Ueber die geometrische Bedeutung der Multiplikation komplexer Zahlen.

Von

Joh. Orelli.

Wir haben in unserm Lehrbuch der Algebra, zweite Auflage, bei Anlass der komplexen Zahlen die Bemerkung gemacht, dass die meisten Schriften, welche über die geometrische Bedeutung komplexer Zahlen sprechen, sich einer ungenauen, ja geradezu unstatthaften, eine klare Vorstellung störenden Ausdrucksweise bedienen, indem sie nämlich Punkte der Ebene als geometrische Bilder der komplexen Zahlen betrachten. Wir haben dort erklärt, dass der Punkt, wo er auch in der Ebene liegen möge, nie das geometrische Bild einer andern Zahl als der absoluten Null sein könne, — dass wie das geometrische Bild der reellen Zahl 3 unbestritten nur das Dreifache der die Einheit repräsentirenden, übrigens ganz willkürlich gewählten Strecke sei, so auch die rein imaginäre und die komplexe Zahl zu ihrem geometrischen Bilde nur eine Linie und durchaus nicht einen Punkt haben können, dass also nicht der Zahlort der komplexen Zahl $\alpha + \beta i$, d. h. nicht der Punkt (α, β) diese Zahl repräsentire, sondern nur der aus Abscisse und Ordinate des Punktes zusammengesetzte gebrochene Zug, oder dann der nach Grösse und Richtung zugleich gewerthete Leitstrahl desselben als das geometrische Bild der Zahl $\alpha + \beta i$ aufgefasst werden müsse und dass man daher auch nicht von Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Punkten sprechen dürfe.

In einer im 3. Heft vom 5. Jahrgang der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" erschienenen Recension spricht Herr Dr. Schwarz in Gumbinnen die Ansicht aus, es vertrage sich die Multiplikation zweier komplexen Zahlen durchaus nicht mit unserer Auffassung. Da wir in unserer Entgegnung (Heft I des 6. Jahrgangs der erwähnten Zeitschrift) auf diesen Punkt nicht spezieller eingetreten sind, so wollen wir hier den Nachweis leisten, dass nicht nur unsere Auffassung komplexer Zahlen mit der Multiplikation sehr verträglich ist, sondern dass diese Operation erst dadurch den richtigen Sinn erhält. Es wird sich dabei zugleich herausstellen, dass die bekannte Definition der Multiplikation (Ableitung des Produktes aus dem Multiplikanden in der gleichen Weise, wie der Multiplikator aus der positiven Einheit abgeleitet werden kann) weder so gesucht, noch so haltlos ist, wie Viele zu glauben scheinen, sobald man nur den allerdings zu allgemein gehaltenen Passus: „wie der Multiplikator aus der positiven Einheit ableitbar ist" ersetzt durch: wie der Multiplikator durch wiederholtes Setzen der positiven Einheit oder eines Theiles derselben, oder dann durch wiederholtes Setzen des Entgegengesetzten der positiven Einheit oder eines Theiles derselben entstanden gedacht werden kann.

Um die Verifikation der Resultate möglichst leicht zu machen, wollen wir spezielle komplexe Zahlen nehmen, etwa $2 + 3i$ als Multiplikand, als Multiplikator aber der Reihe nach:

$4 + 3i$, dann $-4 + 3i$, dann $4 - 3i$ und endlich $-4 - 3i$.

1) $$\begin{aligned}(3+2i)(4+3i) &= (3+2i)\,4+(3+2i)\,3i\\ &= 12+8i+(9+6i)\,i\\ &= 12+8i+9i-6=6+17i.\end{aligned}$$

Erklärung: (Fig. 1) der Multiplikator $4+3i$ geht aus $+1$ hervor, indem man die positive Einheit erst 4, dann 3 mal als Summand setzt, das letzte Resultat zum ersten addirt und es schliesslich noch mit dem Faktor i multiplizirt. Da nun die Multiplikation einer Zahl mit dem Faktor i geometrisch einer Drehung der die Zahl repräsentirenden Strecke um 90° von rechts nach links gleichkommt, so werden wir zum Zahlort des Produktes $(3+2i)(4+3i)$ gelangen, wenn wir erst den Zahlort der komplexen Zahl $(3+2i)\,.\,4=12+8i$ aufsuchen (Punkt C), dann von diesem aus um $(3+2i)\,3=9+6i$ fortschreiten, wodurch wir zum Punkte E gelangen (auf dem Wege CDE, wo $CD=9$ und $DE=6$), endlich mit diesem gebrochenen Zug CDE noch eine Drehung nach links um 90° ausführen (denselben mit i multipliciren), wodurch er in die Lage $CD'E'$ gebracht wird. Der Punkt E' ist dann der Zahlort des Produktes $(3+2i)(4+3i)$. Und in der That: das analytisch ausgeführte Produkt ist $=6+17i$, und der Punkt E' hat wirklich die Abscisse 6 und die Ordinate 17, so dass also der gebrochene Zug OFE' oder dann die Strecke OE' d. h. der nach Länge und Richtung gewerthete Leitstrahl des Punktes E' das geometrische Bild des Produktes der beiden Zahlen ist.

