wärmemenge in doppelter Weise ausgedrückt

$$h O (t - T_u) dz = - M c dt \quad (22)$$

Dabei ist die Voraussetzung gemacht, dass die Temperatur in *allen* Massenelementen *denselben* Werth hat.

Wie nahe diese Voraussetzung für die kleine Kupferkugel zutrifft, ergibt sich in folgender Weise: Die Temperaturen irgend zweier Punkte der Kugel sind um so weniger von einander verschieden, je kleiner der Quotient dieser Temperaturen ist. Den grössten Werth für diesen Quotienten erhält man offenbar aus der Temperatur am Centrum und derjenigen dicht unter der Kugeloberfläche; also für Kugelradien  $r_c = 0$  und  $r_o = 2,40$ . Für den Quotienten solcher zwei Temperaturen zu irgend einer aber nämlichen Zeit  $z$  giebt (14)

$$\frac{T_c}{t_o} = r_o \left\{ \frac{\beta_1}{\sin(\beta_1 r_o)} + \frac{\beta_2 \sin(\beta_1 r_o) - \beta_1 \sin(\beta_2 r_o)}{\sin^2(\beta_1 r_o)} \cdot \frac{\beta_1 N_1}{\beta_2 N_2} e^{-\frac{kz}{cD}(\beta_2^2 - \beta_1^2)} + \dots \right\}$$

Sobald nun  $z$  nur 2 bis 3 Minuten beträgt, so sind alle nach dem ersten folgenden Glieder gegen dieses verschwindend klein und daher

$$\frac{T_c}{t_o} = \frac{r_o \beta_1}{\sin(\beta_1 r_o)}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{t_o}{T_c} &= \frac{\sin(\beta_1 r_o)}{r_o \beta_1} = \frac{1}{r_o \beta_1} \left\{ \beta_1 r_o - \frac{(\beta_1 r_o)^3}{3!} + \frac{(\beta_1 r_o)^5}{5!} - \dots \right\} = \\ &= 1 - \frac{(\beta_1 r_o)^2}{3!} + \frac{(\beta_1 r_o)^4}{5!} - \dots \end{aligned}$$

Hierin ist  $(\beta_1 r_o)$  zu bestimmen. — Zunächst ergibt sich  $(\beta R)$  aus (10)

$$\frac{\beta R}{tg(\beta R)} = 1 - \frac{hR}{k}$$

oder, da  $R = 2,42$  cm. war, ferner für Kupfer  $k = 0,75$ ,  $h = 0,00018$  ist, aus

$$\frac{(\beta R)}{tg(\beta R)} = 0,99942$$

Es wird  $(\beta_1 R) = 0,04189$ ;  $\beta_2 R = 4,4935$ ; ...  
somit  $\beta_1 r_o = 0,04154$  und demnach

$$\frac{t_o}{T_c} = 0,99971$$

Wenn die Kugel also auch aus der Anfangstemperatur in eine um  $30^{\circ}$  von ihr verschiedene Temperatur  $T_u$  der Umgebung gebracht worden wäre, so wäre doch der Unterschied der Temperaturen am Centrum und dicht unter der Oberfläche nicht  $0,01^{\circ}$ . —

Durch Integration der Differentialgleichung (22) erhält man

$$-\frac{hO}{Mc} z = + \log. \text{ nat. } (t - T_u) + \text{Const.}$$

Wenn dann  $z_1$  und  $t_1$  sich ebenso entsprechen wie  $z$  und  $t$ , so ist auch

$$-\frac{hO}{Mc} z_1 = + \log. \text{ nat. } (t_1 - T_u) + \text{Const.}$$

Aus beiden folgt durch Subtraction

$$\frac{hO}{Mc} (z_1 - z) = \log. \text{ nat. } \left( \frac{t - T_u}{t_1 - T_u} \right)$$

also

$$h = \frac{Mc}{O(z_1 - z)} \cdot \log. \text{ nat. } \left( \frac{t - T_u}{t_1 - T_u} \right) \quad (23)$$

Der Radius der Kupferkugel betrug 2,42 cm.

