Einleitung in die Hydrodynamik

von

Jacob Müller.

Bearbeitet und herausgegeben von L. Henneberg.

Die vorliegende Arbeit ist den Schriften des in der Blüthe seiner Jahre gestorbenen Jacob Müller entnommen und sollte nach dem Plane desselben das erste Capitel zu einem Lehrbuche der Hydrodynamik bilden. Der Herausgeber, dem die betreffenden hinterlassenen Manuscripte von Herrn Professor Fiedler freundlichst anvertraut sind, hat über die Fortsetzung des Werkes abgesehen von einem kurzen Programme nichts vorgefunden und hat sich daher entschlossen, dieses erste Capitel, welches ihm theils der eigenthümlichen Auffassung, theils der Behandlung desjenigen Falles wegen, in dem die Componenten der Rotation ein Potential besitzen, von Werth zu sein schien, für sich als Fragment der Oeffentlichkeit zu übergeben.

Zürich, im Mai 1878.

L. Henneberg.

In den Problemen der Hydrodynamik ist das bewegliche Element ein räumlich ausgedehntes kleines Theilchen der Flüssigkeit, das immer noch eine grosse Anzahl von Atomen enthält.

Ein Punct des Raumes fällt im Allgemeinen nicht immer mit einem Atome zusammen und benachbarte Atome können in einem gegebenen Momente ganz verschiedene Bewegungen haben. Daher werden in einem Systeme von Puncten die Geschwindigkeiten zwar Functionen der Zeit und der Coordinaten, aber die letzteren müssen immer auf denselben materiellen Punct bezogen werden. Wenn aber das bewegte Element selber noch viele solche Puncte enthält, so nimmt seine Geschwindigkeit die Bedeutung einer mittleren Geschwindigkeit an. Diese nun kann mit Recht als Function der Zeit und der Coordinaten schlechthin, d. h. abgesehen von der Erfüllung des Raumelementes, betrachtet werden. In einem bestimmten Raumelemente ist also die Geschwindigkeit eine Function der Zeit und in einem gegebenen Momente eine Function der Coordinaten. In diesem Sinne wird im Folgenden die Geschwindigkeit aufgefasst werden.

Eine punktuelle Natur des Elementes bedingt, dass seine Bewegung nur eine Translation sein kann, die räumliche Ausdehnung desselben führt zu einer grösseren Mannigfaltigkeit von Bewegungsformen. Wird von der Translation, die im letzteren Falle, wie beim materiellen Puncte möglich ist, abgesehen, so ergibt die Anschauung für das Flüssigkeitstheilchen sofort noch Drehungen um einen festen Punct, Verschiebungen der kleinsten Theilchen gegen einander etc. Diese Mannigfaltigkeit der Bewegungsformen soll untersucht werden; die Betrachtungen stützen sich auf die definirte Auffassung der Geschwindigkeiten und sehen vollständig von den die Bewegung hervorrufenden Kräften ab.

1.

Es sei ein kleines Theilchen der Flüssigkeit gegeben; wie sind die unendlich kleinen Aenderungen beschaffen, welche dasselbe infolge seiner Bewegung im Zeitelemente erleidet?

Das gegebene Element sei zerlegt in unendlich kleine

Theilchen höherer Ordnung. Zur Zeit t seien die Coordinaten eines solchen kleinen Theilchens x, y, z, die Componenten der Geschwindigkeit u, v, w. Dann werden die Coordinaten zur Zeit $t + dt$

$$x + udt, \qquad y + vdt, \qquad z + wdt.$$

Ein zweites Theilchen höherer Ordnung habe zur Zeit t die Coordinaten $x + a$, $y + b$, $z + c$, wo a, b, c unendlich kleine Grössen bedeuten. Dieses Theilchen hat zur Zeit $t + dt$ die Coordinaten

$$x + a + dt\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{\partial u}{\partial y} b + \frac{\partial u}{\partial z} c\right),$$

$$y + b + dt\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} a + \frac{\partial v}{\partial y} b + \frac{\partial v}{\partial z} c\right),$$

$$z + c + dt\left(w + \frac{\partial w}{\partial x} a + \frac{\partial w}{\partial y} b + \frac{\partial w}{\partial z} c\right).$$

Es sei jetzt ein zweites Coordinatensystem eingeführt, dessen Axen dieselbe Richtung haben wie die des ursprünglichen und dessen Anfangspunkt in dem Puncte $(x y z)$ des alten Systemes liege. Bezogen auf dieses neue Coordinatensystem sind die Coordinaten des zweiten Flüssigkeitstheilchens zur Zeit t a, b, c; zur Zeit $t + dt$ seien sie a', b', c'. Dann ist (nach einer kleinen Veränderung der Schreibweise)

$$\left.\begin{aligned} a' &= udt + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt\right) a + \frac{\partial u}{\partial y} dt\, b + \frac{\partial u}{\partial z} dt\, c, \\ b' &= vdt + \frac{\partial v}{\partial x} dt\, a + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} dt\right) b + \frac{\partial v}{\partial z} dt\, c, \\ c' &= wdt + \frac{\partial w}{\partial x} dt\, a + \frac{\partial w}{\partial y} dt\, b + \left(1 + \frac{\partial w}{dz} dt\right) c. \end{aligned}\right\} \quad (1.)$$

Diese Ausdrücke sind lineare Functionen von a, b, c, die 12 von einander unabhängige Coefficienten enthalten.

Die grösste Zahl solcher Coefficienten in einem Systeme dieser Art ist in der That 12; daher werden in (1.) a', b', c' durch die allgemeinsten linearen Functionen von a, b, c ausgedrückt. Die kleinen Theilchen höherer Ordnung erhalten also durch die Bewegung des Elementes neue Coordinaten, welche lineare Functionen der allgemeinsten Form von den ursprünglichen sind. Dies ist eine Folge der unendlich kleinen Grösse, welche die auf das Zeitelement dt sich beziehende Bewegung des Elementes hat.

Die Coefficienten in (1.) sind unendlich klein bis auf den von a in a', von b in b' und von c in c', wo der Coefficient je um eine unendlich kleine Grösse von 1 verschieden ist. Die Bedeutung dieser Coefficienten hat die folgende Untersuchung zu lehren.

Es seien x, y, z die Coordinaten des Elementes irgend eines Systemes von Puncten. Dieses System soll Veränderungen erfahren, welche in unendlich kleiner Zeit entstehen und darum selber unendlich klein sind. Nach diesen Veränderungen seien die Coordinaten des gegebenen Elementes x', y', z'; es sind solche Veränderungen gesucht, bei denen x', y', z' lineare Functionen von x, y, z werden.