2) Haben wir das Produkt

$$\begin{aligned}(3+2i)(-4+3i) &= (3+2i)\,.\,(-4)+(3+2i)\,.\,3i\\ &= -12-8i+(9+6i)i\\ &= -12-8i+9i-6=-18+i,\end{aligned}$$

so bestimmen wir erst den Zahlort von $(3 + 2i) \, . \, (-4) = -12 - 8i$, indem wir vom Nullpunkt O aus um 12 Einheiten nach links fortschreiten, vom Endpunkt G (Fig. 2) um 8 Einheiten abwärts gehen, wodurch wir zum Punkte H gelangen als dem Zahlort von $-12 - 8i$. Zu diesem Resultat (dem gebrochenen Zug OGH) addiren wir $9 + 6i$, indem wir von H aus um 9 Einheiten nach rechts schreiten, vom Endpunkt J aus noch um 6 Einheiten aufwärts, wodurch wir zum Punkte K gelangen. Nun ist aber dieser letzte Summand ($9 + 6i$ oder sein Repräsentant HJK) noch mit i zu multipliziren, was geschieht, indem wir denselben noch um 90° nach links drehen, wodurch HJ in die Lage HJ' und JK in die Lage $J'K'$ übergeführt wird. Es ist daher K' der Zahlort des Produktes $(3 + 2i)$ $(-4 + 3i)$ oder der rechtwinklig gebrochene Zug OLK' das geometrische Bild dieses Produktes. Und wirklich ist das analytisch ausgeführte Produkt $= -18 + i$, während der Punkt K' -18 zur Abscisse und $+1$ zur Ordinate hat.

3. Darstellung des Produktes

$$\begin{aligned}(3 + 2i)(4 - 3i) &= (3 + 2i) \, . \, 4 + (3 + 2i)(-3i) \\ &= 12 + 8i + (-9 - 6i)\, i \\ &= 12 + 8i - 9i + 6 = 18 - i\end{aligned}$$

Wir bilden das Produkt aus dem Multiplikanden $3 + 2i$ durch wiederholtes Setzen so, wie der Multiplikator $4 - 3i$ durch wiederholtes Setzen der positiven Einheit entsteht. Wir suchen also zuerst den Zahlort von $(3 + 2i) \, . \, 4 = 12 + 8i$, indem wir $OC' = 12$ und $C'C = 8$ machen und so zum Punkte C gelangen (Fig. 3). Zu der Zahl $12 + 8i$ addiren wir dann $-9 - 6i$, indem wir von C aus die Distanz $CD = -9$ auftragen und im Endpunkt D noch ein Perpendikel $DE = 6$ nach unten errichten; dann ist $OC'CDE$ der geometrische Repräsentant der Zahl $12 + 8i + (-9 - 6i)$. Nun ist aber der zweite Summand $-9 - 6i$ noch mit i zu multipliziren; wir müssen also den diesen Summanden repräsentirenden Zug CDE noch eine Drehung von links nach rechts um 90° machen lassen, wodurch CD in die Lage CD' und DE in die Lage $D'E'$ gebracht wird. Wir finden so den Punkt E' als Zahlort des Produktes $(3 + 2i)(4 - 3i)$. Und wirklich stimmt das geometrische Bild dieses Produktes, nämlich der gebrochene Zug OLE' vollkommen mit dem analytisch ausgeführten Produkt. Dieses ist $= 18 - i$ und da $OL = 18$ und $LE' = -i$, so ist wirklich der Zug OLE' das Bild der Zahl $18 - i$.

