Ein Problem aus der analytischen Mechanik.

Von **Ed. Ott.**

Die vorliegende Arbeit behandelt ein Bewegungsproblem mit Hülfe der Jacobi-Hamilton'schen Bewegungstheorie. — Herr Hamilton, Professor der Astronomie in Dublin und königlicher Astronom für Irland, hat nämlich für diejenige Classe von Problemen aus der analytischen Mechanik, für welche zugleich das Princip der lebendigen Kraft und das Princip der kleinsten Wirkung gilt, die Differentialgleichungen der Bewegung in einer sehr einfachen Form gegeben und ausserdem nachgewiesen, dass für solche Probleme sich die Aufgabe auf eine nicht lineare partielle Differentialgleichung zurückführen lässt und dass, wenn man eine vollständige Lösung dieser partiellen Differentialgleichung gefunden hat, alle Integralgleichungen, d. h. die Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen, sich mit einem Schlage ergeben durch Differentiation nach den in der vollständigen Lösung vorkommenden willkürlichen Constanten. Es ist dies ohne Zweifel die bedeutendste Erweiterung, welche die analytische Mechanik seit Lagrange erfahren hat.

Hamilton nennt die durch die partielle Differentialgleichung definirte Funktion die charakteristische Funktion. — Hamilton veröffentlichte seine Erfindung hierüber in zwei Abhandlungen in den «Philosophical Transactions»:

1) On a general method in Dynamics; by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function (Philos. Transactions of the Royal Society of London for the year 1834, P. II, p. 247), und

2) Second essay on a general method in Dynamics (Ibid. 1835, P. I, p. 95).

Obgleich nun Hamilton die durch die characteristische Funktion vereinfachte Form der Integralgleichungen aufgestellt hat, so hat er doch nichts zur Auffindung der characteristischen Funktion gethan. Mit dieser letztern Aufgabe hat sich namentlich Jacobi beschäftigt und seine Arbeiten hierüber finden sich in den «Vorlesungen über Dynamik» von G. G. J. Jacobi, herausg. von A. Clebsch.

In den ersten Abschnitten meiner Arbeit wird nun die Bewegung eines Punktes auf einem Rotationsellipsoid unter den Bedingungen, wie sie die Aufgabe näher angibt, studirt und zwar:

1) mit Hülfe der von Hamilton abgeleiteten gewöhnlichen Differentialgleichungen der Bewegung und

2) mit Hülfe der partiellen Differentialgleichung.

Dabei ist die Bewegungstheorie jeweilen so weit mithineingezogen als es nöthig war.

Im letzten Abschnitte dieser Arbeit findet sich sodann eine Erweiterung der Aufgabe in Bezug auf ein dreiaxiges Ellipsoid und dort wird gezeigt, dass dieselbe Bewegung auf einem dreiaxigen Ellipsoid analytisch unausdrückbar ist und dass die Kräftefunktion modificirt werden muss um eine Integration der partiellen Differentialgleichung zu ermöglichen. Dabei wurde hauptsächlich darauf gesehen, die Kräftefunktion so zu modificiren, dass sie immer noch eine mechanische Bedeutung beibehält.

Es ist mir auch eine angenehme Pflicht, hier öffentlich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Weber, welcher mich in dem mit der VI. Abtheilung des eidgen. Polytechnikums verbundenen mathematischen Seminar in die Jacobi-Hamilton'schen Theorien einführte, und mir bei Abfassung dieser Arbeit gütige Rathschläge zukommen liess, hiefür meinen besten Dank auszusprechen.

Gehen wir nun über zu unserer Aufgabe:

Es ist ein mit homogener Masse erfülltes Rotationsellipsoid gegeben, welches nach dem Newton'schen Attractionsgesetz auf einen Punkt wirkt, der gezwungen ist sich auf der Oberfläche des gegebenen oder eines zu demselben confocalen Ellipsoids zu bewegen. Es ist die Bewegung des Punktes zu bestimmen.

I.

Die Kräftefunktion für die Newton'sche Attraction, welche umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung wirkt, heisst das Potential der anziehenden Masse in Bezug auf den angezogenen Punkt und ist nach der Potentialtheorie das Integral des Massenelementes dividirt durch seine Entfernung vom angezogenen Punkte, ausgedehnt über die ganze anziehende Masse.

Ist
$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$
die Gleichung eines homogenen Ellipsoids, so ist dessen Potential U in Bezug auf den angezogenen Punkt (a, b, c) nach Dirichlet folgende Grösse:

$$U = -\pi\left\{a^2\int^{\infty}\frac{ds}{(\alpha^2+s)R} + b^2\int^{\infty}\frac{ds}{(\beta^2+s)R} + c^2\int^{\infty}\frac{ds}{(\gamma^2+s)R} - \int^{\infty}\frac{ds}{R}\right\},$$

wobei $$R = \sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}.$$

Ist der angezogene Punkt (a, b, c) auf dem Ellipsoid selber, so ist die untere Grenze jener elliptischen Integrale Null, ist er dagegen ein äusserer, so ist die untere Grenze σ, wobei σ die einzig mögliche, reelle positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{a^2}{\alpha^2+\sigma} + \frac{b^2}{\beta^2+\sigma} + \frac{c^2}{\gamma^2+\sigma} = 1 \qquad \text{ist.}$$

Die X Componente der Anziehung ist

$$\frac{\partial U}{\partial a} = X = -2a\pi\int^{\infty}\frac{ds}{(\alpha^2+s)R},$$

wobei die untere Grenze wieder wie vorhin 0 oder σ ist.

Geht das beliebige Ellipsoid über in ein Rotationsellipsoid, wofür

$$\beta = \gamma$$

und bewegt sich der Punkt auf dem Rotationsellipsoid selbst, so wird

$$U = -\pi\left\{x^2\int_0^{\infty}\frac{ds}{(\alpha^2+s)R} + (y^2+z^2)\int_0^{\infty}\frac{ds}{(\beta^2+s)R} - \int_0^{\infty}\frac{ds}{R}\right\}$$

oder $$U = Ax^2 + B(y^2+z^2) + C,$$

wobei $$A = -\pi\int_0^{\infty}\frac{ds}{(\alpha^2+s)R}, \quad B = -\pi\int_0^{\infty}\frac{ds}{(\beta^2+s)R},$$

$$C = \pi\int_0^{\infty}\frac{ds}{R}.$$

Da wir im Verlaufe unseres Bewegungsproblems die Grössen A, B und C näher kennen müssen und diese in einem sehr einfachen Zusammenhange stehen mit den Componenten der Attraction, so wollen wir die letztern für das Rotationsellipsoid näher angeben. Für den Fall der Rotationsellipsoide gehen nämlich jene elliptischen Integrale über in Kreisfunktionen, Logarithmen und algebraische Funktionen. Nehmen wir also die Axe 2α als Rotationsaxe an, so ergibt sich

$$X = -\frac{2\pi x}{\alpha^2}\int\frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\sqrt{1+\frac{s}{\alpha^2}}} \quad \text{und}$$

$$\frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = -\frac{2\pi}{\beta^2}\int\frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)^2\sqrt{1+\frac{s}{\alpha^2}}}.$$

Haben wir es mit einem abgeplatteten Rotationsellipsoid zu thun, für welches

$$1) \qquad \beta > \alpha, \qquad \text{so ist}$$

$$\int\frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\sqrt{1+\frac{s}{\alpha^2}}} = \frac{2\alpha^3\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+s}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+s}}\right\},$$

$$\int\frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)^2\sqrt{1+\frac{s}{\alpha^2}}} = \frac{\alpha\beta^4}{\beta^2-\alpha^2}\left\{\frac{\sqrt{s+\alpha^2}}{s+\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\sqrt{s+\alpha^2}}\right\}.$$

Liegt der angezogene Punkt auf dem gegebenen Rotationsellipsoid selbst, so sind 0 und ∞ die Grenzen der Integration und es wird:

$$X = -\frac{4\pi\beta^2 x}{\beta^2-\alpha^2}\left\{1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\alpha}\right\},$$

$$\frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = -\frac{2\pi\alpha^2\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}\left\{\frac{1}{\alpha\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\alpha} - \frac{1}{\beta^2}\right\}.$$

Da nun $A = \frac{X}{2x}$ und $B = \frac{Y}{2y} = \frac{Z}{2z}$, so ist

$$A = -\frac{2\pi\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}\left\{1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\alpha}\right\},$$

$$B = -\frac{\pi\alpha^2\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}\left\{\frac{1}{\alpha\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\alpha} - \frac{1}{\beta^2}\right\}.$$