Eine Veränderung dieser Art ist erstens die Verschiebung des Systemes. Die Gleichungen der Verschiebung sind

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b, \qquad z' = z + c.$$

In diesen einfachsten linearen Functionen haben die drei Coefficienten a, b, c die geometrische Bedeutung der Verschiebungen nach den Coordinatenaxen; die ganze Verschiebung ist

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Eine zweite Veränderung der gesuchten Art ist die Drehung des Systemes um den Anfangspunkt der Coordinaten. Hier ist

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,$$
$$y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z,$$
$$z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z,$$

wobei zwischen den neun Coefficienten die Relationen bestehen:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \qquad \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0,$$

$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \qquad \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0,$$

$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1, \qquad \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 = 0.$$

Die Bestimmung dieser Coefficienten ist für die dem Zeitelemente dt entsprechende unendlich kleine Drehung folgende:

Bei einer unendlich kleinen Drehung sind auch die Ortsveränderungen aller Puncte unendlich klein, d. h. $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ sind alle drei unendlich kleine Grössen, welches auch die Werthe von x, y, z seien. Bildet man sich diese Differenzen nach den angegebenen Gleichungen der Drehung, so ergibt sich sofort, dass für ihre unendliche Kleinheit nach einander unendlich klein sein müssen

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 - 1, & \beta_1, & \gamma_1, \\ \alpha_2, & \beta_2 - 1, & \gamma_2, \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 - 1. \end{array}$$

Bei der unendlichen Kleinheit von β_1 und γ_1 werden nun in der ersten Relationsgleichung $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ der zweite und dritte Summand unendlich klein gegen den ersten; die Gleichung reducirt sich daher auf $\alpha_1^2 = 1$. Da nun weiter $\alpha_1 - 1$ unendlich klein, also α_1 unendlich wenig grösser als 1 sein soll, so kann nur gesetzt werden

$$\alpha_1 = + 1.$$

Ebenso folgt aus den beiden anderen Gleichungen derselben Reihe

$$\beta_2 = +1 \text{ und } \gamma_3 = +1.$$

Bei der unendlichen Kleinheit von γ_1 und γ_2 wird ferner in der ersten Gleichung der zweiten Reihe: $\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + + \gamma_1 \gamma_2 = 0$ das dritte Glied unendlich klein von höherer Ordnung, und daher die Gleichung selber $\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = 0$; aber da α_1 und β_2 je nur unendlich wenig von 1 verschieden sind, so wird dies

$$\alpha_2 + \beta_1 = 0.$$

Analog ergeben die beiden letzten Relationen

$$\beta_3 + \gamma_2 = 0 \textit{ und } \alpha_3 + \gamma_1 = 0.$$

Diese Werthe der Coefficienten substituire man in die Ausdrücke für x', y', z' und setze dabei

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2 &= -\beta_3 = \varphi, \\ \alpha_3 &= -\gamma_1 = \psi, \\ \beta_1 &= -\alpha_2 = \chi. \end{aligned}\right\} \quad (\alpha.)$$

Dann gehen die Gleichungen für die Rotation über in die folgenden

$$\left.\begin{aligned} x' &= \quad x + \chi y - \psi z, \\ y' &= -\chi x + \quad y + \varphi z, \\ z' &= \quad \psi x - \varphi y + z. \end{aligned}\right\} \quad (a.)$$

Werden in den Producten der rechten Seiten dieser Gleichungen für x, y, z die Grössen $x', y' z'$ gesetzt, wobei sich dieselben nur um unendlich kleine Grössen höherer Ordnung ändern, und werden dann die Gleichungen nach x, y, z aufgelöst, so entsteht die analoge Form

$$\left.\begin{aligned} x &= \quad x' - \chi y' + \psi z', \\ y &= \quad \chi x' + \quad y' - \varphi z', \\ z &= -\psi x' + \varphi y' + z'. \end{aligned}\right\} \quad (a')$$

Die Termen (a) und (a') lassen sofort die geometrische Bedeutung der Coefficienten φ, ψ, χ erkennen. Ist $\psi = \chi = 0$, so ergibt die erste Gruppe

$$x' = x, \quad y' = y + \varphi z, \quad z' = -\varphi y + z.$$

Soll jetzt weiter $y = z = 0$ sein, so wird

$$x' = x, \quad y' = 0, \quad z' = 0$$

d. h der auf der x Axe gelegene Punct (x, 0, 0) erleidet keine Verschiebung. Die Drehung muss also um die x Axe geschehen sein. Dabei ist φ der Winkel der Drehung. Ist allgemein ϑ ein solcher Drehungswinkel, so ist

$$x' = x, \quad y' = y \cos\vartheta + z \sin\vartheta, \quad z' = z \cos\vartheta - y \sin\vartheta.$$

Bei einer unendlich kleinen Drehung wird aber $\cos\vartheta = 1$, $\sin\vartheta = \vartheta$ und infolge davon in Uebereinstimmung mit den obigen Formeln

$$x' = x, \quad y' = y + z\vartheta, \quad z' = -y\vartheta + z.$$

Ebenso ergibt sich, dass $\varphi = \chi = 0$ einer Drehung um die y Axe mit dem Winkel ψ und dass $\varphi = \psi = 0$ einer solchen um die z Axe mit dem Winkel χ entspricht. Dabei ist natürlich die Grösse $\frac{180}{r\pi}$ als Einheit angenommen, wo r den Radius der Rotation bedeutet.

Wenn keine der Grössen φ, ψ, χ verschwindet, so ist gleichzeitig φ der Drehungswinkel um die x Axe, ψ der um die y Axe und χ der um die z Axe. In diesem Falle hat die Drehung um eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade stattgefunden, welche mit den Axen Winkel bildet, deren Cosinus sich verhalten wie $\varphi : \psi : \chi$. Die genannte Linie ist nämlich dadurch charakterisirt, dass für ihre Puncte

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Wird dies in (a.) eingesetzt, so ergibt sich sofort die Doppelproportion

$$x : y : z = \varphi : \psi : \chi;$$

wie die Coordinaten der Punkte verhalten sich aber immer die Cosinus der Geraden, die durch den Anfangspunct geht.

Die unendlich kleine Strecke, welche der Punct x, y, z bei der Drehung zurücklegt, ist gleich der geraden Entfernung der Puncte x, y, z und x', y', z'

$$\sigma^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

Setzt man hierin für die Differenzen ihre Werthe aus (a) ein, so bekommt man

$$\sigma^2 = (\chi y - \psi z)^2 + (\varphi z - \chi x)^2 + (\psi x - \varphi y)^2.$$

Der Punct x, y, z sei so gewählt, dass die ihn mit dem Nullpunct verbindende Gerade senkrecht auf der Drehungsaxe steht; dann ist

$$\varphi x + \psi y + \chi z = 0.$$

Addirt man das Quadrat dieser Gleichung zu der vorhergehenden, so erhält man

$$\sigma^2 = (\varphi^2 + \psi^2 + \xi^2)\ (x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\sigma = \sqrt{\varphi^2 + \psi^2 + \chi^2}\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

In diesem Ausdrucke bedeutet der zweite Factor den Abstand des betrachteten Punctes von der Drehungsaxe. Der Bogen σ ist aber gleich dem Producte aus diesem Abstande in den Drehungswinkel. Daher ist der Drehungswinkel

$$\sqrt{\varphi^2 + \psi^2 + \chi^2},$$

ein bekannter Satz über die Zusammensetzung unendlich kleiner Rotationen. *)

---

*) Helmholtz: Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55, pg. 29.