4. Darstellung des Produktes

$$\begin{aligned}(3 + 2i)(-4 - 3i) &= -12 - 8i + (-9 - 6i)i \\ &= -6 - 17i\end{aligned}$$

Der Multiplikator $-4 - 3i$ geht aus der positiven Einheit hervor, indem man das Entgegengesetzte derselben erst 4 mal als Summand setzt, dann 3 mal und das letzte Resultat noch mit i multiplizirt. Wir werden also das Produkt finden, wenn wir das Entgegengesetzte des Multiplikanden, also $-3 - 2i$ erst 4 mal als Summand setzen, dann 3 mal, das letzte Resultat zum ersten addiren und es schliesslich noch mit i multipliziren. Wir tragen also (Fig. 4) erst das geometrische Bild der Zahl $(3 + 2i).(-4) = -12 - 8i$ auf, welches gleich ist dem gebrochenen Zug OGH; von dem Endpunkt H aus tragen wir den zweiten Summanden $(-9 - 6i)$ auf, indem wir $HJ = 9$ nach links abtragen, dann von dem Endpunkt J aus noch um 6 Einheiten abwärts gehen; wir kommen so zu dem Punkt K, welcher der Zahlort ist von $-12-8i+(-9-6i)$. Nun ist aber unser Produkt $=$ $-12-8i+(-9-6i)i$; wir müssen also den Summanden $-9-6i$ noch mit i multipliziren, d. h. sein geometrisches Bild HJK noch eine Umdrehung von 90° links herum machen lassen, wodurch HJ in die Lage HJ' und JK in die Lage $J'K'$ übergeführt wird. Der Endpunkt K' ist dann der Zahlort des Produktes $(3+2i)(-4-3i)$. Und wirklich hat der Punkt K' zur Abscisse $OL=-6$ und zur Ordinate $LK'=-17$; also wäre OLK' das geometrische Bild der komplexen Zahl $-6-17i$, wie denn auch die analytische Ausführung der Multiplikation $-6-17i$ als Produkt ergibt.

Hiemit wäre die Verträglichkeit unserer Auffassung der geometrischen Bilder komplexer Zahlen — als die vom Nullpunkt aus zum Zahlort führenden rechtwinklig gebrochenen Züge — mit dem Begriff der Multiplikation nachgewiesen. Da aber der nach Grösse und Richtung zugleich gewerthete Leitstrahl eines Punktes vollkommen äquivalent ist dem aus Abscisse und Ordinate zusammengesetzten rechtwinklig gebrochenen Zug, wie aus der Gleichung

$$\alpha+\beta i=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\frac{\beta i}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)= \varrho\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

hervorgeht, in welcher

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\varrho \text{ und } \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\cos\varphi$$

gesetzt wurde, so folgt daraus, dass man ebenso gut den nach Grösse und Richtung zugleich gewertheten Leitstrahl als das geometrische Bild einer komplexen Zahl betrachten kann und dass daher diese letzte Auffassung mit dem

Begriffe der Multiplikation nicht minder verträglich sein muss.

Um indessen auch den letzten Zweifel zu heben, wollen wir hier noch einen besondern Nachweis folgen lassen.

Seien (Figur 5) A und A' zwei Punkte, die den komplexen Zahlen $\alpha + \beta i = \varrho\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ und $\alpha_1 + \beta_1 i = \varrho_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ entsprechen, so dass also $OB = \alpha$, $AB = \beta$, $OB' = \alpha_1$, $A'B' = \beta_1$, $OA = \varrho$, $OA' = \varrho_1$, $\sphericalangle AOB = \varphi$ und $\sphericalangle A'OB' = \varphi_1$ sei, dann führt die Ausführung der Multiplikation

$$(\alpha + \beta i)\,(\alpha_1 + \beta_1 i) = (\alpha + \beta i)\,\alpha_1 + (\alpha + \beta i)\,\beta_1 i$$

uns bei der geometrischen Darstellung zunächst auf den Punkt D als Zahlort des Produktes $(\alpha + \beta i)\,\alpha_1$. Wenn wir dazu addiren $(\alpha + \beta i)\,.\,\beta_1$, so kommen wir zum Punkte F als dem Zahlort der Summe $(\alpha + \beta i)\,\alpha_1 + (\alpha + \beta i)\,\beta_1$, und indem wir endlich den letzten Summanden noch mit i multipliziren d. h. geometrisch den gebrochenen Zug DEF noch um 90° links herum drehen, kommen wir zum Punkte M als dem Zahlort des Produktes $(\alpha + \beta i)\,(\alpha_1 + \beta_1 i)$ oder $\varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.\,\varrho_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$. Es wäre nun zu zeigen, dass der Leitstrahl OM dieses Punktes gleich dem Produkt der Leitstrahlen der beiden Punkte A und A', also $= \varrho\varrho_1$ und dass sein Winkel mit der X-Achse, also $MOC = \varphi + \varphi_1$ ist, wobei man selbstverständlich unter dem Produkt $\varrho\varrho_1$ nicht etwa das Rechteck der beiden Strecken ϱ und ϱ_1, sondern wieder eine Strecke sich zu denken hat, bestehend aus so vielen Längeneinheiten, als das Produkt der durch die Strecken ϱ und ϱ_1 repräsentirten Zahlen anzeigt.