Liegt der angezogene Punkt auf dem confocalen Ellipsoid, so sind σ und ∞ die Grenzen der Integration und es wird

$$X = -\frac{4\pi\alpha\beta^2 x}{\beta^2-\alpha^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\sigma}}-\frac{1}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+\sigma}}\right\},$$

$$\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}=-\frac{2\pi\alpha\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+\sigma}}-\frac{\sqrt{\alpha^2+\sigma}}{\beta^2+\sigma}\right\}$$

und daraus ergeben sich die Grössen A und B genau so wie oben mit Hülfe der Relationen

$$A=\frac{X}{2x} \text{ und } B=\frac{Y}{2y}=\frac{Z}{2z}.$$

2) $\beta < \alpha.$

Für den Fall des gestreckten Rotationsellipsoids, wo $\beta<\alpha$, wird

$$\int\frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\sqrt{1+\frac{s}{\alpha^2}}}=\frac{2\alpha^3\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+s}}-\log\frac{\sqrt{\alpha^2+s}+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+s}-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right\},$$

$$\int\frac{ds}{\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)^2\sqrt{1+\frac{s}{\alpha^2}}}=\frac{\alpha\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\log\frac{\sqrt{\alpha^2+s}+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+s}-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}-\frac{\sqrt{\alpha^2+s}}{\beta^2+s}\right\}.$$

Liegt der angezogene Punkt auf dem gegebenen Rotationsellipsoid selbst, so sind 0 und ∞ die Grenzen der Integration und es wird

$$X = -\frac{4\pi\beta^2 x}{\alpha^2-\beta^2}\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\log\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}-1\right\},$$

$$\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}=-\frac{4\pi\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\left\{\frac{1}{2\beta^2}-\frac{1}{4\alpha\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\log\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right\}$$

und daraus ergibt sich:

$$A=-\frac{2\pi\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\log\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}-1\right\},$$

$$B=-\frac{2\pi\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\left\{\frac{1}{2\beta^2}-\frac{1}{4\alpha\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\log\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right\}.$$

Liegt der angezogene Punkt auf dem confocalen Ellipsoid, so sind σ und ∞ die Grenzen der Integration und es wird:

$$X = -\frac{4\pi\beta^2 x}{\alpha^2-\beta^2}\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\log\frac{\sqrt{\alpha^2+\sigma}+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\sigma}-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\sigma}}\right\},$$

$$\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}=-\frac{2\pi\alpha\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\left\{\frac{\sqrt{\alpha^2+\sigma}}{\beta^2+\sigma}-\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\log\frac{\sqrt{\alpha^2+\sigma}+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\sigma}-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right\}.$$

Aus diesen Ausdrücken bestimmen sich die Grössen A und B ganz auf dieselbe Weise wie vorhin.

Von besonderer Bedeutung der Attractionstheorie und der Theorie der Potentiale war die Lösung des Attractionsproblems des Ellipsoids, welche zunächst ein Bedürfniss der Astronomie war. Newton fand bereits den Satz, dass eine ellipsoidische Schicht keine Wirkung auf einen innern Punkt ausübt (Principia phil. nat. lib. I, prop. 91). Er fand ferner, dass zwei concentrische Rotationsellipsoide ähnlicher Gestalt und Lage auf zwei homologe Punkte ihrer Oberfläche Anziehungen von derselben Richtung und proportional dem Abstande vom Mittelpunkte ausüben. Hieran knüpfte Maclaurin an (Treatise on fluxions, l. I, De causa physica fluxus et refluxus maris; Académie des sciences, t. IV) und bestimmte die Attraction eines Rotationsellipsoids für einen Punkt der Oberfläche und einen äussern in der Ebene des Aequators liegenden Punkt und bewies, dass zwei confocale Ellipsoide auf einen Punkt einer Hauptaxe Wirkungen ausüben in der Richtung dieser Axe und proportional ihren Massen. Lagrange dehnte diesen Satz aus für alle Punkte eines Hauptschnittes (Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin, 1773). Die vollständige Lösung dieses Problems gelang erst Laplace (Mém. de l'Acad. des sciences, 1782; Mécanique céleste, liv. III, chap. 1). Von da an wurde das Problem von fast allen bedeutenden Mathematikern behandelt. Ivory gab ein Reductionstheorem für die Attraction eines inneren Punktes auf die für einen äussern (On the attractions of homogeneous ellipsoids, Philosoph. Transactions, 1809); Gauss, theoria attractionis corporum sphæroidicorum ellipticorum homogenorum methodo nova tractata (Commentat. Gœtting. recent. t. II (1813) oder Werke, Bd. 5, p. 1 und 279); Legendre (Traité des fonctions elliptiques, t. I, p. 539); Poisson, Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène (Mém. de l'Académie des sciences, t. XIII). — Seit Laplace war man der merkwürdigen Ansicht, dass das Problem einer synthetischen Behandlung unzugänglich sei und Legendre und Poisson sprachen sich in diesem Sinne etwas voreilig und entschieden aus (Mém. de l'Acad. des sciences, 1788 und 1834). Chasles widerlegte glänzend diese Meinung, indem er 1838 eine vollkommen synthetische Lösung gab (Comptes rendus de l'Acad. des sciences, t. VI, p. 902). Auch Dirichlet behandelte das Problem. Seine Methode gründet sich auf die Theorie des von ihm entdeckten Discontinuitätsfactors der vielfachen Integrale und findet sich in den Abhandlungen der königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1839, erschienen 1841, S. 61 der mathem. Abhandlungen (Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale von Lejeune Dirichlet, vorgelesen am 14. Febr. 1839), nebst weitern Ausführungen in Crelle's Journal, Bd. 32, S. 88 (Sur un moyen général de vérifier l'expression potential relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène). Schliesslich ist noch zu erwähnen: Jacobi, Extrait d'une lettre adressé à M. Lionville (Journal de math., t. XI, p. 341).

II.

A. Nachdem wir nun die Attraction des Ellipsoids und damit die Kräftefunction U für unser gegebenes Problem bestimmt haben, wollen wir übergehen zur Bewegungstheorie, soweit sie sich auf unsern Fall bezieht.

Lagrange hat die Differentialgleichungen der Bewegung in folgender Form gegeben:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial x_i} + \dots$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial y_i} + \dots$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial z_i} + \dots$$

$$i = 1, 2, 3, \dots n$$

wobei $L = 0\,,\quad M = 0\,, \dots$

die Bedingungen darstellen, die das System der sich bewegenden Punkte zu erfüllen hat. Die Anzahl der Bedingungen möge ν sein. Nun ist es immer möglich, an die Stelle der Variabelen

$$x_i\,,\ y_i\,,\ z_i$$

neue Variabelen $q_1, q_2, q_3, q_4, \dots q_\mu$

zu setzen, deren Anzahl $\mu = 3n - \nu$ ist und welche so gewählt sind, dass die Bedingungen

$$L = 0\,,\quad M = 0\,,\quad \dots$$

durch sie identisch erfüllt werden, d. h. dass ohne Zuhülfenahme irgend welcher Relationen zwischen den Grössen q die Gleichungen:

$L(q_1, q_2, \dots q_\mu) = 0$, $M(q_1, q_2, \dots q_\mu) = 0$ bestehen.

Durch die Einführung solcher neuer Variabelen vereinfachen sich die Differentialgleichungen der Bewegung wesentlich und namentlich auch wenn eine Kräftefunction existirt, was für unser Problem der Fall ist. Wir wollen diese vereinfachten Differentialgleichungen der Bewegung für den Fall, dass eine Kräftefunction existirt, nicht aus jener Lagrange'schen Differentialgleichung herleiten, sondern mit Hülfe des Hamilton'schen Princips, welches folgendermassen lautet:

> »Wenn die Lage des Systems zu einer Anfangszeit $t = t_0$ und zu einer Endzeit t_1 gegeben ist, so liefert die Gleichung:
>
> $$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\ dt = 0$$
>
> die Gleichungen der Bewegung, worin T die halbe lebendige Kraft und U die Kräftefunction ist und letztere von den Coordinaten und der Zeit, nicht aber von den Geschwindigkeitscomponenten abhängt.«

Wenn nämlich ein Ausdruck P von den Grössen

$$q_1, q_2, \ldots . q_\mu;\quad q_1', q_2', \ldots . q_\mu',$$

wo

$$q_i' = \frac{dq_i}{dt}$$

abhängig ist, so hat man:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} P dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta\, P dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial P}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial P}{\partial q_\mu} \delta q_\mu \right.$$

$$\left. + \frac{\partial P}{\partial q_1'} \delta q_1' + \frac{\partial P}{\partial q_2'} \delta q_2' + \ldots + \frac{\partial P}{\partial q_\mu'} \delta q_\mu' \right\} dt.$$

Nun ist

$$\int \frac{\partial P}{\partial q_1'} \delta q_1' dt = \int \frac{\partial P}{\partial q_1'} \delta \frac{dq_1}{dt}\, dt = \int \frac{\partial P}{\partial q_1'} \frac{d\delta q_1}{dt}\, dt$$

und durch partielle Integration ergibt sich:

$$\int \frac{\partial P}{\partial q_1'} \delta q' dt = \frac{\partial P}{\partial q_1'} \delta q_1 - \int \frac{d \dfrac{\partial P}{\partial q_1'}}{dt} \delta q_1\, dt.$$

Nun sind aber die Anfangs- und Endfunctionen gegeben, daher verschwindet δq_1 an den Grenzen der Integration; das ausser dem Integrationszeichen stehende Glied wird daher $= 0$ und es wird:

$$\int \frac{\partial P}{\partial q_1'} \delta q_1' dt = -\int \frac{d \frac{\partial P}{\partial q_1'}}{dt} \delta q_1 \, dt.$$

Analog lassen sich die andern Ausdrücke bilden und wenn wir sie in die Variation des Integrals einsetzen, so finden wir:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} P dt = -\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left(\frac{d \frac{\partial P}{\partial q_1'}}{dt} - \frac{\partial P}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left(\frac{d \frac{\partial P}{\partial q_2'}}{dt} - \frac{\partial P}{\partial q_2} \right) \delta q_2 + \ldots \right\} dt.$$

Soll nun dieses Integral verschwinden, so müssen, da wir die q als unabhängig von einander voraussetzen, die Coefficienten der willkürlichen Aenderungen

$$\delta q_1, \quad \delta q_2, \quad \delta q_3, \ldots . \quad \delta q_\mu$$

einzeln verschwinden. Das gibt:

$$\frac{d \frac{\partial P}{\partial q_s'}}{dt} - \frac{\partial P}{\partial q_s} = 0,$$

wo s alle ganzzahligen Werthe annehmen kann von 1 bis μ.