Eine dritte Veränderung des Systemes, welche die neuen Coordinaten zu linearen Functionen der alten macht, ist eine Ausdehnung in drei zu einander senkrechten Richtungen, wobei vorausgesetzt ist, dass die Ausdehnung in einer gegebenen Richtung constant, in verschiedenen aber verschieden sei. Zur Untersuchung dieser Veränderung führe man ein neues Coordinatensystem ein, das denselben Ursprung wie das alte besitzt, dessen Axen aber durch die im Allgemeinen von den ursprünglichen Axen verschiedenen Richtungen der Dilatation bestimmt sind. Bezogen auf dieses neue System seien die Coordinaten der Anfangslage x, y, z nun s_1, s_2, s_3, diejenigen der Endlage x', y', z' dagegen s'_1, s'_2, s'_3. Dann ist

$$x' = s'_1 \cos(s_1\, x) + s'_2 \cos(s_2\, x) + s'_3 \cos(s_3\, x),$$
$$y' = s'_1 \cos(s_1\, y) + s'_2 \cos(s_2\, y) + s'_3 \cos(s_3\, y),$$
$$z' = s'_1 \cos(s_1\, z) + s'_2 \cos(s_2\, z) + s'_3 \cos(s_3\, z)$$

ein System homogener linearer Gleichungen.

In diesen Gleichungen sind die Winkel gegebene Grössen. Da s'_1, s'_2, s'_3 sich unendlich wenig von s_1, s_2, s_3 unterscheiden, so kann man setzen

$$s'_1 = s_1\,(1 + \lambda),$$
$$s'_2 = s_2\,(1 + \mu),$$
$$s'_3 = s_3\,(1 + \nu),$$

wo λ, μ, ν unendlich kleine Grössen sind, und erhält so ein zweites System homogener linearer Gleichungen.

In diesen letzteren sind endlich s_1, s_2, s_3 ausdrückbar durch x, y, z. Es ist nämlich

$$s_1 = x \cos(s_1\, x) + y \cos(s_1\, y) + z \cos(s_1\, z),$$
$$s_2 = x \cos(s_2\, x) + y \cos(s_2\, y) + z \cos(s_2\, z),$$
$$s_3 = x \cos(s_3\, x) + y \cos(s_3\, y) + z \cos(s_3\, z)$$

ein drittes System homogener linearer Gleichungen.

Substituirt man jetzt aus dem dritten Systeme die Werthe von s_1, s_2, s_3 in das zweite und dann aus dem zweiten die Werthe von s'_1, s'_2, s'_3 in das erste, so erhält man x', y', z' ausgedrückt durch x, y, z in homogenen linearen Functionen. Diese Functionen enthalten 9 Coefficienten; 6 von denselben sind von einander unabhängig, nämlich λ, μ, ν und die drei Grössen, auf welche sich gemäss den schon angeführten Relationen die 9 Cosinus reduciren. Daraus folgt, dass drei Relationsgleichungen zwischen diesen 9 Coefficienten stattfinden müssen. Diese sind die folgenden:

Der Coefficient von y ist in dem Ausdrucke für x'

$$\left.\begin{matrix} x' \\ y \end{matrix}\right\} = (1+\lambda)\cos(s_1 x)\cos(s_1 y) + (1+\mu)\cos(s_2 x)\cos(s_2 y) + (1+\nu)\cos(s_3 x)\cos s_3 y).$$

Die rechte Seite ist symmetrisch in Beziehung auf x und y. Daher muss sein in analoger symbolischer Bezeichnungsweise

$$\left.\begin{matrix} x' \\ y \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} y' \\ x \end{matrix}\right\}.$$

Ebenso ergibt sich,

$$\left.\begin{matrix} y' \\ z \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} z' \\ y \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} z' \\ x \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} x' \\ z \end{matrix}\right\}. \qquad (\beta.)$$

Bezeichnet man die 6 Coefficienten, auf welche sich so die ursprüngliche Anzahl reducirt mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$, so werden hiernach die Werthe von x', y', z'

$$\left.\begin{aligned} x' &= \mathfrak{a}\,x + \mathfrak{d}\,y + \mathfrak{e}\,z, \\ y' &= \mathfrak{d}\,x + \mathfrak{b}\,y + \mathfrak{f}\,z, \\ z' &= \mathfrak{e}\,x + \mathfrak{f}\,y + \mathfrak{c}\,z. \end{aligned}\right\} \quad (\text{b.})$$

Die Grössen λ, μ, ν, die in den Coefficienten dieser Gleichungen neben den Richtungscosinus vorkommen, haben ihren Definitionsgleichungen gemäss die geometrische Bedeutung der Dilatationen nach den drei zu einander senkrechten Richtungen. Ein Würfel vom Inhalte 1 wird somit $(1 + \lambda)(1 + \mu)(1 + \nu)$ und daraus ergibt sich unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung sofort die räumliche Ausdehnung

$$\lambda + \mu + \nu.$$

Es existiren also drei Arten von unendlich kleinen Veränderungen, welche alle die Eigenschaft haben, dass die Coordinaten eines Punctes nach der Veränderung lineare Functionen sind der Coordinaten vor der Veränderung: die Verschiebung, die Drehung und die Ausdehnung. Bei der Verschiebung treten in den Functionen drei, bei der Drehung ebenfalls drei, bei der Ausdehnung aber sechs von einander unabhängige Coefficienten auf.

Werden nun alle drei Veränderungen nach einander an demselben Systeme vorgenommen, so sind auch noch die Coordinaten nach den Veränderungen lineare Functionen der Coordinaten vor denselben. Diese Functionen enthalten 12 von einander unabhängige Coefficienten. Die Zahl der Coefficienten kann aber nur 12 sein. Daraus folgt, dass jene drei Veränderungen zusammen die neuen Coordinaten zu linearen Functionen der alten von der allgemeinsten Form machen, dass also Verschiebung, Drehung und Ausdehnung vereinigt die allgemeinste unendlich kleine Aenderung des Systemes bilden.

Es soll jetzt umgekehrt eine unendlich kleine Aenderung der genannten Art, bei welcher die neuen Coordinaten lineare Functionen der ursprünglichen von der allgemeinsten Form sind, gegeben sein und dieselbe in jene drei partiellen Veränderungen zerlegt werden, durch deren Vereinigung sie entstanden gedacht werden kann.

Die ursprünglichen Coordinaten eines Punctes seien

x, y, z, die schliesslichen x', y', z'; dann bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= a + a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ y' &= b + b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + c_3 z, \end{aligned}$$

in denen nach einander unendlich klein werden sollen

$$\begin{matrix} a, & a_1 - 1, & a_2, & a_3, \\ b, & b_1, & b_2 - 1, & b_3, \\ c, & c_1, & c_2, & c_3 - 1. \end{matrix}$$

Die Veränderungen seien in der Reihenfolge: Dilatation, Rotation, Translation ausgeführt, die Coordinaten nach der Drehung ξ', η', ζ', vor derselben ξ, η, ζ.