Zunächst ist leicht einzusehen, dass die Punkte A, D und F mit dem Nullpunkt O in derselben Geraden liegen, denn da

$$\begin{aligned} OC &= \alpha\alpha_1 = OB \,.\, \alpha_1 \\ DC &= \beta\alpha_1 = AB \,.\, \alpha_1 \\ DE &= \alpha\beta_1 = OB \,.\, \beta_1 \\ EF &= \beta\beta_1 = AB \,.\, \beta_1, \end{aligned}$$

so sind die Dreiecke DOC und DEF beide ähnlich AOB, woraus folgt, dass $\sphericalangle BOA = \sphericalangle COD = \sphericalangle EDF$, und dass somit die Punkte O, A, D und F in gerader Linie liegen. Es ist daher DF die Verlängerung von OD, und da nach Drehung des Zuges DEF um 90° die Linie DF in die Lage DM kommt, so wird $DM \perp DF$, also auch $\perp OD$ und somit $\triangle DOM$ rechtwinklig in D sein. Nun ist aber $\triangle ODM \backsim \triangle OB'A'$; denn da

$$OD = \text{Modul von } (\alpha + \beta i)\,\alpha_1 = \alpha_1 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$DM = DF = \text{Modul von } (\alpha + \beta i)\,\beta_1 = \beta_1 \sqrt{\alpha^2 + p^2}$$

so hat man die Proportion:

$$OD : MD = \alpha_1 : \beta_1 = OB' : A'B'$$

Es ist also wirklich $\triangle ODM \backsim \triangle OB'A'$, woraus folgt, dass

$$OM : OA' = OD : OB' \tag{1}$$

Allein
$$OD = \alpha_1 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$
$$OB' = \alpha_1 ; \text{ somit}$$

$$OD : OB' = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} : 1 \text{ und da } \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = OA,$$

so hat man auch:

$$OD : OB' = OA : 1 \tag{2}$$

Setzt man nun in (1) statt des zweiten Verhältnisses $OD : OB'$ das ihm gleiche Verhältniss $OA : 1$, so erhält man

$$OM : OA' = OA : 1$$

oder

$$OM : \varrho_1 = \varrho : 1$$

woraus endlich folgt:

$$OM = \varrho\varrho_1.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ODM und $OA'B'$ folgt ferner, dass $\sphericalangle MOD = \sphericalangle A'OB' = \varphi_1$, und da überdiess $\sphericalangle AOB = \varphi$, so hat man

$$\sphericalangle MOC = \varphi + \varphi_1.$$

Es ist also wirklich der Leitstrahl des Punktes M (Zahlort des Produktes unserer beiden Komplexen) gleich dem Produkt der Leitstrahlen ϱ und ϱ_1 und er bildet mit der X-Achse einen Winkel $= \varphi + \varphi_1$ d. h.

Der nach Richtung und Grösse gewerthete Leitstrahl des Punktes M stellt geometrisch das Produkt der beiden Komplexen $\alpha + \beta i = \varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ und $\alpha_1 + \beta_1 i = \varrho_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$ dar.

In der Fig. (5) ist der Multiplikand $\alpha + \beta i = 2 + 3i$, der Multiplikator $\alpha_1 + \beta_1 i = 4 + i$, also $\alpha = OB = 2$, $\alpha_1 = OB' = 4$, $\beta = AB = 3$ und $\beta_1 = A'B' = 1$ angenommen worden.

Würde es sich bloss darum handeln, das Produkt $\varrho\varrho_1 [\cos(\varphi + \varphi_1) + i \sin(\varphi + \varphi_1)]$ der beiden Komplexen $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und $\varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ zu konstruiren, denen die Punkte A und B (Fig. 6) entsprechen mögen, so überlegt man blos, dass $\varrho\varrho_1$ offenbar die 4te geometrische Proportionale zu 1, ϱ und ϱ_1 ist; denn aus der Proportion

$$1 : \varrho = \varrho_1 : x$$

folgt $x = \varrho\varrho_1$.

Wir tragen also von O aus eine Distanz $OC = 1$ auf der X-Achse ab, verbinden A mit C und tragen im

Punkte B an OB einen Winkel OBD ab $= \sphericalangle OCA$ und machen BD gleich der 4ten geometrischen Proportionalen zu 1, ϱ und AC; dann behaupten wir, dass OD der geometrische Repräsentant des Produktes $\varrho\varrho_1 [\cos(\varphi + \varphi_1) + i \sin(\varphi + \varphi_1)]$ sei. Denn unmittelbar nach Construktion ist $OBD \backsim OAC$; daher

$$OC : OB = OA : OD$$

oder

$$1 : \varrho_1 = \varrho : OD$$

somit $OD = \varrho\varrho_1$. Da überdiess $\sphericalangle DOB = \varphi$, so wird $\sphericalangle DOX = \varphi + \varphi_1$ sein.