In unserm Falle ist nun

$$P = T + U,$$

wobei die halbe lebendige Kraft T gleich ist

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) \qquad \left(x_i' = \frac{dx_i}{dt}\right)$$

und $$U = Ax^2 + B(y^2 + z^2) + C.$$

In diesen Ausdrücken ersetzen wir nun die Variabelen x, y, z auf die kurz vorhin angegebene Weise durch neue Grössen q. Nun hängt U nicht von den Coordinaten q' ab, sondern nur von den Coordinaten x, y, z, welche Functionen von den q sind, also ist

$$\frac{\partial P}{\partial q_s'} = \frac{\partial T}{\partial q_s'}.$$

Jene Differentialgleichungen gehen somit über in

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_s'} - \frac{\partial(T+U)}{\partial q_s} = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots \mu.$$

Setzen wir noch $\frac{\partial T}{\partial q_s'} = p_s$ *), so ist:

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_s}, \qquad s = 1, 2, \ldots \mu.$$

Das sind die Lagrange'schen Gleichungen für den Fall, dass eine Kräftefunction existirt.

Hamilton hat diese Gleichungen auf eine noch einfachere Form gebracht, indem er sie von einer Function H abhängig macht, welche er die characteristische Function nennt. — Da nämlich x_i, y_i und z_i Functionen der q sind, so ist:

$$x_i' = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_\mu} q_\mu',$$

$$y_i' = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial q_\mu} q_\mu',$$

$$z_i' = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} q_2' + \ldots + \frac{\partial z_i}{\partial q_\mu} q_\mu'.$$

Substituirt man diese linearen Ausdrücke in den Ausdruck

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

so wird T eine homogene Function der Grössen

$$q_1', q_2', \ldots q_\mu',$$

*) Die Grössen $p = \frac{\partial T}{\partial q'}$ führte Poisson zum ersten Mal ein und zwar in einem Aufsatze, der von der Methode der Variation der Constanten handelt und im 15. Hefte des polytechnischen Journals steht. Nach dem Erscheinen der ersten Ausgabe der »Mécanique analytique« war dies der wichtigste Fortschritt in der Umformung der Differentialgleichungen der Bewegung.

somit ist nach dem Euler'schen Satze über homogene Functionen

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q_1'} q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'} q_2' + \ldots + \frac{\partial T}{\partial q_\mu'} q_\mu,$$

oder da $\frac{\partial T}{\partial q_s'} = p_s$, so hat man auch

$$2T = p_1 q_1' + p_2 q_2' + \ldots + p_\mu q_\mu = \Sigma p_s q_s'$$

oder

$$T = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s'} q_s' - T.$$

Diese Schreibweise ist für unsern Zweck am bequemsten. Wenn wir nun diese Gleichung vollständig differentiiren nach allen darin vorkommenden Grössen q_s und q_s', so finden wir:

$$dT = \Sigma q_s' d\frac{\partial T}{\partial q_s'} + \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s'} dq_s' - \left[\Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s'} dq_s' + \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s\right]$$

$$= \Sigma q_s' d\frac{\partial T}{\partial q_s'} - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s = \Sigma q_s' dp_s - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s.$$

Wenn wir die Grössen $q_1', q_2', \ldots . q_\mu'$ durch neue Variabelen $p_1, p_2, \ldots . p_\mu$ in die Gleichung eingeführt denken, so wird T eine Function der Grössen p und q und wenn wir die unter dieser Hypothese gebildeten Differentialquotationen von T nach p_s und q_s zur Unterscheidung in Klammern einschliessen, so erhalten wir für das vollständige Differential von T auch die Gleichung:

$$dT = \Sigma\left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) dp_s + \Sigma\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) dq_s.$$

Vergleichen wir diese Formel mit der vorhin gefundenen

$$dT = \Sigma q_s' dp_s - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s,$$

so ergibt sich unmittelbar:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) = q_s' \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_s}.$$

Da aber unser U blos von den q_s, nicht aber von den q_s', also auch nicht von den für q_s' eingeführten p_s abhängt, so ist

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_s}$$

und somit geht dann die Lagrange'sche Gleichung

$$\frac{\partial p_s}{dt} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_s}$$

über in
$$\frac{dp_s}{dt} = -\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial q_s}\right).$$

Weil U kein p_s enthält, so kann man

$$q_s' = \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right)$$

auch so schreiben:
$$q_s' = \frac{\partial (T-U)}{\partial p_s}$$

und setzen wir zur Abkürzung $T - U = H$, so wird

$$\frac{dq_s}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right) \text{ und } \frac{dp_s}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right).$$

Nun versteht es sich von selbst, dass in diesen Gleichungen die p und q als die Variabelen anzusehen sind; man kann daher die Klammern um die Differentialquotationen weglassen und hat dann

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s} \text{ und } \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s},$$

wobei
$$H = T - U.$$

Da sehen wir nun, welche Bedeutung die von Hamilton eingeführte characteristische Function H hat.

T ist eine homogene Function des zweiten Grades in den q', also sind die Grössen $p_s = \frac{\partial T}{\partial q_s'}$ lineare Functionen von q_s'. Löst man daher das Gleichungssystem $p_s = \frac{\partial T}{\partial q_s'}$ auf, so ergeben sich für die q_s' lineare Functionen von den p_s, deren Coefficienten die q_s sind. Mit ihrer Hülfe treten die p_s an die Stelle der q_s'.

3. Diese soeben abgeleiteten Differentialgleichungen sind es nun, die wir benutzen, um die Bewegung auf dem Rotationsellipsoid näher zu erörtern.

Das Rotationsellipsoid sei bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Dabei ist also die x Axe die Rotationsaxe. Nun wollen wir annehmen, der Punkt bewege sich auf dem gegebenen Rotationsellipsoid selbst. — Zunächst ist nun die Grösse

$$H = T - U$$

zu bestimmen. Da wir nur einen Punkt haben, der sich bewegt, so wird, wenn man dessen Masse gleich 1 setzt:

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}; \text{ ferner ist:}$$

$$U = Ax^2 + B(y^2 + z^2) + C.$$

In diesen Ausdrücken ersetzen wir die Unbekannten x, y, z durch neue Variabelen q derart, dass diese der Gleichung (1) identisch genügen, ohne dass zwischen den q irgend welche Relationen bestehen. Dadurch wird dann unserer Bedingung genügt, dass der Punkt gezwungen ist, auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids zu verbleiben.

Zu dem Ende setzen wir (Fig. 1):

$$x = x,$$
$$y = r \cos q_1,$$
$$z = r \sin q_1,$$

wo q_1 den Winkel bedeutet, den die veränderliche Meridianebene mit einer festen Ebene z. B. der $X0Y$ Ebene einschliesst. Dann geht die Gleichung (1) über in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Nun setzen wir darin noch (Fig. 2):

$$r = b \sin q_2 \quad \text{und}$$
$$x = a \cos q_2,$$

so wird:

$$\begin{aligned} x &= a \cos q_2, \\ y &= b \cos q_1 \sin q_2, \\ z &= b \sin q_1 \sin q_2. \end{aligned} \tag{3}$$

(Dabei ist q_1 geographische Länge und q_2 gewissermassen geographische Breite oder die excentrische Anomalie).

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (1) ein, so wird sie von selbst erfüllt.