Die Verschiebungen in den Richtungen der Coordinatenaxen, die für alle Puncte dieselben, also von x, y, z unabhängig sind, sind offenbar a, b, c. Daher werden die Coordinaten des Punctes x, y, z vor der Verschiebung

$$\xi' = x' - a, \qquad \eta' = y' - b, \qquad \zeta' = z' - c.$$

Setzt man in diesen Gleichungen für x', y', z' die Werthe aus den obigen Definitionsgleichungen ein, so bekommt man für diese erste Gruppe von Unbekannten

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ \eta' &= b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ \zeta' &= c_1 x + c_2 y + c_3 z. \end{aligned}\right\} \quad (c.)$$

Dies sind aber auch die Coordinaten des Punctes x, y, z nach der Rotation. Die Coordinaten desselben vor der Rotation bestimmen sich aus jenen durch die Gleichungen $(a'.)$

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' - \chi \eta' + \psi \zeta', \\ \eta &= \chi \xi' + \eta' - \varphi \zeta', \\ \zeta &= -\psi \xi' + \varphi \eta' + \zeta'. \end{aligned}$$

Werden hierin die eben gefundenen Werthe von ξ', η', ζ'

aus (c) eingesetzt und dabei die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\xi &= a_1 x + (a_2 - \chi) y + (a_3 + \psi) z,\\ \eta &= (b_1 + \chi) x + b_2 y + (b_3 - \varphi) z,\\ \zeta &= (c_1 - \psi) x + (c_2 - \varphi) y + c_3 z.\end{aligned}$$

Dies sind die Coordinaten des Punctes x, y, z nach der Dehnung; diejenigen vor der Dehnung sind die ursprünglichen x, y, z. Daher gelten für die Coefficienten der letzten Gleichungen die Relationen (β)

$$\left.\begin{matrix}\xi\\ y\end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix}\eta\\ x\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix}\zeta\\ y\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}\zeta\\ x\end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix}\xi\\ z\end{matrix}\right\}.$$

Es muss also z. B. $a_2 - \chi = b_1 + \chi$, d. h. $\chi = \frac{a_2 - b_1}{2}$. Daraus entspringen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{b_3 - c_2}{2},\\ \psi &= \frac{c_1 - a_3}{2},\\ \chi &= \frac{a_2 - b_1}{2},\end{aligned}\right\} \quad (\gamma.)$$

welche die Rotationen bestimmen.

Setzt man die Werthe von φ, ψ, χ aus (γ) ein in die obigen Gleichungen, so folgt für die zweite Gruppe von Unbekannten

$$\left.\begin{aligned}\xi &= a_1 x + \frac{a_2 + b_1}{2} y + \frac{a_3 + c_1}{2} z,\\ \eta &= \frac{b_1 + a_2}{2} x + b_2 y + \frac{b_3 + c_2}{2} z,\\ \zeta &= \frac{c_1 + a_3}{2} x + \frac{c_2 + b_3}{2} y + c_3 z,\end{aligned}\right\} \quad (d.)$$

woraus sich Schlüsse über die Dilatation ziehen lassen.

Hierzu wähle man den Punct x, y, z auf einer Kugelfläche, welche mit dem Radius 1 um den Ursprung der Coordinaten beschrieben ist, d. h. es soll sein

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Lässt man die Axen der x, y, z mit den drei zu einander senkrechten Richtungen s_1, s_2, s_3 der Dehnung zusammenfallen, so sind nach derselben die Coordinaten

$$\xi = (1+\lambda)\,x, \qquad y = (1+\mu)\,y, \qquad \zeta = (1+\nu)\,z.$$

Werden die aus diesen Gleichungen bestimmten Werthe von x, y, z in die vorhergehende Gleichung eingesetzt, so bekommt man

$$\frac{\xi^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{\eta^2}{(1+\mu)^2} + \frac{\zeta^2}{(1+\nu)^2} = 1,$$

d. h. der Punct ξ, η, ζ liegt auf einem Ellipsoide, dessen Hauptaxen die Richtungen s_1, s_2, s_3 haben und beziehlich $1+\lambda$, $1+\mu$, $1+\nu$ sind. Diese Hauptaxen sollen bestimmt werden. Sie werden gefunden, indem man die Minima und Maxima von $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ sucht unter der Bedingung, dass $x^2+y^2+z^2=1$.

Aus den Gleichungen (*d.*) ergibt sich bei Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = a_1^2\,x^2 + b_2^2 y^2 + c_3^2\,z^2 + 2(a_2+b_1)\,xy + 2(b_3+c_2)\,yz + 2\,(c_1+a_3)\,z\,x.$$

Die Bedingung für die Grenzwerthe dieser Grösse ist daher

$$\left(a_1^2\,x + [a_2+b_1]\,y + [c_1+a_3]\,z\right)dx + \left(b_2^2\;y + [a_2+b_1]\;x + [b_3+c_2]\,z\right)dy + \left(c_3^2\,z + [c_1+a_3]\,x + [b_3+c_2]\,y\right)dz = 0. \quad (l.)$$

Diese Gleichung ist an die Beschränkung geknüpft $x^2+y^2+z^2=1$. Daraus ergibt sich für die Differentiale dx, dy, dz die Bedingung

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0. \qquad (m.)$$

Vermittelst der Gleichung (*m.*) kann man eines der Differentiale aus der Gleichung (*l.*) eliminiren; wenn dann die übrig bleibenden unabhängig von einander gesetzt werden, so zerfällt die Gleichung ($l.$) in die Gleichungen des Problemes. Statt dessen kann man aber die Gleichung ($m.$) auch mit einem Factor $\varDelta$ multipliciren, von ($l.$) subtrahiren und die Coefficienten der Differentiale einzeln gleich Null setzen. So entstehen die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}(a_1^2 - \varDelta)\,x + (a_2 + b_1)\,y + (c_1 + a_3)\,z = 0,\\ (b_1 + a_2)\,x + (b_2^2 - \varDelta)\,y + (b_3 + c_2)\,z = 0,\\ (c_1 + a_3)\,x + (c_2 + b_3)\,y + (c_3^2 - \varDelta)\,z = 0.\end{array}\right\}\quad (n.)$$

Für eine Bestimmung des Multiplicators $\varDelta$ ergibt sich nun zunächst aus diesen drei Gleichungen die Eliminationsgleichung dritten Grades

$$\varDelta^3 - \varDelta^2\left(a_1^2 + b_2^2 + c_3^2\right) + \varDelta\left(a_1^2\,c_3^2 + b_2^2\,c_3^2 + a_1^2\,b_2^2\right) - a_1^2\,b_2^2\,c_3^2 = 0,$$

in welcher wieder die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt sind. Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\varDelta_1 = a_1^2,\ \ \varDelta_2 = b_2^2,\ \ \varDelta_3 = c_3^2.$$

Eine zweite Bestimmung von $\varDelta$ erhält man durch Multiplication der Gleichungen ($n.$) mit x, y, z und Addition unter der Berücksichtigung von $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Es kommt heraus

$$\varDelta = a_1^2\,x^2 + b_2^2\,y^2 + c_3^2\,z^2 + 2\,x\,y\,(a_2 + b_1) + 2\,y\,z\,(b_3 + c_2) + \\ + 2\,z\,x\,(c_1 + a_3)$$

oder in Hinsicht auf die obige Gleichung für $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$

$$\varDelta = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Die gefundenen Werthe $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$ stellen also jedenfalls die Quadrate von Radii vectores des Ellipsoides dar. Da sie aber der Bedingung des Maximums und Minimums genügen, so sind sie die Quadrate der drei Halbaxen, d. h.

$$a_1 = 1 + \lambda,\qquad b_2 = 1 + \mu,\qquad c_3 = 1 + \nu.$$

Daraus folgt für die räumliche Ausdehnung

$$\lambda + \mu + \nu = a_1 - 1 + b_2 - 1 + c_3 - 1. \qquad (\delta.)$$

Damit ist die Grösse der drei elementaren Veränderungen, welche die allgemeinste Veränderung zusammensetzen, bestimmt. Diese Vereinigung und Zerlegung der Veränderungen ist wesentlich an die Bedingung unendlicher Kleinheit geknüpft und bildet einen speciellen Fall des allgemeinen Principes der Superposition unendlich kleiner Bewegungen.