Um *direct* das *äussere* Wärmeleitungsvermögen für *Paraffin* zu bestimmen, wurde die Kupferkugel mit einem dünnen Ueberzug von Paraffin versehen. Zu diesem Zweck wurde die Kupferkugel bis nahezu auf die Schmelztemperatur des Paraffin erwärmt; dann einen Augenblick in heisses Paraffin getaucht und durch Wenden verhütet, dass beim Erkalten das Paraffin sich ungleich dick an der Kugel festsetze. Als Dicke eines solchen Ueberzugs wurde theils durch Messung, theils durch Rechnung gefunden  $d = 0,28$  mm. — Nach dem Centrum der Kupferkugel gieng ein Loch von 1,5 mm. Durchmesser. In die Kugel waren ausserdem zwei Hacken eingebohrt, um erstere durch letztere wieder am Deckel eines Kupfergefässes auf-

hängen zu können. Die ganze Anordnung zur Bestimmung der nöthigen Temperaturen war dieselbe, wie sie früher beschrieben wurde.

Entsprechend der Formel (23) wurde als Temperatur  $t$  und Zeit  $z$  irgend ein entsprechendes Werthepaar genommen, als  $t_1$  und  $z_1$  dann gewöhnlich dasjenige Werthepaar, welches 1200 Sec. später auftrat.

In der nachfolgend angegebenen Beobachtungsreihe war die eine Löthstelle eines Thermoelementes (wie immer) nach dem Centrum der Kupferkugel geführt, die andere Löthstelle hingegen wurde in Eis auf der constanten Temperatur  $T_u = 0^\circ$  gehalten. Es bezeichnet  $z$  die Zeit,  $R_1$  und  $R_2$  die Ruhelagen des Magneten vor und nach der Ableseung,  $S$  die Scalenableseung (beobachteten Ausschlag),  $A$  den berechneten Ausschlag,  $t$  die aus letzterem berechnete Temperatur, endlich  $h$  den nach (23) berechneten Werth des äussern Leitungsvermögens.

$z$	$R_1$	$S$	$R_2$	$A$	$t^\circ$	$h$
10.52	476	773,4	476,6	297,1	17,9356°	
57	481	744	483	262	15,9030	
11. 2	488,2	725,8	490	237	14,4356	
7	488	704,2	489	215,7	13,1770	
11.12	492,4	690,1	493,6	197,1	12,0728	2,2497.10 <sup>-4</sup>
17	496,8	677	497,2	180	11,0517	2,0696
11.22	497	659,8	496,2	162,2	9,9832	2,0973
27	492	640,1	491,8	148,2	9,1402	2,0802
11.32	493,8	631	495	136,6	8,4392	2,0363
37	493	618	494,2	125,2	7,7477	2,0200
11.42	497	611,4	497,6	114,2	7,0783	1,9555
47	492,4	598	494	104,8	6,5047	1,9345
11.52	493,6	590	493,4	96,5	5,9966	1,9433
57	492,8	581	493	88,1	5,4817	1,9680
12. 2	498,2	580	498,2	81,8	5,0942	1,8708
7	501,9	578,1	502,3	76,9	4,7362	1,8085

Zur Berechnung von  $h$  sind noch folgende Angaben nothwendig:

Für die Kupferkugel  $M = 523,494$  gr.; für den Paraffinüberzug  $M = 2,592$  gr.; nach Messungen im physikalischen Laboratorium des eidgen. Polytechnikums für Kupfer  $c = 0,0925$ ; für Paraffin  $c = 0,695$ ;  $O = 4.2,42^2 \pi$ . Wenn daher  $z_2 - z_1 = 1200$  genommen wird, so ist nach (23)

$$h = \text{Num. log. } \sqrt[3]{3,11709} \text{ log. com. } \left( \frac{t - T_u}{t_1 - T_u} \right)$$

Ausserdem waren

$$\alpha = 15,86076 \quad ; \quad \beta = 0,03859$$

Nach der eben mitgetheilten Beobachtungsreihe ist somit im Mittel, ausgedrückt in Zehntausendsteln und in Cm., Gr., Sec.:

für Temperaturen von	0° bis 5°	5° bis 10°	10° bis 15°
$h =$	1,808	1,9895	2,25..