Aus den Gleichungen (3) folgt nun

$$\begin{aligned} dx &= -a \sin q_2 \, dq_2, \\ dy &= b \cos q_1 \cos q_2 \, dq_2 - b \sin q_1 \sin q_2 \, dq_1, \\ dz &= b \sin q_1 \cos q_2 \, dq_2 + b \cos q_1 \sin q_2 \, dq_1 \quad \text{und} \end{aligned}$$

d. f. unmittelbar:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a^2 \sin^2 q_2 \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = b^2 \cos^2 q_1 \cos^2 q_2 \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 + b^2 \sin^2 q_1 \sin^2 q_2 \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2$$
$$- 2 b^2 \sin q_1 \sin q_2 \cos q_1 \cos q_2 \frac{dq_1}{dt} \frac{dq_2}{dt}$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = b^2 \sin^2 q_1 \cos^2 q_2 \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 + b^2 \cos^2 q_1 \sin^2 q_2 \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2$$
$$+ 2 b^2 \sin q_1 \sin q_2 \cos q_1 \cos q_2 \frac{dq_1}{dt} \frac{dq_2}{dt}.$$

Setzen wir diese Werthe in den Ausdruck für T ein, so findet sich

$$T = \tfrac{1}{2} \Big\{ (a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_1 \cos^2 q_2 + b^2 \sin^2 q_1 \cos^2 q_2) \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2$$
$$+ (b^2 \sin^2 q_1 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_1 \sin^2 q_2) \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 \Big\}, \text{ d. f.}$$

$$T = \tfrac{1}{2} \Big\{ (a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2) \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 + b^2 \sin^2 q_2 \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 \Big\}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{dq_1}{dt} = q_1{}' \text{ und } \frac{dq_2}{dt} = q_2{}', \qquad \text{so wird}$$

$$T = \tfrac{1}{2}\{b^2\sin^2 q_2 \,.\, q_1{}'^2 + (a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2)\, q_2{}'^2\}.$$

Machen wir dieselben Substitutionen (3) in U, so finden wir

$$U = Aa^2\cos^2 q_2 + Bb^2\sin^2 q_2 + C.$$

Damit wäre $H = T - U$ ausgedrückt durch q_1, q_2, $q_1{}'$ und $q_2{}'$; es soll aber, zu Folge unserer Differentialgleichungen, H ausgedrückt werden durch die q und p. Die Einführung der p geschieht mit Hülfe der Gleichungen

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1{}'} = b^2\sin^2 q_2 \,.\, q_1{}' \qquad \text{und}$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2{}'} = (a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2)\, q_2{}'.$$

Daraus bestimmen sich die q' als lineare Functionen der p, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} q_1{}' &= \frac{p_1}{b^2\sin^2 q_2}, \\ q_2{}' &= \frac{p_2}{a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Setzen wir diese Werthe für die q' in T ein, so erhalten wir

$$T = \frac{1}{2}\left\{\frac{p_1{}^2}{b^2\sin^2 q_2} + \frac{p_2{}^2}{a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2}\right\}.$$

Somit wird nun

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{p_1{}^2}{b^2\sin^2 q_2} + \frac{p_2{}^2}{a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2}\right\} - Aa^2\cos^2 q_2 - Bb^2\sin^2 q_2 - C.$$

Nun können wir unsere Differentialgleichungen anwenden und finden, da

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s} \text{ und } \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s},$$

folgende Gleichungen:

1) $\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{b^2 \sin^2 q_2}$,

2) $\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2}$,

3) $\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$ und

4) $$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{(a^2 - b^2) \sin q_2 \cos q_2 \cdot p_2{}^2}{(a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2)^2} + \frac{b^2 \sin q_2 \cos q_2 \cdot p_1{}^2}{(b^2 \sin^2 q_2)^2}$$
$$- 2Aa^2 \sin q_2 \cos q_2 + 2Bb^2 \sin q_2 \cos q_2$$
$$= \sin q_2 \cos q_2 \left\{ \frac{(a^2 - b^2) p_2{}^2}{(a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2)^2} + \frac{b^2 p_1{}^2}{(b^2 \sin^2 q_2)^2} - 2Aa^2 + 2Bb^2 \right\}.$$

Ein Integral der Bewegungsgleichungen ergibt sich sofort aus der Gleichung $\frac{dp_1}{dt} = 0$, d. f. nämlich: $p_1 = \text{const} = c$ oder nach Gleichung (4)

$$\text{I.} \qquad q_1{}' = \frac{c}{b^2 \sin^2 q_2}.$$

Da $b^2 \sin^2 q_2$, als ein vollständiges Quadrat, stets positiv ist, so folgt aus der Gleichung (I), dass $q_1{}'$ stets dasselbe Zeichen besitzt, d. h.:

Der Meridian, der den sich bewegenden Punkt enthält, dreht sich stets nach derselben Seite um. Mit wachsendem q_2 wird $q_1{}'$ stets kleiner, mit abnehmendem q_2 stets grösser. Es ist also die Winkelgeschwindigkeit ($q_1{}'$) in der Richtung des Parallelkreises veränderlich. Die Constante c können wir ansehen als die Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung des Parallelkreises.

Ein zweites Integral unserer Bewegungsgleichungen ergibt sich mit Hülfe des Princips der lebendigen Kraft. Dasselbe sagt nämlich:

»Wenn eine Kräftefunction existirt und die Bedingungen des Systems von der Zeit unabhängig sind, so ist die halbe lebendige Kraft des Systems gleich der Kräftefunction vermehrt um eine Constante.«

Wenden wir diesen Satz

$$H = T - U = \text{const} = h$$

auf unsern Fall an, so wird

$$H = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{p_1{}^2}{b^2 \sin^2 q_2} + \frac{p_2{}^2}{a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2}\right\} - A a^2 \cos^2 q_2 - B b^2 \sin^2 q_2 = C,$$

wo nun C nicht mehr identisch ist mit

$$\pi \int \frac{ds}{R},$$

sondern eine willkürliche Constante bedeutet, da sie die Constante h implicite enthält. Aus unserer Differentialgleichung (2) folgt aber

$$p_2 = q_2{}' \, (a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2) \qquad \text{und aus (3)}$$

$$p_1 = c.$$

Setzen wir diese Werthe für p_1 und p_2 in die Gleichung für H ein, so finden wir

$$\tfrac{1}{2} \frac{c}{b^2 \sin^2 q_2} + \frac{q_2{}'^2 (a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2)}{2} - A a^2 \cos^2 q_2 - B b^2 \sin^2 q_2 = C$$

oder

$$q_2{}'^2 = \frac{2 A a^2 \cos^2 q_2 + 2 B b^2 \sin^2 q_2 - \dfrac{c^2}{b^2 \sin^2 q_2} + C}{a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2}$$

und daraus folgt unser zweites Integral

$$\text{II.} \qquad q_2{}'^2 = \frac{b^2 \sin^2 q_2 \, (2 A a^2 \cos^2 q_2 + 2 B b^2 \sin^2 q_2 + C) - c^2}{b^2 \sin^2 q_2 \, (a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2)},$$

d. f.: Die Geschwindigkeitscomponente in der Richtung des Meridians ist nur abhängig vom Winkel q_2 und den Constanten A, B, C und c.

q_2 wird vom Pole aus gemessen. Ist nun c eine von Null verschiedene Grösse, so wird für $q_2 = 0^0$, $b^2 \sin^2 q_2 = 0$ und somit würde $q_2{}'^2$ negativ unendlich, was nicht möglich ist. Der Punkt kann also auch nicht nach unendlich langer Zeit in den Pol gelangen, d. h. er kann sich ihm (dem Pol) nicht unbegrenzt nähern.

Für $q_2 = 90^0$ wird $q_2'^2 = \frac{b^2(2Bb^2 + C) - c^2}{a^2 b^2}$.

Da $q_2'^2$ stets eine positive Grösse ist, so muss der Ausdruck rechts ebenfalls positiv sein, wenn $q_2 = 90^0$ werden kann, d. h. der sich bewegende Punkt kann nur dann den Aequator überschreiten, wenn

$$b^2(2Bb^2 + C) > c^2.$$

Mit Hülfe der Geschwindigkeitscomponenten q_1' und q_2' lässt sich die Bewegung nun näher verfolgen.

Im Allgemeinen wird die Bewegungscurve höchste und tiefste Punkte haben, d. h. Punkte für die die Geschwindigkeitscomponente q_2' in der Richtung des Meridians gleich Null ist. Solche Punkte wollen wir einfach (der Bequemlichkeit wegen) Maxima nennen. Dieselben sind für die Bewegungscurve von der grössten Wichtigkeit. Es ist daher zu untersuchen, ob wirklich solche höchste und tiefste Punkte vorhanden sind und wenn ja, wie viele.

Ist c eine von Null verschiedene Grösse, so geht, wie wir gesehen haben, die Drehung des Meridians, der den sich bewegenden Punkt enthält, stets nach derselben Richtung vor sich und da der Punkt nie in den Pol gelangen kann, so lässt sich daraus schliessen, dass die Bewegungscurve stets ein Maximum enthalten wird.

Die Einführung dieses Maximums wird unsere Rechnung wesentlich vereinfachen. Wir wollen annehmen, dieses Maximum trete ein für den Winkel $q_2^{\,0}$. Für $q_2 = q_2^{\,0}$ muss also die Geschwindigkeitscomponente (q_2') in der Richtung des Meridians gleich Null werden. q_2' kann aber nur Null werden, wenn jener Zähler in der Gleichung (II) gleich Null wird, also wenn

$$b^2 \sin^2 q_2{}^0 (2Aa^2 \cos^2 q_2{}^0 + 2Bb^2 \sin^2 q_2{}^0 + C) - c^2 = 0.$$

Die Existenz eines Maximums wird noch evidenter durch den Beweis, dass diese Gleichung für $\sin^2 q_2{}^0$ immer eine Wurzel zwischen 0 und 1 hat, der sehr leicht zu führen ist.