Es ist somit das Dreieck OBD zwischen dem Produkt zweier Strecken und der einen Strecke ϱ_1 ähnlich dem Dreieck OCA zwischen der andern Strecke ϱ und der positiven Einheit, was durchaus nichts anderes heisst als:

Das Produkt OD ist aus dem Multiplikanden OB gerade so gebildet, wie der Multiplikator OA aus der positiven Einheit OC.

Durch blosse Umkehrung der vorigen Aufgabe bekommen wir das geometrische Bild des Quotienten zweier Strecken. Denn wenn wir das Produkt der beiden Strecken ϱ und ϱ_1 d. h. die Strecke OD mit ϱ_2 und den Winkel $DOX = \varphi + \varphi_1$ mit φ_2 bezeichnen, so ist $OA = \varrho$ der Quotient von ϱ_2 durch ϱ_1 und der Winkel $AOX = \varphi$ ist $= \varphi_2 - \varphi_1$. Allein $OA = \varrho$ können wir leicht durch Construktion der 4ten geometrischen Proportionalen zu ϱ_1, ϱ_2 und der positiven Einheit erhalten; denn offenbar ist

$$\varrho_1 : \varrho_2 = 1 : \frac{\varrho_2}{\varrho_1}.$$

Es ist also das Dreieck OAC zwischen dem Quotienten zweier Strecken und der positiven Einheit ähnlich dem

Dreieck zwischen den beiden Strecken selbst. Wenn also $\varrho = OA = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ gemacht wird, so hat man:

$$\varrho_1 : \varrho_2 = 1 : \varrho$$

und der Winkel zwischen ϱ und der X-Achse ist $= \varphi_2 - \varphi_1$, was mit dem Resultat der analytischen Division vollkommen stimmt.

Die ganz ungezwungene Art, wie sich die Produkte komplexer Zahlen aus der Eingangs erwähnten Definition der Multiplikation ergeben, scheint uns Grund genug, die von Vielen angefochtene Definition beizubehalten, allerdings mit einer einschränkenden Modifikation. Wenn es auch Fälle gibt, wo sie nicht mehr passt, wofern man nicht vorher den Multiplikator in eine dekadische Zahl verwandelt, d. h. unmittelbar durch die Einheit oder durch Theile der Einheit ausdrückt, so scheint es uns desshalb doch noch keineswegs indicirt, sie auch für diejenigen Fälle zu verwerfen, wo sie nicht nur zulässig ist, sondern weit sicherer und rationeller zum Ziele führt, als jeder andere Weg. In der That hat von den dagegen erhobenen Einwendungen — Unbestimmtheit, Gezwungenheit und Unrichtigkeit in sofern, als sie gerade für die grundlegende Multiplikation nicht passe, »weil die absolute Einheit aus der positiven gar nicht ableitbar sei« — nur die erste Berechtigung, während die beiden anderen jedes stichhaltigen Grundes entbehren. Wenn man, ohne des wiederholten Setzens zu erwähnen, einfach sagt: Das Produkt müsse aus dem Multiplikanden in der gleichen Weise abgeleitet werden, wie der Multiplikator aus der positiven

Einheit, so liegt darin allerdings eine unstatthafte Unbestimmtheit, die, weil der Multiplikator stets auf sehr verschiedene Arten aus der positiven Einheit ableitbar ist, selbst zu ganz unrichtigen Resultaten führen kann und, wenn der Multiplikator eine Potenz oder eine Wurzelgrösse ist, auch wirklich führt, sobald die Potenz oder Wurzelgrösse nicht vorher in eine dekadische Zahl verwandelt wird. Will man daher richtig definiren, so darf man die ursprüngliche Bedeutung der Multiplikation als eines wiederholten Setzens nicht unerwähnt lassen. Die Multiplikation bleibt ein ein- oder mehrmaliges Setzen, auch wenn der Multiplikator eine gebrochene Zahl ist; nur ist es dann nicht mehr der Multiplikand selber, sondern der durch den Nenner des Multiplikators angedeutete Theil desselben, der so viel mal als Summand gesetzt werden muss, als der Zähler des Multiplikators anzeigt; — und wenn der Multiplikator eine negative ganze oder gebrochene Zahl ist, so wird die Multiplikation ein wiederholtes Setzen vom Entgegengesetzten des Multiplikanden oder eines Theiles davon. In allen diesen Fällen bleibt als gemeinschaftliches Merkmal, dass das Produkt aus dem Multiplikanden in der gleichen Weise abgeleitet wird, wie der Multiplikator unmittelbar durch wiederholtes Setzen der positiven Einheit oder ihres Entgegengesetzten oder dann eines Theiles derselben entstanden gedacht werden kann. Eine so gefasste Definition passt dann aber auf alle diejenigen Fälle, in welchen der Multiplikator irgend eine positive oder negative, ganze oder gebrochene, reelle oder komplexe Zahl ist.