Die gewonnenen Resultate, welche sich auf irgend ein System beziehen, sollen jetzt auf das Flüssigkeitstheilchen angewendet werden. Die unendlich kleine Veränderung eines solchen war definirt durch die Gleichungen (1.)

$$a' = u\,dt + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right) a + \frac{\partial u}{\partial y}\,dt\, b + \frac{\partial u}{\partial z}\,dt\;c,$$

$$b' = v\,dt + \frac{\partial v}{\partial x}\,dt\, a + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\,dt\right) b + \frac{\partial v}{\partial z}\,dt\;c,$$

$$c' = w\,dt + \frac{\partial w}{\partial x}\,dt\, a + \frac{\partial w}{\partial y}\,dt\, b + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\,dt\right) c,$$

lineare Functionen von den Eigenschaften derer, die hier zerlegt wurden. Nach den Entwicklungen können daher sofort die drei elementaren Veränderungen des Flüssigkeitstheilchens angeben werden. Es sind die Componenten der Translation nach den Axen im Zeitelement dt

$$u\,dt, \qquad v\,dt, \qquad w\,dt,$$

die der Drehungen

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) dt, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) dt, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dt,$$

die räumliche Ausdehnung endlich

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dt.$$

Die Componenten der Translationsgeschwindigkeit sind also

$$u, \quad v, \quad w,$$

die der Drehungsgeschwindigkeit

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ \eta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \zeta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \quad (2.)$$

und die räumliche Dilatation ist

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3.)$$

Die Verschiebungen nach den Coordinatenaxen werden hierin dem ganzen Flüssigkeitstheilchen zugeschrieben. Da dieses nun unendlich klein ist, so sind die Verschiebungen seiner kleinen Theilchen höherer Ordnung, die von der Rotation und Ausdehnung herrühren, unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung. Dies ist in Uebereinstimmung damit, dass $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$ strenge die Componenten der ganzen Bewegung nach den Coordinatenaxen darstellen.

2.

Aus den Componenten der ganzen Geschwindigkeit u, v, w leitet man die der Rotation eines Flüssigkeitstheilchens ab, indem man setzt

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ \eta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \zeta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Die Differentialquotienten beziehen sich hierbei auf die unendlich kleinen Theilchen höherer Ordnung der Elemente. Aus diesen Gleichungen ergibt sich sofort

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Diese Relation gilt unter allen Umständen und ist eine wesentliche Consequenz der linearen Natur der Functionen, welche die aus der unendlich kleinen Aenderung hervorgehenden neuen Coordinaten durch die alten ausdrücken.

Beschränkt man die Untersuchung jetzt auf die incompressibeln Flüssigkeiten, so hat man die zu der letzten Gleichung analoge Relation für die Grössen u, v, w

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

In diesem Falle lassen sich nun die Translationsverschiebungen der Elemente als Rotationen auffassen, die von Theilchen zu Theilchen höherer Ordnung variiren. Die Translationen lassen sich darum hier umgekehrt aus den Rotationen bestimmen. Dazu bilde man die zu den Gleichungen der Rotationen analogen Ausdrücke

$$w_1 = 2\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right),$$

$$w_2 = 2\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right),$$

$$w_3 = 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

und suche zunächst die Bedeutung der Grössen w_1, w_2, w_3.

Die Differentiation von ξ, η, ζ führt unter Beachtung der obigen Relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

sofort auf die Gleichungen

$$-2\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$
$$-2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$
$$-2\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Bezeichnet man die Summe der zweiten Differentialquotienten von u, v, w mit $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, so hat man

$$\Delta u=-w_1, \qquad \Delta v=-w_2, \qquad \Delta w=-w_3 \qquad 1.)$$

Relationen, welche die gesuchten Grössen w_1, w_2, w_3 durch die Componenten der Geschwindigkeit u, v, w ausdrücken. Es können daher umgekehrt die letzteren sofort durch die Grössen w_1, w_2, w_3 dargestellt werden. Die Integration, welche dazu führt, wird im Folgenden entwickelt.

Es sei ein System von materiellen Puncten vorausgesetzt, welche mit bestimmten nur von ihrer Lage d. h. ihren Coordinaten abhängenden Kräften auf einander wirken. Dann steht ein Punct x, y, z dieses Systemes unter der Einwirkung aller übrigen Puncte x_i, y_i, z_i. Jede der hieraus entspringenden Kräfte ist eine Function der Entfernung r_i des Punctes x, y, z von dem betreffenden anderen Puncte x_i, y_i, z_i und kann daher durch $f_i(r_i)$ dargestellt werden. Ihre rechtwinkligen Componenten nach den Coordinatenaxen sind

$$\xi_i=f_i(r_i)\cos(r_i x), \quad \eta_i=f_i(r_i)\cos(r_i y), \quad \zeta_i=f_i(r_i)\cos(r_i z).$$

Aber die Entfernung r_i wird durch den Ausdruck bestimmt

$$r_i=\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+(z_i-z)^2},$$

dessen Differentiation ergibt

$$-\frac{\partial r_i}{\partial x}=\frac{x_i-x}{r_i}=\cos(r_i x), \qquad -\frac{\partial r_i}{\partial y}=\frac{y_i-y}{r_i}=\cos(r_i y),$$
$$-\frac{\partial r_i}{\partial z}=\frac{z_i-z}{r_i}=\cos(r_i z);$$

daher werden die Componenten

$$\xi_i = - f_i(r_i)\,\frac{\partial r_i}{\partial x},\quad \eta_i = - f_i(r_i)\,\frac{\partial r_i}{\partial y},\quad \zeta_i = - f_i(r_i)\,\frac{\partial r_i}{\partial z}.$$

Setzt man nun

$$F_i(r_i) = - \int f_i(r_i)\,dr_i\,,$$

so wird

$$\xi_i = \frac{\partial F_i(r_i)}{\partial x},\quad \eta_i = \frac{\partial F_i(r_i)}{\partial y},\quad \zeta_i = \frac{\partial F_i(r_i)}{\partial z}.$$

Diese einzelnen in x, y, z angreifenden Kräfte setze man zu einer Resultante zusammen. Die Componenten derselben werden sein

$$\Xi = \Sigma\frac{\partial F_i(r_i)}{\partial x},\quad H = \Sigma\frac{\partial F_i(r_i)}{\partial y},\quad Z = \Sigma\frac{\partial F_i(r_i)}{\partial z},$$

oder wenn gesetzt wird

$$\varphi = \Sigma F_i\,(r_i)\,,$$

$$\Xi = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad H = \frac{\partial \varphi}{\partial y},\quad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (a.)$$

Die so definirte Function φ nennt man die Potentialfunction des Systemes x_i, y_i, z_i.