Aus obiger Gleichung folgt:

$$C = \frac{c^2}{b^2 \sin^2 q_2{}^0} - 2Aa^2 \cos^2 q_2{}^0 - 2Bb^2 \sin^2 q_2{}^0.$$

Somit wird

$$b^2 \sin^2 q_2 (2Aa^2 \cos^2 q_2 + 2Bb^2 \sin^2 q_2 + C) - c^2 =$$

$$b^2 \sin^2 q_2 \left(2Aa^2 \cos^2 q_2 + 2Bb^2 \sin^2 q_2 + \frac{c^2}{b^2 \sin^2 q_2{}^0} - 2Aa^2 \cos^2 q_2{}^0 \right.$$

$$\left. - 2Bb^2 \sin^2 q_2{}^0 \right) - c^2 =$$

$$b^2 \sin^2 q_2 \left[(2Bb^2 - 2Aa^2)(\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0) + \frac{c^2}{b^2 \sin^2 q_2{}^0} \right] - c^2.$$

Darnach geht unser Ausdruck für $q_2'^2$ über in folgenden:

$$q_2'^2 = \frac{(2Bb^2 - 2Aa^2) b^4 (\sin^4 q_2 \sin^2 q_2{}^0 - \sin^4 q_2{}^0 \sin^2 q_2) - b^2 c^2 (\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0)}{b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 (a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2)}.$$

Nun lässt sich im Zähler $\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0$ herausheben und es wird

$$\text{II}^a\quad q_2'^2 = \frac{(\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0) \left[(2Bb^2 - 2Aa) b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 + b^2 c^2 \right]}{b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 (a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2)}.$$

Diese Gleichung ist es nun, auf die wir weiter bauen. Soll die Bewegungscurve mehr als ein Maximum haben, d. h. soll $q_2' = 0$ werden für andere Werthe noch als $q_2{}^0$, so kann das nur geschehen für solche Winkel q_2, die der Gleichung genügen

$$(2Bb^2 - 2Aa^2) b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 + b^2 c^2 = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\sin^2 q_2 = \frac{-b^2 c^2}{(2Bb^2 - 2Aa^2) b^4 \sin^2 q_2{}^0}.$$

Da wir in unserm Falle nur auf positive q_2 zu achten haben, so lässt jene Gleichung nur eine Wurzel zu, wenn sie überhaupt Wurzeln zulässt. Da nämlich $\sin^2 q_2$ eine positive Grösse ist und ausserdem ihr Werth zwischen 0 und 1 liegt, so kann nur eine Wurzel existiren, wenn

$$1) \qquad 2Bb^2 - 2Aa^2 \text{ oder } Bb^2 - Aa^2$$

eine negative Grösse ist und wenn

$$2) \qquad (2Bb^2 - 2Aa^2)b^4 \sin^2 q_2{}^0 > -c^2.$$

Wir sehen also daraus, dass die Bewegungscurve höchstens 2 Maxima besitzen kann und dass die Existenz des zweiten Maximums sich an gewisse Bedingungen der Grössen c^2 und $2Bb^2 - 2Aa^2$ knüpft. — Da die Grössen A und B verschiedene Werthe haben für das abgeplattete Ellipsoid einerseits und das gestreckte anderseits, so muss die Untersuchung der Existenz eines zweiten Maximums der Bewegungscurve sich trennen in zwei Theile.

1. Abgeplattetes Rotationsellipsoid.

$$b > a.$$

Da die Halbaxen des Rotationsellipsoids a und b sind und nicht mehr α und β, wie in den frühern Betrachtungen über das Potential, so haben wir α und β beziehungsweise mit a und b zu vertauschen und dann gehen die frühern Formeln für das abgeplattete Rotationsellipsoid über in folgende:

$$A = -\frac{2\pi b^2}{b^2 - a^2}\left[1 - \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}\right],$$

$$B = -\frac{2\pi a^2 b^2}{b^2 - a^2}\left[\frac{1}{a\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} - \frac{1}{b^2}\right]$$

und somit wird

$$Bb^2-Aa^2=-\frac{\pi a^2b^2}{b^2-a^2}\left[\frac{b^2}{a\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}-3+\frac{2a}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right]$$
$$=-\frac{\pi a^2b^2}{b^2-a^2}\left[\frac{b^2+2a^2}{a\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}-3\right].$$

Nun setzen wir $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\lambda$, dann kann λ alle Werthe annehmen von 0 bis ∞. Aus jener Substitution folgt:

$$b^2-a^2=a^2\lambda^2, \qquad b^2+2a^2=a^2(3+\lambda^2),$$
$$b^2 \quad =a^2(1+\lambda^2), \qquad a^2b^2 \quad =a^4(1+\lambda^2).$$

Somit wird

$$Bb^2-Aa^2=-\frac{\pi a^4(1+\lambda^2)}{a^2\lambda^2}\left[\frac{a^2(3+\lambda^2)}{a^2\lambda}\operatorname{arc\,tg}\lambda-3\right]$$
$$=-\frac{\pi a^2(1+\lambda^2)}{\lambda^2}\left[\left(\lambda+\frac{3}{\lambda}\right)\operatorname{arc\,tg}\lambda-3\right],$$
$$Bb^2-Aa^2=-\frac{\pi a^2(1+\lambda^2)}{\lambda^2}\left(\lambda+\frac{3}{\lambda}\right)\left[\operatorname{arc\,tg}\lambda-\frac{3\lambda}{3+\lambda^2}\right].$$

Da λ nur positive Werthe annehmen kann, so ist das Zeichen von Bb^2-Aa^2 lediglich abhängig von dem Ausdruck

$$\operatorname{arc\,tg}\lambda-\frac{3\lambda}{3+\lambda^2}.$$

Wenn wir nun Reihenentwicklungen anwenden, so haben wir

$$\operatorname{arc\,tg}\lambda=\lambda-\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda^5}{5}-\dots.$$
$$\frac{3\lambda}{3+\lambda^2}=\lambda-\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda^5}{9}-\dots.$$

Für sehr kleine Werthe von λ können wir setzen

$$\operatorname{arc\,tg}\lambda-\frac{3\lambda}{3+\lambda^2}=\frac{\lambda^5}{5}-\frac{\lambda^5}{9}$$

und dies ist sicher eine positive Grösse. Für $\lambda=\infty$ wird $\operatorname{arc\,tg}\lambda-\frac{3\lambda}{3+\lambda^2}=\frac{\pi}{2}$, also auch eine positive Grösse. Es ist also für $\lambda = \infty$ klein und $\lambda = \infty$ gross $Bb^2 - Aa^2$ eine negative Grösse. Damit aber $Bb^2 - Aa^2$ für alle Werthe von λ von 0 bis ∞ stets negativ sei, ist es nothwendig zu zeigen, dass der Ausdruck

$$\operatorname{arc\,tg} \lambda - \frac{3\lambda}{3+\lambda^2}$$

keinen Zeichenwechsel erleiden kann, wenn λ variirt von 0 bis ∞, d. h. wir müssen zeigen, dass jener Ausdruck zwischen jenen Grenzen weder Maxima noch Minima besitzen kann. Letztere finden wir aber durch Differentiation nach λ und es ergibt sich

$$0 = \frac{1}{1+\lambda^2} - \frac{3(3+\lambda^2) - 6\lambda^2}{(3+\lambda^2)^2} = \frac{1}{1+\lambda^2} - \frac{q - 3\lambda^2}{(3+\lambda^2)^2}$$

$$= (3+\lambda^2)^2 - (q - 3\lambda^2)(1+\lambda^2) \text{ oder}$$

$$4\lambda^4 = 0.$$

Da nur für solche Werthe von λ, die jener Gleichung genügen, die Function

$$\operatorname{arc\,tg} \lambda - \frac{3\lambda}{3+\lambda^2}$$

ein Maximum oder Minimum wird, so folgt daraus, dass zwischen $\lambda = 0$ und ∞ weder Maxima noch Minima vorkommen können und somit ist $Bb^2 - Aa^2$ und damit auch $2Bb^2 - 2Aa^2$ stets negativ für alle Werthe von λ zwischen 0 und ∞.

Somit tritt im Falle des abgeplatteten Rotationsellipsoids, wenn zugleich noch die Bedingung

$$(2Bb^2 - 2Aa^2) b^4 \sin^2 q_2{}^0 > -b^2 c^2$$

erfüllt ist, stets ein zweites Maximum der Bewegungscurve auf. Aus der Gleichung II.ª folgt nun unmittelbar, dass der Punkt in diesem Falle sich zwischen zwei Parallelkreisen hin- und herbewegt und zwar müssen die beiden Parallelkreise entweder zugleich oberhalb oder zugleich unterhalb des Aequators liegen.