Anders verhält es sich mit dem Einwurf der Gezwungenheit und Unnatürlichkeit. Es ist ein anerkanntes Prinzip in der Mathematik, bei Einführung neuer

Begriffe die Definitionen so zu fassen, dass sie entweder die frühern Definitionen als spezielle Fälle in sich enthalten oder dass dann wenigstens die für die frühern Begriffe entwickelten Operationsgesetze auch noch für die neu eingeführten Begriffe ihre Gültigkeit behalten. So sind z. B. die gewöhnlich für spitze Winkel aufgestellten Definitionen der goniometrischen Funktionen als spezielle Fälle in denjenigen enthalten, welche mit Hülfe von Abscisse, Ordinate und Leitstrahl eines Punktes vom beweglichen Schenkel eines die Grenze von 90° überschreitenden Winkels gegeben werden; es sind ferner die Definitionen einer Potenz mit dem Exponenten Null, mit einem negativen oder einem gebrochenen Exponenten konventionelle Annahmen, die zwar keineswegs aus dem ursprünglichen Begriff der Potenz resultiren, welche aber gemacht wurden, um die für gewisse Fälle nachweisbaren Operationsgesetze auch auf die übrigen Fälle ausdehnen zu können.

Ob es nun natürlicher und rationeller sei, die Relationen

$$(+a)\,.\,(-b) = -ab$$
$$(-a)\,.\,(-b) = +ab$$

als gleichsam vom Himmel gefallene Glaubenssätze zu adoptiren oder aber als Resultate hinzustellen, welche sich ganz von selbst ergeben, sobald man nur den ursprünglichen Begriff der Multiplikation in angemessener Weise verallgemeinert, das ist für uns allerdings gar keine Frage!

Was endlich den Einwurf anbelangt, die erwähnte Definition passe gerade für den einfachsten Fall nicht, weil die absolute Einheit aus der positiven gar nicht ableitbar sei, so scheint uns derselbe auf einer etwas seltsamen Vorstellung, auf einem dunklen Nimbus zu beruhen, der bei Einzelnen die Begriffe der absoluten und der positiven Zahl umdüstert. Für uns unterscheidet sich die positive Zahl von der absoluten in gar Nichts als in ihrer Gegenüberstellung zu den negativen Zahlen. Wie wir in der negativen Zahl nichts anderes als eine als subtraktiv aufgefasste absolute Zahl erblicken, so ist uns die positive Zahl nichts anderes als eine in Beziehung zu den negativen Zahlen gebrachte absolute Zahl und es ist für uns ganz einerlei, ob wir sagen: Man kann sich die negative Zahl -7 aus der positiven Einheit entstanden denken, indem man das Entgegengesetzte der positiven Einheit 7 mal als Summand setzt oder aber: man kann sich -7 aus der absoluten Einheit entstanden denken, indem man diese erst subtraktiv nimmt und dann das Resultat 7 mal als Summand setzt. Und wenn wir eine positive oder negative Grösse mit der absoluten Zahl 7 multipliziren, so bekommen wir im ersten Fall ein positives, im letzten ein negatives Resultat, und zwar genau dasselbe, wie wenn wir sie mit der positiven Zahl $+7$ multiplizirt hätten. Es liefert also die Multiplikation einer beliebigen Grösse mit der absoluten Zahl 7 nicht nur das gleiche Resultat, sondern hat auch ganz dieselbe Bedeutung, wie ihre Multiplikation mit der positiven Zahl $+7$, so dass der von dieser Seite erhobene Einwand in der That als völlig bedeutungslos, als ein Streit um des Kaisers Bart bezeichnet werden muss.