Nach den Gleichungen $(a.)$ ist die Resultante

$$R = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$$

und ihre Richtungscosinus werden

$$a = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{R},\quad b = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{R},\quad c = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{R}.$$

Nach irgend einer Richtung s genommen, deren Cosinus

$$\alpha = \frac{dx}{ds},\quad \beta = \frac{dy}{ds},\quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

sind, wird die Componente von R

$$S = R\,(a\alpha + b\beta + c\gamma) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Die Potentialfunction hat daher die Eigenschaft, dass ihr Differentialquotient nach irgend einer Richtung gebildet, die in die letztere fallende Componente der Gesammtkraft R darstellt.

Die Gleichung

$$\varphi = A$$

stellt eine Fläche dar, in welcher die Potentialfunction überall den nämlichen Werth hat. Man nennt eine solche Fläche eine Fläche constanten Potentiales oder das Potentialniveau. Die Differentiation der Gleichung ergibt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0$$

und die Division dieses Ausdruckes durch R und ds

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{R} \frac{dx}{ds} + \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{R} \frac{dy}{ds} + \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{R} \frac{dz}{ds} = 0,$$

eine Relation, die aussagt, dass der Winkel zwischen der Resultante und der Verschiebung in dem Potentialniveau ein rechter ist. Die Kraft wirkt somit an allen Puncten des Potentialniveau senkrecht zu letzterem. Es wird daher sein

$$\frac{d\varphi}{dn} = R$$

d. h. der Differentialquotient der Potentialfunction nach der Normale des Potentialniveau stellt die ganze in dem betreffenden Puncte wirkende Kraft dar. Linien, deren Richtung in jedem Puncte senkrecht zu dem entsprechenden Potentialniveau steht, nennt man Kraftlinien; dieselben besitzen die Eigenschaft, dass die Tangente in jedem Puncte die Richtung der Kraft liefert.

Wirkt das System x_i, y_i, z_i auf eine Reihe von Puncten x_k, y_k, z_k, so sind die Componenten der auf den Punct x_k, y_k, z_k wirkenden Kraft

$$\Xi_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}, \quad H_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_k}, \quad Z_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_k}.$$

Hierin hängt die Function φ_k nur von x_k, y_k, z_k ab, nicht aber von $x_{k'}, y_{k'}, z_{k'}$; bei der Differentiation können somit je alle übrigen Functionen $\varphi_{k'}$ hinzugefügt werden, ohne dass dies das Resultat änderte. Setzt man daher

$$\Phi = \Sigma\, \varphi_k,$$

so wird

$$\Xi_k = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \quad H_k = \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}, \quad Z_k = \frac{\partial \Phi}{\partial z_k}.$$

Die Componenten der verschiedenen Resultirenden sind also die partiellen Differentialquotienten derselben Grösse Φ, die aber jetzt eine Function ist von so viel Variabeln als Coordinaten für alle Puncte x_k, y_k, z_k zusammen vorkommen. Diese Function Φ heisst die Potentialfunction des Systemes der x_i, y_i, z_i auf das System der x_k, y_k, z_k. Ein specieller Fall ist der, in dem beide Systeme identisch sind. Dann ist Φ die Potentialfunction des Systemes auf sich selbst.

Die Potentialfunction eines Systemes enthält die Function $f_i(r_i)$, welche die zwischen den Puncten x_i, y_i, z_i und x, y, z wirkende Kraft als abhängig von der Distanz r_i dieser Puncte gibt. In dem speciellen Falle, in welchem die Kräfte sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernung verhalten, soll die Potentialfunction das Potential von Massen schlechthin genannt werden. Bei passender Wahl der Einheit der Kraft wird dann

$$f_i(r_i) = \frac{m_i}{r_i^2}, \quad F(r_i) = -\frac{m_i}{r_i}, \quad \varphi = -\Sigma_i \frac{m_i}{r_i},$$

wobei die Masse des angezogenen Punctes x, y, z als Eins angenommen ist. Erfüllen die Massen m_i den Raum stetig, so geht φ über in

$$\varphi = -\iiint \frac{\varrho}{r_i}\, dx_i\, dy_i\, dz_i, \qquad (\alpha'.)$$

wenn ϱ die Dichtigkeit der Masse im Puncte x_1, y_1, z_1 bedeutet.

In dem Integrale ist ϱ nur von x_1, y_1, z_1, nicht aber von x, y, z abhängig; r_1 dagegen ist eine Function von x, y, z. Berücksichtigt man dies und die specielle Form dieser Function

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

so werden die Differentialquotienten von φ nach x, y, z

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \iiint \frac{\varrho\,(x_1 - x)}{r_1^3}\, dx_1\, dy_1\, dz_1, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \iiint \frac{\varrho\,(y_1 - y)}{r_1^3}\, dx_1\, dy_1\, dz_1, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \iiint \frac{\varrho\,(z_1 - z)}{r_1^3}\, dx_1\, dy_1\, dz_1. \end{aligned}\right\} \quad (a'.)$$

Wir betrachten die zweiten Differentialquotienten dieses Potentiales von Massen.

Es sei ein Raum T mit Massen, die im umgekehrten Quadrate der Entfernung auf einen Punct x, y, z von der Masse Eins wirken, erfüllt derart, dass die Dichtigkeit ϱ eine Function $f(x_1, y_1, z_1)$ des Ortes x_1, y_1, z_1 in dem Raume T ist, deren Werth sich in T überall stetig ändert, ausserhalb T aber gleich Null ist. Die Grenzfläche dieses Raumes T werde parallel der x Axe um e rückwärts bewegt und so zur Grenzfläche eines zweiten Raumes T'. T^0 sei der Raum, welcher T und T' gemeinschaftlich bleibt; dann ist $T = T^0 + \Theta$, $T' = T^0 + \Theta'$, wenn Θ und Θ' die nicht gemeinschaftlichen Theile bedeuten.

Es sollen die drei Integrale untersucht werden

$$\iiint \frac{f(x_1, y_1, z_1)\ (x_1 - x)}{\left\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\, dx_1\, dy_1\, dz_1, \qquad (1.)$$

$$\iiint \frac{f(x_1, y_1, z_1)(x_1 - x - e)}{\left\{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} dx_1\, dy_1\, dz_1, \qquad (m.)$$

$$\iiint \frac{f(x_1 + e, y_1, z_1)(x_1 - x)}{\left\{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} dx_1\, dy_1\, dz_1. \qquad (n.)$$

Das Integral ($l.$) über T ausgedehnt ist der Werth von $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ in dem Puncte x, y, z. Das Integral ($m.$) über T ausgedehnt ist der Werth von $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ in dem Puncte $x+e, y, z$, welcher Werth $= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \xi$ gesetzt werde. Das Integral($n.$) über T' ausgedehnt ist mit ($m.$) identisch. Ist also das Integral ($l.$) ausgedehnt über T^0 gleich l, über Θ gleich λ und das Integral ($m.$) ausgedehnt über T^0 gleich l', über Θ' gleich λ', so wird

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = l + \lambda, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \xi = l' + \lambda'.$$

Setzt man daher

$$f(x_1 + e, y_1, z_1) - f(x_1, y_1, z_1) = \Delta\varrho,$$

so ergibt sich

$$\iiint \frac{\frac{\Delta\varrho}{e}(x_1 - x)\, dx_1\, dy_1\, dz_1}{\left\{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{l'-l}{e} \qquad (o.)$$

wobei das Integral auf der linken Seite über den Raum T^0 ausgedehnt werden muss.