Da nämlich $q_2'^2$ eine positive Grösse ist, so muss der Bruch rechts ebenfalls eine positive Grösse sein. Der Nenner ist stets positiv, also hängt das ganze Criterium vom Zähler ab. Gehen wir vom höchsten Punkt der Curve, dem ersten Maximum derselben, das für $q_2 = q_2{}^0$ eintritt, aus und lassen wir q_2 zunehmen, so wird $\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0$ positiv, somit muss auch $(2Bb^2 - 2Aa^2)\, b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 + b^2 c^2$ positiv sein. Zwar muss, wenn ein zweites Maximum vorhanden ist

$$(2Bb^2 - 2Aa^2)\, b^4 \sin^2 q_2{}^0 > - b^2 c^2,$$

aber da dann der Ausdruck links in der Gleichung für $q_2'^2$ noch mit $\sin^2 q_2$, einem kleinen ächten Bruche multiplicirt ist, so wird doch

$$2\,(Bb^2 - Aa^2)\, b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 + b^2 c^2$$

eine positive Grösse sein, so lange q_2 klein genug ist. Diese positive Grösse wird aber mit wachsendem q_2 immer kleiner (die Bewegung gehe auf der obern Hälfte des Rotationsellipsoids vor sich), bis sie endlich $= 0$ wird für das zweite Maximum $q_2 = q_2{}^*$. Während aber $q_2{}^0$ in $q_2{}^*$ übergegangen ist, hat der den beweglichen Punkt enthaltende Meridian sich stets nach derselben Seite umgedreht, der Punkt muss daher eine Curve beschrieben haben, ähnlich wie sie Fig. 3 zeigt. Von $q_2{}^*$ an (dem zweiten Maximum) bewegt sich der Punkt wieder nach oben, bis er wieder den durch $q_2{}^0$ bestimmten Meridian erreicht, dann kehrt er wieder um und geht nach unten u. s. f. So bewegt sich der Punkt stets zwischen den beiden Parallelkreisen, die durch $q_2{}^0$ und $q_2{}^*$ bestimmt sind. Im Parallelkreis für $q_2{}^0$ wiederholt sich immer wieder das erste Maximum, in dem für $q_2{}^*$ das zweite.

Nun wollen wir die Curve, die der sich bewegende Punkt beschreibt, noch etwas näher untersuchen. Zu dem Ende betrachten wir das Stück PQR derselben (Fig. 4). Die Punkte P und R seien dessen Schnittpunkte mit einem ganz beliebigen zwischen $q_2{}^0$ und $q_2{}^*$ gelegenen Parallelkreis. Für diese Punkte werden, da sie demselben $\sphericalangle\, q_2$ entsprechen, die $q_1{}'$ einerseits und die $q_2{}'$ anderseits nach unsern Formeln I. und II. genau gleich gross. Die $q_1{}'$ sind gleich gerichtet, die $q_2{}'$ dagegen entgegengesetzt gerichtet und da sie Tangenten sind an die zugehörigen Meridiane, so schliessen sie denselben Winkel ein mit den zugehörigen Tangenten an den Parallelkreis. Folge hievon ist, dass die resultirenden Geschwindigkeiten gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet sind und ausserdem denselben $\sphericalangle\, \alpha$ einschliessen mit den Tangenten an den Parallelkreis in den Punkten P und R. Dies gilt für alle Punkte P und R, die durch irgend einen zwischen $q_2{}^0$ und $q_2{}^*$ gelegenen Parallelkreis aus geschnitten werden. Daraus folgt nun unmittelbar, da die resultirenden Geschwindigkeiten Tangenten an die Bewegungscurve in den Punkten P und R sind, dass die Bewegungscurve PQR symmetrisch ist in Bezug auf den Meridian, der durch das Maximum Q hindurch geht. Die Gleichheit der Winkel α ist eine Eigenschaft der Bewegungscurve, die allein schon hinreicht, die Curve graphisch entstehen zu lassen. Da ich ebenso gut von MNO hätte ausgehen können, wie von PQR und genau dieselben Resultate gefunden hätte, so folgt auch, dass $PQR \cong MNO$, d. h.:

Es kann ein Theil der Bewegungscurve um die constante Länge l in der Richtung des Parallelkreises verschoben werden, so dass vollkommene Deckung stattfindet mit einem andern Theil der Bewegungscurve.

Ist $l < \pi$, so gibt uns Fig. 5.ª ungefähr das Bild der Bewegungscurve in der Horizontalprojection (Eb. YZ); ist hingegen die Periode $l > \pi$, so ist die Horizontalprojection der Bewegungscurve ungefähr so, wie sie in Fig. 5.ᵇ angedeutet ist.

Die beiden Maxima der Bewegungscurve können auch zusammenfallen und dann bewegt sich der Punkt auf einem Parallelkreis. Damit dies eintrete, muss, wie aus Gleichung II. folgt

$$c^2 = -\frac{4(2Bb^2 - 2Aa^2)}{(C + Aa^2)^2 b^2} \text{ sein.}$$

Nun kann auch der Fall eintreten, dass

$$-b^2c^2 > 2(Bb^2 - Aa^2)\, b^4 \sin^2 q_2{}^0$$

und dann wird um so mehr

$$-b^2c^2 > 2(Bb^2 - Aa^2)\, b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0.$$

In diesem Falle hat die Bewegungscurve nur ein Maximum und aus der Gleichung

$$q_2{}'^2 = \frac{(\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0)\left[2(Bb^2 - Aa^2)\sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 + b^2c^2\right]}{b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 (a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2)},$$

worin nun der grosse Klammerausdruck stets eine positive Grösse ist, ergibt sich sofort die Art der Bewegung. Da der Nenner auch stets positiv ist, so hängt das Zeichen des ganzen Bruches blos von der Differenz $\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0$ ab. Die Bewegung muss so vor sich gehen, dass jene Differenz stets positiv ist. Es geht somit (Fig. 6) der Punkt von dem durch den $\sphericalangle\, q_2{}^0$ bestimmten Parallelkreis aus gegen den Aequator hin, überschreitet diesen mit der grössten Geschwindigkeit und geht nach unten bis zu dem durch den $\sphericalangle\, 180 - q_2{}^0$ bestimmten Parallelkreis. Dort wendet der Punkt sich wieder um und geht nach oben, bis er wieder im Parallelkreis $q_2{}^0$ anlangt. Dort kehrt er wieder um, geht nach unten u. s. f. Auch da haben wir wieder Symmetrie in Bezug auf die Meridiane, die durch das sich stets wiederholende Maximum hindurchgehen und zwar aus ganz denselben Gründen wie früher. Auch wird, wenn ein Theil der Curve um die constante Strecke l in der Richtung des Parallelkreises verschoben wird, derselbe wieder einen andern Theil vollständig decken. Ja noch mehr, es kann der Theil der Bewegungscurve, der oberhalb des Aequators ist, vollständig zur Deckung gebracht werden mit dem Theil, der unterhalb dem Aequator ist, jedoch nicht durch Verschiebung auf dem Ellipsoid.

2) Gestrecktes Rotationsellipsoid.

$$b < a.$$

In diesem Falle ist

$$A = -\frac{2\pi b^2}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} - 1\right],$$

$$B = -\frac{2\pi a^2 b^2}{a^2-b^2}\left[\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{4a\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right] \text{ und}$$

d. f. nun

$$Bb^2 - Aa^2 = -\frac{2\pi a^2 b^2}{a^2-b^2}\left[\frac{3}{2} - \frac{b^2+4a^2}{4a\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right]$$

$$= \frac{2\pi a^2 b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{b^2+4a^2}{4a\sqrt{a^2-b^2}}\left[\frac{6a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2+4a^2} - \log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right].$$

Nun setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \lambda, \quad \text{dann wird} \quad a+\sqrt{a^2-b^2} = a(1+\lambda),$$

$$a-\sqrt{a^2-b^2} = a(1-\lambda),$$

$$a^2-b^2 = a^2\lambda^2, \quad a^2b^2 = a^4(1-\lambda^2),$$

$$b^2+4a^2 = a^2(5-\lambda^2), \quad a\sqrt{a^2-b^2} = a^2\lambda.$$

Dabei geht λ von 0 bis 1. Nun wird

$$Bb^2 - Aa^2 = -\frac{2\pi a^4(1-\lambda^2)}{a^2\lambda^2}\cdot\frac{a^2(5-\lambda^2)}{4a^2\lambda}\left[\frac{6a^2\lambda}{a^2(5-\lambda^2)} - \log\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right]$$

$$= -\frac{2\pi a^2(1-\lambda^2)(5-\lambda^2)}{2\lambda^3}\left[\frac{6\lambda}{5-\lambda^2} - \log\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right].$$

Auch da sehen wir sofort, da λ nur Werthe annehmen kann, die zwischen 0 und 1 liegen, dass das Zeichen von $Bb^2 - Aa^2$ lediglich abhängt vom Klammerausdruck

$$\frac{6\lambda}{5-\lambda^2} - \log\frac{1+\lambda}{1-\lambda}.$$

Für sehr kleine Werthe von λ können wir setzen

$$\log\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = 2\lambda$$

und somit wird unter dieser Voraussetzung

$$\frac{6\lambda}{5-\lambda^2} - \log\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = \frac{6\lambda}{5-\lambda^2} - 2\lambda = 2\lambda\left(\frac{3}{5-\lambda^2} - 1\right).$$

Dies ist sicherlich eine negative Grösse und somit $Bb^2 - Aa^2$ eine positive. Nähert sich λ immer mehr und mehr der Einheit, so wird $\log\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ sehr gross, während $\frac{6\lambda}{5-\lambda^2}$ sich der Grenze $\frac{3}{2}$ nähert. Also ist auch dann wieder der Klammerausdruck negativ und damit $Bb^2 - Aa^2$ positiv. Und dass die Function

$$\frac{6\lambda}{5-\lambda^2} - \log\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$$

zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ keinen Zeichenwechsel haben kann, zeigt sich wieder wie früher im Falle (1).