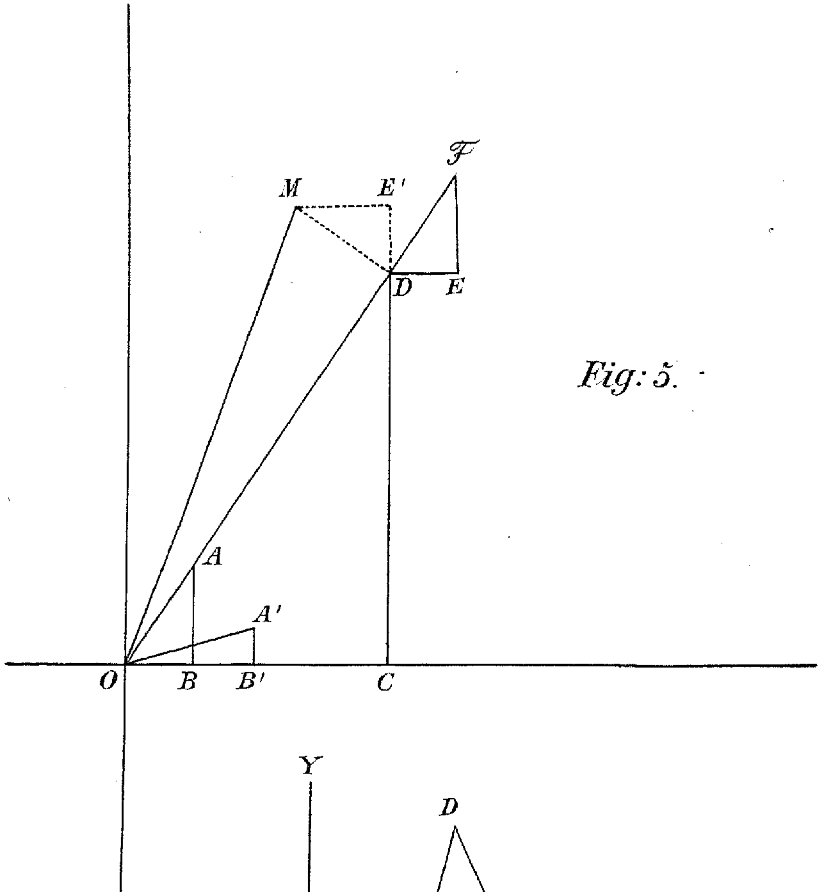

Fig: 5.

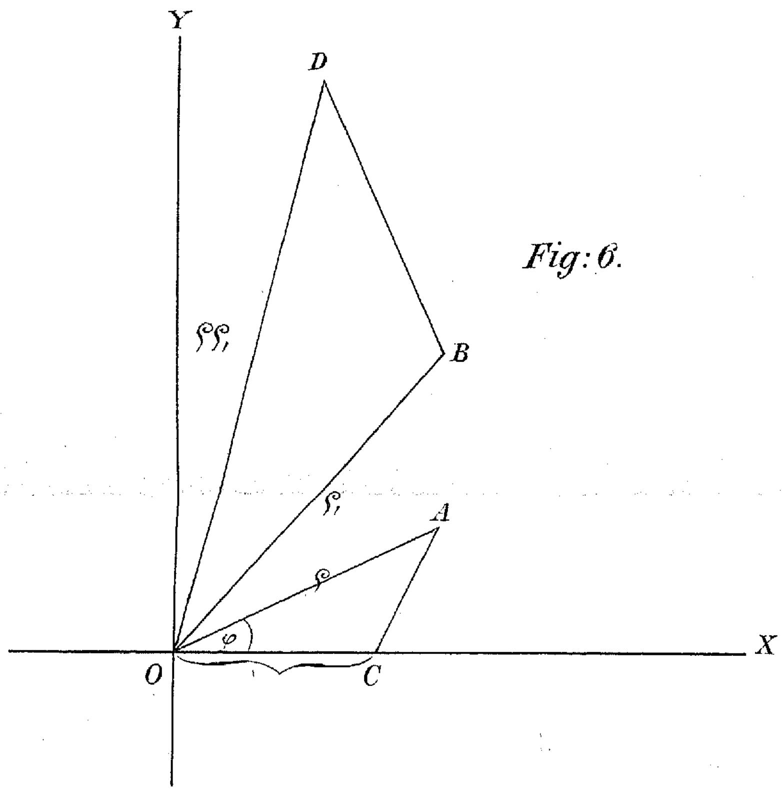

Fig: 6.

Fig: 1.