In derselben Weise ergaben sich aus den Beobachtungen, die im Temperaturintervall  $J$  gemacht wurden, in Zehntausendsteln ausgedrückt

$J$	0° bis 5°	5° bis 10°	10° bis 15°	15° bis 20°
+18° bis +4,7°	1,808	1,9895	2,25..	
+15 bis +5		1,9895	2,25..	
+19,4 bis +5,8		2,0086	2,2504	
+22,7 bis +6		2,1046	2,1912	2,3454
	Mittel	2,0231	2,2354	

Ferner:

$J$	-10° bis -5°	-5° bis 0°	0° bis +5°
-10,2° bis -5,1°	1,3668		
-9,1 bis -4,4	1,3907	1,4722	
-8 bis -4,6	1,3706		
-10,3 bis -4,5	1,3017		
-11,3 bis -5,1	1,3844		
+1 bis +10			1,9031
-3,1 bis +5,1			1,9014
-0,4 bis +5,2			1,9216
	Mittel	1,3628	1,9087

Aus diesen Mittelwerthen folgt, dass mit erster Annäherung für *Paraffin* das äussere Wärmeleitungsvermögen  $h$  sich ändert in folgender Weise

$$h = (1,6930 + 0,0438 t) 10^{-4} \left( \begin{array}{l} \text{cm.} \\ \text{gr.} \\ \text{sec.} \end{array} \right)$$

Es bleibt noch zu bemerken; dass die Kugel auf eine negative constante Anfangstemperatur gebracht wurde durch Anwendung einer Kältemischung aus Schnee und Salz; dass ferner die constanten Temperaturen der Umgebung  $T_u$  hergestellt wurden durch Eis und Schnee, oder durch das Wasser in einem etwa 80 Liter haltenden Gefäss, welches Wasser die Temperatur des Zimmers angenommen hatte.

Die Bestimmung von  $h$ , also auch von  $k$ , für *Paraffin* nach der *ersten Methode* geschah folgendermaassen:

Sie erfordert die Herstellung einer Kugel aus Paraffin. Nun hat aber Paraffin die ungewöhnliche Eigenschaft, dass es beim fest werden sich mit einer Menge von Blasen füllt, sobald es in Formen von mehr als 1 Cm. Dicke gegossen wird; — eine Eigenschaft, welche für die beabsichtigten Versuche sehr störend ist. Nach mehreren Versuchen gelang es auf folgendem Wege eine *homogene* Kugel aus Paraffin herzustellen: Ein nahezu kugelförmiges Fläschchen von etwa 6 Cm. Durchmesser und langem Hals wurde mit geschmolzenem, heissem Paraffin ganz gefüllt und dann etwa 30 Minuten auf einer Temperatur von  $100^\circ$  erhalten. Hierauf wurde das Fläschchen etwa 2 Cm. tief in eine Kältemischung von  $-20^\circ$  gesenkt. Der herausragende Theil wurde durch die Leuchtgasflamme beständig erwärmt, und so die oberen Schichten des Paraffin ge-

schmolzen erhalten. Nur im tiefsten Theile des Fläschchens wurde das Paraffin langsam fest. Sobald dieses eingetreten war, wurde das Fläschchen tiefer in die Kältemischung getaucht, und dann wieder das fest werden einer neuen Schichte abgewartet, u. s. f. Von Zeit zu Zeit wurde es nöthig, neues flüssiges Paraffin zum Auffüllen nachzuschütten. Die entstandene homogene Masse wurde durch Zerschlagen des Gefäßes von diesem befreit, dann durch Abdrehen in Kugelform gebracht, und ein Loch nach dem Centrum gebohrt.

Ein Ring von Nähfaden, der von drei eben solchen Faden an dem Deckel des Kupfergefäßes gehalten wurde, trug die Kugel. Die eine Löthstelle eines Thermoelementes gieng wieder nach dem Centrum der Kugel und wurde durch etwas zugegossenes Paraffin hier festgehalten. Die andere Löthstelle aber wurde auf constanter Temperatur  $T_u$  erhalten. Eine Löthstelle eines zweiten Thermoelementes wurde etwa  $\frac{1}{2}$  mm. tief in die Oberfläche der Kugel eingestossen, die andere Löthstelle ebenfalls auf constanter Temperatur  $T_u$  erhalten. Die Anordnung war im ganzen die früher angegebene.

Die Bestimmung der Temperatur  $T_c$  im Centrum, und  $t_o$  der Oberfläche zur Zeit 1<sup>h</sup> 25<sup>m</sup> z. B. wurde in folgender Weise ausgeführt: Um 24<sup>m</sup> 40<sup>s</sup> (nöthigenfalls 24<sup>m</sup> 20<sup>s</sup>) wurde  $R_1$  abgelesen, genau um 25<sup>m</sup> 0<sup>s</sup> das  $T_c$  in Scalentheilen, um 25<sup>m</sup> 10<sup>s</sup> das  $t_o$  in Scalentheilen, dann  $T_u$ , und um 25<sup>m</sup> 20<sup>s</sup> das  $R_2$ .