Für das gestreckte Rotationsellipsoid ist also stets $Bb^2 - Aa^2$ und damit auch $2Bb^2 - 2Aa^2$ eine positive Grösse und somit kann hier kein zweites Maximum in der Bewegungscurve auftreten. Der Punkt wird sich daher zwischen den beiden Parallelkreisen, die durch die Winkel

$q_2{}^0$ und $180 - q_2{}^0$ bestimmt sind, hin und her bewegen. Die Bewegungscurve besitzt auch wieder dieselben Eigenschaften, wie sie im Falle (1) entwickelt wurden. Wir haben hier genau das Analogon zu dem Fall, wo der Punkt sich auf einem abgeplatteten Rotationsellipsoid bewegt und die Bewegungscurve nur ein Maximum besitzt (Fig. 6).

Was die Geschwindigkeitsverhältnisse anbetrifft in den beiden Fällen 1 und 2, so können wir darüber Folgendes sagen: Besitzt die Bewegungscurve zwei Maxima, so nimmt das $q_1{}'$ im ersten derselben ($q_2{}^0$) den grössten Werth an, den es überhaupt annehmen kann, wird mit wachsendem q_2 immer kleiner, bis es im zweiten Maximum ($q_2{}^*$) seinen kleinsten Werth annimmt. Vom zweiten Maximum aus wendet der Punkt sich wieder nach oben und nun nimmt $q_1{}'$ in demselben Masse wieder zu, wie es vorhin abgenommen hat. Nicht so einfach ist es mit der Geschwindigkeitscomponente $q_2{}'$ in der Richtung des Meridians. Dieselbe ist dargestellt durch einen Bruch, dessen Zähler in zwei Faktoren zerfällt, wovon der erste das erste Maximum der Bewegungscurve, der andere das zweite Maximum liefert. Für das Maximum $q_2{}^0$ wird der erste Faktor $= 0$, während der zweite seinen grösst möglichen Werth annimmt. Mit wachsendem q_2 nimmt der erste Faktor zu, während der zweite stets abnimmt, bis er im zweiten Maximum $q_2{}^*$ gleich Null wird. Um die Aenderung von $q_2{}'$ näher bestimmen zu können, wäre die genaue Kenntniss von c und $q_2{}^0$ nöthig. Hat die Bewegungscurve nur ein Maximum ($q_2{}^0$ oder $180 - q_2{}^0$), so wird für dieses das $q_1{}'$ am grössten und nimmt gegen den Aequator zu ab, bis es im Aequator selbst den kleinst möglichen Werth annimmt. Das wesentlich Vereinfachende in diesem Falle ist, dass für $q_2 = 90^0 \pm w$ die beiden $q_1{}'$ und $q_2{}'$ je gleich werden. Allgemein, ob ein oder zwei Maxima bestehen, können wir sagen, dass der bewegliche Punkt, so oft er in denselben Parallelkreis gelangt, er stets dieselbe Geschwindigkeit hat.

Es kann auch der spezielle Fall eintreten, dass die Anfangsgeschwindigkeit c in der Richtung des Parallelkreises gleich Null wird. Dann ist also $q_1{}' = 0$, d. h. der Punkt kann sich nur in einem Meridiane bewegen. Setzen wir in unserer Gleichung II $c = 0$, so können wir Zähler und Nenner noch durch $b^2 \sin^2 q_2$ dividiren und es wird dann die Geschwindigkeit in der Richtung des Meridians ausgedrückt durch

$$q_2{}'^2 = \frac{2Aa^2\cos^2 q_2 + 2Bb^2\sin^2 q_2 + C}{a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2}.$$

Nun kann die Geschwindigkeit des Punktes von einem bestimmten Momente an immer kleiner und kleiner werden, bis sie $= 0$ wird und der Punkt umkehrt. Für diesen Rückkehrpunkt ist $q_2{}' = 0$, d. h. es muss, damit dieser Bedingung genügt wird

$$2Aa^2\cos^2 q_2 + 2Bb^2\sin^2 q_2 + C = 0 \qquad \text{oder}$$

$$(2Bb^2 - 2Aa^2)\sin^2 q_2 = C' \quad \text{sein und d. f.}$$

$$\sin^2 q_2 = \frac{C'}{2Bb^2 - 2Aa^2},$$

d. h. der Punkt kann nur dann umkehren, wenn jener Bruch positiv ist und wenn

$$2Bb^2 - 2Aa^2 > C'.$$

Ist letzteres erfüllt und ist C' positiv, so muss auch $2Bb^2 - 2Aa^2$ positiv sein, was eintritt, wenn $a > b$. Ist dagegen C' negativ, so muss auch $2Bb^2 - 2Aa^2$ negativ sein und dies tritt ein für $a < b$. In diesen Fällen bewegt sich der Punkt ebenso hoch über dem Aequator, als unter demselben. Ist die Anfangsgeschwindigkeit gross genug, so beschreibt der Punkt den ganzen Meridian und wird im Falle des abgeplatteten Rotationsellipsoids im Pole, im Falle des gestreckten im Aequator die grösste Geschwindigkeit haben. Dieser Fall tritt ein, wenn jene Gleichung sowohl für $a > b$, als auch für $a < b$, keine reelle Wurzel zulässt.

Nun wollen wir diesen Spezialfall wieder verlassen und zum allgemeinen Fall zurückkehren und für ihn die Gleichung der Curve aufstellen, die der Punkt auf dem Rotationsellipsoid beschreibt. Es ist

$$q_1{}' = \frac{c}{b^2 \sin^2 q_2},$$

$$q_2{}' = \sqrt{\left\{\frac{(\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0)\,[2Bb^2 - 2Aa^2)\,b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 + b^2c^2]}{b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0\,(a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2)}\right\}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt nun

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{dq_1}{dt} : \frac{dq_2}{dt} = \frac{c}{b^2 \sin^2 q_2 \sqrt{\left\{\frac{(\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0)\,[(2Bb^2 - 2Aa^2)\,b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 + b^2c^2}{b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0\,(a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2)}\right.}}$$

oder

$$\text{III.} \quad q_1 = c \int^{\sin q_2{}^0}_{\sin q_2} \sqrt{\left\{\frac{a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2}{(\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0)\,[(2Bb^2 - 2Aa^2)\,b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 + b^2c^2]}\right\}}\, dq_2$$

Dies ist die Gleichung der Bewegungscurve in Form eines Integrals. Mit Hülfe dieser Formel können wir nun auch unsere Periode l ausdrücken. Es ist nämlich:

$$l = 2c \int_{q_2{}^0}^{q_2{}^*} \frac{\sin q_2{}^0}{\sin q_2} \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2}{(\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0)\,[(2Bb^2 - 2Aa^2)\,b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 + b^2c^2]}}\, dq_2.$$

Jenes Integral in Gleichung III. lässt sich in einem speziellen Fall, zu dem wir nun sogleich übergehen werden, durchführen und in endlich geschlossener Form darstellen. Es kann nämlich auch der Fall eintreten, dass, wenn die Bewegungscurve zwei Maxima besitzt, das zweite im Aequator ist. Damit dies eintritt muss in der Gleichung II. der zweite Faktor im Zähler für $q_2 = \frac{\pi}{2}$ verschwinden, d. h. es muss

$$(2Bb^2 - 2Aa^2)\, b^4 \sin^2 q_2{}^0 + b^2c^2 = 0, \text{ oder}$$
$$b^2c^2 = (2Aa^2 - 2Bb^2)\, b^4 \sin^2 q_2{}^0, \text{ d. f.}$$
$$c^2 = (2Aa^2 - 2Bb^2)\, b^2 \sin^2 q_2{}^0.$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass das zweite Maximum im Aequator liegt. Setzen wir den für c^2 gefundenen Werth in unsere Gleichungen I. und II. ein, so finden wir

$$q_1{}' = \frac{c}{b^2 \sin^2 q_2} = \frac{b \sin q_2{}^0 \sqrt{2Aa^2 - 2Bb^2}}{b^2 \sin^2 q_2} \quad \text{und}$$

$$q_2{}'^2 = \frac{(\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0)(2Aa^2 - 2Bb^2)\, b^4 \cos^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0}{b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 (a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2)}.$$

Darnach wird

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{dq_1}{dt} : \frac{dq_2}{dt} = \frac{\sin q_2{}^0 \sqrt{2Aa^2 - 2Bb^2}}{b \sin^2 q_2 \sqrt{\left\{\frac{(\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0)(2Aa^2 - 2Bb^2)\, b^4 \cos^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0}{b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 (a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2)}\right\}}}$$

$$= \frac{b^2 \sin q_2 \sin^2 q_2{}^0 \sqrt{2Aa^2 - 2Bb^2} \sqrt{a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2}}{b^3 \sin^2 q_2 \cos q_2 \sin q_2{}^0 \sqrt{(\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0)(2Aa^2 - 2Bb^2)}},$$

$$dq_1 = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)\sin^2 q_2 + b^2}{\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0}}\, \frac{\sin q_2{}^0}{b \sin q_2 \cos q_2}\, dq_2.$$

Nun machen wir die Substitution: $\sin^2 q_2 = z$, dann wird $\cos^2 q_2 = 1 - z$ und $2 \sin q_2 \cos q_2 = dz$ oder $2\sqrt{z(1-z)}\, dq_2 = dz$, d. f. $dq_2 = \frac{dz}{2\sqrt{z(1-z)}}$.