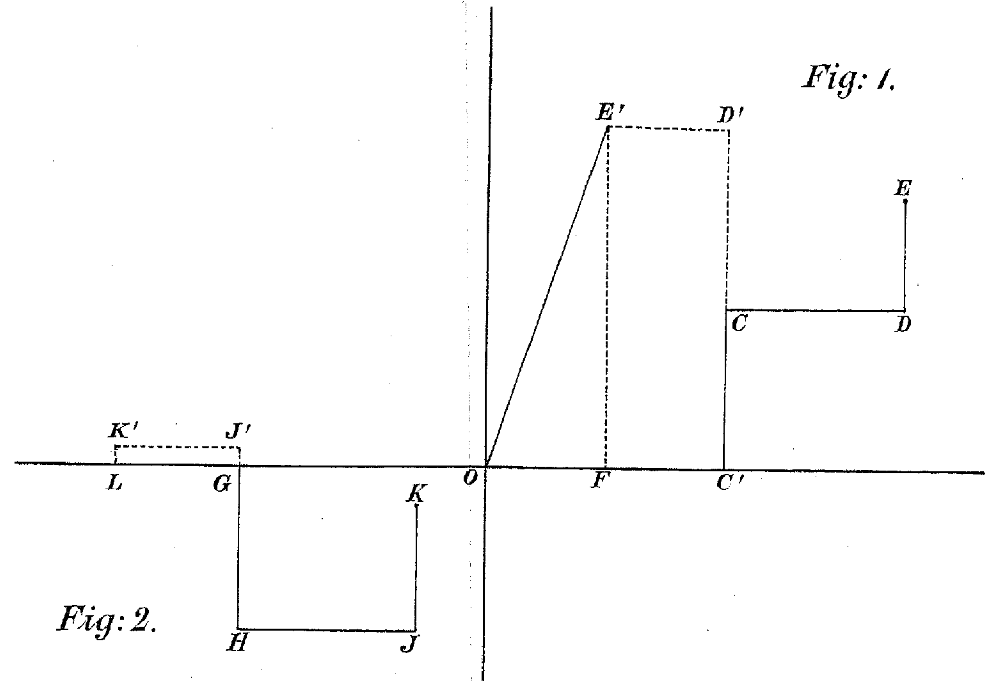

Fig: 2.

Fig: 3.

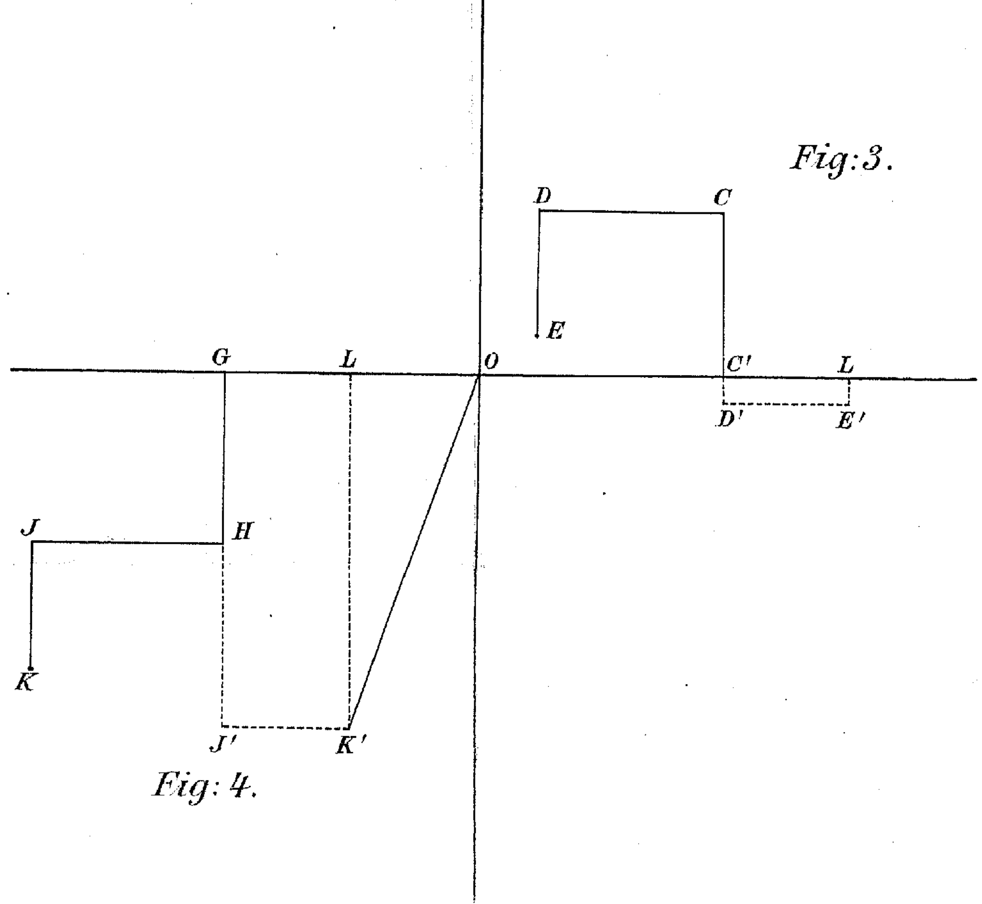

Fig: 4.