Der Radius der Paraffinkugel war

$$R = 2,685 \text{ cm.}$$

(später  $R = 2,51 \text{ Cm.}$ ); für die Kugelfläche dicht unter der Oberfläche wurde der Radius angenommen zu

$$r_o = 2,65 \text{ cm.}$$

Noch wurde bestimmt, dass für Paraffin  $D = 0,818$ .

Die zur Berechnung von  $k$  und  $h$  angeführten Formeln verlangen die Verwendung nur solcher entsprechender Werthe von  $T$  und  $t$ , für welche  $\frac{T}{t} = \text{const.}$  ist. Dieser Quotient ist 45 bis 60 Minuten nach dem Eintauchen der Kugel in  $T_u$  so gut wie constant, die Temperatur aber immer noch um so weit von  $T_u$  verschieden, dass noch während mehr als einer Stunde entsprechende Werthe von  $t$ ,  $T$  und  $z$  bequem bestimmt werden können.

Bei ganz gleicher Behandlung der Beobachtungsreihen mit Paraffin wie beispielsweise für Gneiss ausgeführt wurde, ergab sich in Zehntausendsteln und in den Masseinheiten Cm., Gr., Sec.:

$k_c$	$k_0$	$h_c$	$h_0$	mittl. Temp.
2,1480	2,6125	2,0050	2,4380	+8°
3,4080	3,3290	1,9060	1,8620	+8
4,7534	4,8925	1,9664	2,0240	+8
3,6100	3,5505	2,0374	2,0034	+7,6
4,6060	4,6120	1,9980	2,0000	+7,3
2,9297	3,2394	2,1242	2,3483	+6,1
Mittel 3,4007	3,7060	2,0580	2,0845	+7,6
Ferner:				
3,544	3,640	1,867	1,917	+2°
Ferner:				
1,5966	1,4360	1,4560	1,3100	-3,3°
1,8965	1,4922	1,0220	0,7595	-3,5
1,5207	1,5581	1,7260	1,7684	-5
1,2522	0,7674	1,6354	1,0023	-8,4
Mittel 1,5665	1,3134	1,4598	1,2150	-5,05

Da die Messung der Temperatur am Centrum eine sicherere war, und weil jene Temperaturen durch äussere Einflüsse, z. B. Wasserdämpfe nicht so gestört werden konnten wie die Temperaturen der Oberfläche, so verdienen die Werthe  $k_c$  und  $h_c$  mehr Zutrauen als die Werthe



$h_o$  und  $k_o$ . Ersterer Werth von  $h$  stimmt auch besser überein mit dem direct gefundenen Werth.

Aus den gefundenen Mittelwerthen folgt, dass für Paraffin sowohl das *innere* als auch das *äussere* Wärmeleitungsvermögen mit der Temperatur *veränderlich* ist; und zwar ist in erster Annäherung

$$h = (1,697 + 0,0475 t) \cdot 10^{-4} \left( \begin{array}{l} \text{cm.} \\ \text{gr.} \\ \text{sec.} \end{array} \right)$$

$$k = (2,294 + 0,1455 t) \cdot 10^{-4}$$

Die Veränderlichkeit der inneren Wärmeleitung ist bei Paraffin also etwa das dreifache der äusseren Veränderlichkeit.

Die oben angeführte directe Bestimmung von  $h$  ergab

$$h = 1,3628 \text{ für Temperaturen zwischen } -10^\circ \text{ und } -5^\circ$$

$$h = 1,9087 \text{ „ „ „ „ } +5^\circ \text{ und } +10^\circ$$

Für jeden der beiden Körper Gneiss und Paraffin ist die Veränderlichkeit der Wärmeleitungsvermögen mit der Temperatur sehr deutlich ausgesprochen. Da ausserdem die Körper von sehr verschiedener Natur sind, so ist wohl anzunehmen, dass *im allgemeinen das Wärmeleitungsvermögen eine Function der Temperatur ist*. Zahlreiche mit andern Stoffen vorgenommene Versuche haben indessen dieses noch zu bestätigen.

Nachdem einmal festgestellt ist, dass  $k$  und  $h$  Functionen der Temperatur sind, so sind die Differentialgleichungen (1) und (2) entsprechend zu ändern, und auch zu berücksichtigen, dass die specifische Wärme  $c$  und die Dichte  $D$  verschieden sind bei verschiedenen Temperaturen. Dann ergibt sich die weitere Aufgabe, diese neuen Differentialgleichungen zu integriren.