Dies gilt allgemein für jede Lage von x, y, z. Bei der weiteren Entwicklung soll der Fall, in dem x, y, z auf der Oberfläche der Masse liegt, ausgeschlossen werden.

Lässt man e unendlich klein werden, so sind die Räume Θ, Θ' zwei unendlich dünne an der Oberfläche von T liegende Raumschichten; zerlegt man diese Oberfläche in Elemente ds und bezeichnet mit α den Winkel, welchen die in ds nach Innen gerichtete Normale mit der x Axe bildet, so wird α überall spitz sein, wo die Oberfläche von T an Θ grenzt, stumpf dagegen, wo sie an Θ' grenzt. Die Raumelemente von Θ werden also ausgedrückt durch $e \cdot \cos\alpha\, ds$, die von Θ' dagegen durch $-e\cos\alpha\, ds$. Daher wird

$$\int \frac{f(x_1, y_1, z_1)\ (x_1 - x) \cos\alpha ds}{\left\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\varrho\,(x_1 - x) \cos\alpha ds}{r_1^3} = \frac{\lambda - \lambda'}{e},$$

wobei die Integrale über die ganze Oberfläche auszudehnen sind.

Unter Voraussetzung eines unendlich kleinen Werthes von e geht ferner $\frac{\varDelta\varrho}{e}$ über in $\frac{\partial f(x_1, y_1, z_1)}{\partial x_1} = \frac{\partial \varrho}{\partial x_1}$ und das Integral (o.) wird

$$\iiint \frac{\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}(x_1 - x)}{r_1^3}\, dx_1\, dy_1\, dz_1 = \frac{l' - l}{e}.$$

Schliesslich ist für ein unendlich kleines e

$\frac{l' - l}{e} - \frac{\lambda - \lambda'}{e} = \frac{\xi}{e}$ nichts anderes als $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$;

es ergibt sich somit das einfache Resultat:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \iiint \frac{\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}(x_1 - x)}{r_1^3}\, dx_1\, dy_1\, dz_1 - \int \frac{\varrho(x_1 - x)\cos\alpha}{r_1^3}\, ds.$$

Ganz entsprechend bekommt man

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \iiint \frac{\frac{\partial\varrho}{\partial y_1}(y_1 - y)}{r_1^3}\, dx_1\, dy_1\, dz_1 - \int \frac{\varrho(y_1 - y)\cos\beta}{r_1^3}\, ds.$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \iiint \frac{\frac{\partial\varrho}{\partial z_1}(z_1 - z)}{r_1^3}\, dx_1\, dy_1\, dz_1 - \int \frac{\varrho(z_1 - z)\cos\gamma}{r_1^3}\, ds,$$

Die Summation dieser Ausdrücke unter Berücksichtigung, dass

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_i}\frac{x_i - x}{r_i} + \frac{\partial \varrho}{\partial y_i}\frac{y_i - y}{r_i} + \frac{\partial \varrho}{\partial z_i}\frac{z_i - z}{r_i} = \frac{d\varrho}{dr_i},$$

$$\frac{x_i - x}{r_i}\cos\alpha + \frac{y_i - y}{r_i}\cos\beta + \frac{z_i - z}{r_i}\cos\gamma = \cos\psi,$$

wo ψ der Winkel ist, welchen die nach Aussen gerichtete Normale mit der Geraden r_i bildet, ergibt

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \iiint \frac{\frac{d\varrho_i}{dr_i}}{r_i^2}\, dx_i\, dy_i\, dz_1 - \int \frac{\varrho \cos\psi}{r_i^2}\, ds = M - N.$$

Das erste Integral M ist hierbei über den ganzen Raum T, das Integral N über die gesammte Oberfläche von T auszudehnen.

Um die erste Integration auszuführen, beschreibe man um den Punct x, y, z mit dem Radius 1 eine Kugelfläche und zerlege dieselbe in Elemente $d\sigma$. Die von x, y, z durch alle Puncte der Peripherie von $d\sigma$ geführten und unbestimmt verlängerten Linien bilden eine Kegelfläche, durch welche aus dem ganzen Gebiete T ein Raum (nach Umständen aus mehreren getrennten Stücken bestehend) ausgeschieden wird und von dem $r_i^2 d\sigma\, dr_i$ ein unbestimmtes Element ist. Derjenige Theil von M, welcher sich auf diesen Raum bezieht, ist folglich durch $d\sigma \int \frac{d\varrho}{dr_i} dr_i$ ausgedrückt, wenn die Integration über alle in T fallenden Theile einer durch x, y, z und einen Punct von $d\sigma$ gehenden, so weit als nöthig verlängerten geraden Linie erstreckt wird. Es schneide nun die gerade Linie die Oberfläche von T der Reihe nach in O', O'', ..., und es sollen dann mit r', r'', ... die Werthe von r_i in diesen Puncten, mit ds', ds'', ... die entsprechenden durch den Elementarkegel aus der Oberfläche von T ausgeschiedenen Elemente, mit

$\varrho', \varrho'', \ldots$ die Werthe von ϱ, mit $\psi', \psi'', \ldots$ die Werthe von ψ an diesen Elementen bezeichnet werden.

Für den Fall, dass x, y, z innerhalb T liegt, ist die Anzahl jener Puncte P ungerade und die Integration von $\int \frac{d\varrho}{dr_i} dr_i$ von $r_i = 0$ bis $r_i = r'$, dann von $r_i = r''$ bis $r_i = r'''$ etc. auszuführen. Wenn die Dichtigkeit von x, y, z mit ϱ_{xyz} bezeichnet wird, so hat man daher

$$\int \frac{d\varrho}{dr_i} dr_i = - \varrho_{xyz} + \varrho' - \varrho'' + \varrho''' - \ldots$$

Ferner ist, da die Winkel $\psi', \psi'', \ldots$ abwechselnd spitz und stumpf sind

$$ds' \cos \psi' = r'^2 d\sigma, \quad ds'' \cos \psi'' = - r^2 d\sigma, \text{ etc.}$$

Folglich bekommt man für den ganzen im Elementarkegel gelegenen Theil von T

$$d\sigma \int \frac{d\varrho}{dr_i} dr_i = - \varrho_{xyz} d\sigma + \frac{\varrho' \cos \psi'}{r'^2} ds' + \frac{\varrho'' \cos \psi''}{r''^2} ds'' + \ldots$$

$$= - \varrho_{xyz} d\sigma + \Sigma \frac{\varrho \cos \psi}{r_i^2} ds,$$

wo die Summation auf alle ds auszudehnen ist, welche dem Elemente $d\sigma$ entsprechen. Durch Integration über sämmtliche ds ergibt sich

$$M = - 4 \pi \varrho_{xyz} + \int \frac{\varrho \cos \psi}{r_i^2} ds = - 4 \pi \varrho_{xyz} + N,$$

da das Integral über die ganze Oberfläche zu erstrecken ist. Somit wird

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - 4 \pi \varrho_{xyz} . \qquad \text{(b.)}$$

Für den Fall, dass x, y, z ausserhalb T liegt, hat man nur diejenigen ds in Betracht zu ziehen, für welche die durch x, y, z und einen Punct von $d\sigma$ gelegte gerade Linie den Raum T wirklich trifft. Die Anzahl der Puncte $O', O'', \ldots$ wird hier immer gerade sein, die Winkel $\psi', \psi'', \ldots$ abwechselnd spitz und stumpf und die Integration ist von $r_i = r'$ bis $r_i = r''$, dann von $r_i = r'''$ bis $r_i = r^{IV}$ etc. auszuführen. Daher hat man

$$d\sigma \int \frac{d\varrho}{dr_i} dr_i = \frac{\varrho' \cos\psi'}{r'^2} ds' + \frac{\varrho' \cos\psi''}{r''^2} ds'' + \ldots = \Sigma \frac{\varrho \cos\psi}{r_i^2} ds$$

und nach der Integration über alle in Betracht kommenden ds

$$M = \int \frac{\varrho \cos\psi}{r_i^2} ds = N.$$

Folglich ist hier

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad \text{(b'.)}$$

In dieser Ableitung wurde angenommen, dass die Dichtigkeit sich in dem ganzen Raume stetig ändere. Diese Bedingung ist jedoch zur Gültigkeit des Resultates nicht nothwendig, sondern es ist blos erforderlich, dass in dem Puncte x, y, z die Dichtigkeit nach allen Seiten zu sich nach der Stetigkeit ändere, oder dass x, y, z innerhalb eines, wenn auch noch so kleinen, dieser Bedingung genügeleistenden Raumes liegt. Setzt man nämlich das Potential der in diesem Raume enhaltenen Masse gleich φ', das Potential der übrigen ausserhalb desselben befindlichen Masse gleich φ'', so wird das ganze Potential

$$\varphi = \varphi' + \varphi''.$$

Aber nach dem Entwickelten ist

$$\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial z^2} = -4\pi\varrho_{xyz},$$

$$\frac{\partial^2\varphi''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi''}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi''}{\partial z^2} = 0.$$

Daher wird wieder

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\varrho_{xyz}.$$

Fehlt dagegen die genannte Bedingung in dem Puncte x, y, z, liegt dieser also in der Scheidungsfläche zwischen zwei Räumen, in welchen, jeden für sich genommen, die Dichtigkeit stetig, aber beim Uebergange aus dem einen in den anderen sprungweise sich ändert, so haben daselbst die Summen der zweiten Differentialquotienten verschiedene Werthe. *)

Ein Potential von Massen genügt somit für jeden Punct innerhalb der Massen der Gleichung

$$\Delta\varphi = -4\pi\varrho,$$

wo ϱ die Dichtigkeit der Massen im Puncte x, y, z ist, und es befriedigt für jeden Punct ausserhalb der Massen die Gleichung

$$\Delta\varphi = 0.$$

Hat man daher umgekehrt eine Function φ der Coordinaten x, y, z, welche in einem Raume überall der Differentialgleichung

$$\Delta\varphi = -k$$

genügt, unter k eine Function von x, y, z verstanden, so wird diese Gleichung befriedigt durch die Annahme, dass φ das Potential von Massen ist, die mit der Dichtigkeit $\frac{k}{4\pi}$ in diesem Raume ausgebreitet sind, d. h.

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{k}{r_1}\, dx_1, dy_1\, dz_1.$$

*) Gauss. Werke. Bd. 5, pag. 206.

Genügt aber die gegebene Function φ der Coordinaten x, y, z in dem ganzen Gebiete der Differentialgleichung

$$\Delta\,\varphi = 0\,,$$

so kann sie als das Potential von Massen betrachtet werden, welche ausserhalb des Raumes liegen.

$$\varphi = -\iiint \frac{k}{r_1}\, dx_1\, dy_1\, dz_1\,,$$

falls die Dichtigkeit k so bestimmt werden kann, dass die Grenzbedingungen erfüllt werden. In beiden Fällen ist die Integration über alle Massen enthaltenen Theile des Raumes auszudehnen.

Dieses Resultat soll jetzt auf die Gleichungen (1.) angewandt werden. Die Geschwindigkeiten u, v, w des Flüssigkeitstheilchens genügten den Gleichungen $\Delta u = -w_1$, $\Delta v = -w_2$, $\Delta w = -w_3$. Diese Gleichungen werden befriedigt durch die Annahme, dass u, v, w die Potentiale von mit den Dichtigkeiten $\frac{w_1}{4\pi}, \frac{w_2}{4\pi}, \frac{w_3}{4\pi}$ über die Flüssigkeit ausgebreiteten Massen sind, und es wird daher durch

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{w_1}{r_1}\, dx_1\, dy_1\, dz_1\,,\\
v_1 &= -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{w_2}{r_1}\, dx_1\, dy_1\, dz_1\,,\\
w_1 &= -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{w_3}{r_1}\, dx_1\, dy_1\, dz_1
\end{aligned}\right\} \qquad (2.)$$

jedenfalls eine specielle Bewegung der Flüssigkeit dargestellt sein. Wenn nun für die nämlichen Werthe der Rotationsgeschwindigkeiten ξ, η, ζ eine zweite Flüssigkeitsbewegung u_2, v_2, w_2 existirte, so würden die Differenzen

$$u_1 - u_2\,, \quad v_1 - v_2\,, \quad w_1 - w_2$$

ebenfalls eine mögliche Bewegung der Flüssigkeit ergeben. Bei letzterer würden aber infolge der Gleichungen (2.) des ersten Abschnittes keine Rotationsbewegungen vorkommen. Es ergibt sich somit, dass allgemein für eine incompressibele Flüssigkeit

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{w_1}{r_1}\, dx_1\, dy_1\, dz_1 + u_2\,, \\ v &= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{w_2}{r_1}\, dx_1\, dy_1\, dz_1 + v_2\,, \\ w &= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{w_3}{r_1}\, dx_1\, dy_1\, dz_1 + w_2\,, \end{aligned}\right\} \qquad (2.)$$

wo u_2, v_2, w_2 eine Flüssigkeitsbewegung bezeichnet, die ohne Rotationen vor sich geht.

Diesen Gleichungen, welche die Translationsgeschwindigkeiten aus den Rotationsgeschwindigkeiten bestimmen, entsprechen physikalisch die Relationen (2.) des ersten Abschnittes, welche die Rotationsgeschwindigkeiten durch die Grössen u, v, w ausdrücken. Abwesenheit von Rotationen ist nach jenen Gleichungen gegeben durch die Bedingungen

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (3.)$$

Analog hierzu kommen für den Fall, dass

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad (3'.)$$

nur Translationen u, v, w vor, für welche die Gleichungen (3.) bestehen.

Diese ganze Untersuchung war wesentlich an die Bedingung der Incompressibilität geknüpft, und die Differentialgleichungen beziehen sich auf Elemente zweiter Ordnung. Auf Elemente erster Ordnung bezogen brauchen sie nicht erfüllt zu sein, damit dort keine Rotationen oder nur Translationen, welche den Gleichungen (3.) genügen, vorkommen.

(Fortsetzung folgt).