Dann wird

$$q_1 = \frac{\sin q_2{}^0}{2b} \int \sqrt{\frac{(a^2 - b^2) z + b^2}{z - \sin^2 q_2{}^0}} \; \frac{dz}{z(1-z)}.$$

Indem wir nun dieses Integral rational machen und dann integriren mit Hülfe der Partialbruchzerlegung, finden wir

$$q_1 = \frac{\sin q_2{}^0}{4 a^2 b^2} \left\{ \frac{y_1}{\beta_1} \log \frac{y - y_1}{y + y_1} + \frac{y_2}{\beta_2} \log \frac{y - y_2}{y + y_2} \right\},$$

wobei

$$y = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2) \sin^2 q_2 + b^2}{\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0}}, \qquad y_1 = \frac{bi}{\sin q_2{}^0},$$

$$y_2 = \frac{a}{\cos q_2{}^0} \quad \text{und} \quad \beta_1 = \beta_2 = 2\left[(a^2 - b^2) \sin^2 q_2{}^0 + b^2\right].$$

Jenes ist die Gleichung der Bewegungscurve für den Fall also, da das zweite Maximum im Aequator liegt. Und da sehen wir nun sofort, dass für $q_2 = \frac{\pi}{2}$, $y = y_2$ und damit q_1 unendlich gross wird, d. h. der Punkt wird erst nach unendlich langer Zeit das zweite Maximum erreichen. Der Punkt wird daher vom ersten Maximum aus sich spiralenförmig auf dem Ellipsoid bewegen und sich gleichsam asymptotisch dem Aequator nähern.

Dieser Fall ist wesentlich verschieden von den frühern.

Diesen Spezialfall verlassend, wollen wir noch die letzte Hauptgleichung für unser Problem aufstellen, d. h. wir wollen sehen, wie wir die Zeit in unsere Rechnung hineinbringen. Aus der Gleichung

$$q_2'^2 = \frac{(\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0)\left[(2Bb^2 - 2Aa^2) b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 + b^2 c^2\right]}{b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 (a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2)}$$

folgt durch Integration

$$\text{IV}^{\text{a}} \quad t - t_0 = \int b^2 \sin q_2 \sin q_2{}^0 \sqrt{\left\{ \frac{a^2 \sin^2 q_2 + b^2 \cos^2 q_2}{(\sin^2 q_2 - \sin^2 q_2{}^0)\left[(2Bb^2 - 2Aa^2) b^4 \sin^2 q_2 \sin^2 q_2{}^0 + b^2 c^2\right]} \right.}$$

Die Umkehrungsfunction dieses hyperelliptischen Integrals liefert q_2 als Function der Zeit und dann kann auch q_1 als Function der Zeit ausgedrückt werden, da

IV.^{b} $$q_1 = \frac{c}{b^2}\int \frac{dt}{\sin^2 q_2}.$$

Damit sind nun die letzten Hauptgleichungen, die für jedes mechanische Problem aufgestellt werden, hergeleitet und die Frage der Bewegung des Punktes auf dem gegebenen Rotationsellipsoid in den wesentlichsten Punkten gelöst.

Bewegt sich der Punkt auf dem zum gegebenen Rotationsellipsoid confocalen Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2+z^2}{b^2+\lambda} = 1\ ,$$

so gelangen wir ganz zu denselben Resultaten, denn die Kräftefunction behält dieselbe Form bei, nur dass die Constanten A und B nicht mehr Integrale sind mit der untern Grenze 0, sondern mit der untern Grenze λ. Die früher gefundenen Resultate lassen sich unmittelbar auf diesen Fall übertragen.

III.

A. Das behandelte Problem kann auch gelöst werden mit Hülfe einer von Hamilton abgeleiteten partiellen Differentialgleichung, zu der wir nun sogleich übergehen wollen.

Es sei T die halbe lebendige Kraft und U die Kräftefunction, welche t auch explicite enthalten darf, und diese Grössen T und U seien durch die Variabelen q_s dargestellt, welche den Bedingungen des Systems identisch genügen. Setzen wir $T+U=\varphi$, so bilden wir die Variation von

$$V=\int_{\tau}^{t}\varphi\, dt\,,$$

aber so, dass die Werthe an den Grenzen nicht als gegeben angesehen werden, sondern an den Grenzen andere Bedingungen stattfinden. Da φ eine Function der q_s und q_s' ist, so haben wir

$$\delta V=\delta\int_{\tau}^{t}\varphi\, dt=\int_{\tau}^{t}\delta\varphi dt=\int_{\tau}^{t}\left(\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial q_s}\delta q_s\right)dt+\int_{\tau}^{t}\left(\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\,\delta q_s'\right)dt.$$

Nun ist

$$\int\left(\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\,\delta q_s'\right)dt=\Sigma\int\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\,\delta q_s'\,dt=\Sigma\int\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\,\delta\,\frac{\partial q_s}{dt}\,dt$$

$$=\Sigma\int\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\,\frac{d\,\delta q_s}{dt}\,dt$$

$$=\Sigma\left[\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\,\delta q_s-\int\frac{d\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_s'}}{dt}\,\delta q_s\,dt\right].$$

Wenn wir also zwischen den Grenzen τ und t integriren und die dem Werthe τ entsprechenden Anfangswerthe mit dem Index 0 bezeichnen, so finden wir

$$\Sigma\int_{\tau}^{t}\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\,\delta q_s'\,dt=\Sigma\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\,\delta q_s-\frac{\partial\varphi^0}{\partial q_s'}\,\delta q_s^{\,0}-\int_{\tau}^{t}\frac{d\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_s'}}{dt}\,\delta q_s\,dt\right\}.$$

Setzen wir dies in δV ein, so ergibt sich

$$\delta V=\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial q_s'}\,\delta q_s-\Sigma\,\frac{\partial\varphi^0}{\partial q_s'}\,\delta q_s^{\,0}+\int_{\tau}^{t}\Sigma\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q_s}-\frac{d\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_s'}}{dt}\right\}\,\delta q_s\,dt.$$

Da U die q_s' nicht enthält, so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_s'} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_s'} = \frac{\partial T}{\partial q_s'} = p_s$$

und daher ist nach frühern Entwicklungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial q_s'} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_s'} = 0.$$

Es wird also

$$\delta V = \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q_s'} \delta q_s - \Sigma \frac{\partial \varphi^0}{\partial q_s'} \delta q_s{}^0 = \Sigma p_s \delta q_s - \Sigma p_s{}^0 \delta q_s{}^0$$

$$= p_1\, \delta q_1 + p_2\, \delta q_2 + \ldots + p_\mu\, \delta q_\mu$$

$$- p_1{}^0 \delta q_1{}^0 - p_2{}^0 \delta q_2{}^0 - \ldots - p_\mu{}^0 \delta q_\mu{}^0.$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung werden als erfüllt angesehen; somit sind die q_s, q_s' und p_s als gegebene Functionen von t und den 2μ Constanten zu betrachten, welche die Integration dieser Gleichungen einführt. Die δq_s entspringen daher aus den 2μ Constanten, da ja t nicht variirt wird und die $\delta q_s{}^0$ sind die der untern Grenze τ des Integrals V entsprungenen Werthe derselben. Nach der Integration der Bewegungsgleichungen können alle Variabelen, also auch φ als Functionen von t und den 2μ Constanten dargestellt werden. Da die Constanten willkürlich sind, so kann man dazu die Anfangswerthe $q_s{}^0$ und $p_s{}^0$ wählen. Die $2\mu+1$ Variabelen t, q_s und p_s und die 2μ Constanten $q_s{}^0$ und $p_s{}^0$ bilden ein System von $4\mu+1$ Grössen, zwischen welchen aber die 2μ Integralgleichungen bestehen. Mittelst derselben kann man also die 2μ Grössen p_s und $p_s{}^0$ durch t, q_s und $q_s{}^0$ darstellen und es wird dadurch V eine Function von t, q_s und $q_s{}^0$. Lässt man t unvariirt, so kann die Aenderung von V auch unter folgender Form gegeben werden:

$$\delta V = \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_s} \delta q_s + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_s^0} \delta q_s^0.$$

Diese Formel, verglichen mit der vorigen, gibt

$$\frac{\partial V}{\partial q_s} = p_s, \quad \frac{\partial V}{\partial q_s^0} = -p_s^0.$$

Da V die Zeit sowohl explicite als implicite in den Grössen q_s enthält und da $\varphi = \frac{dV}{dt}$, so wird

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma p_s q_s' \quad \text{und d. f.}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma p_s q_s' - \varphi = 0.$$

Nun ist aber

$$\varphi = T + U, \; p_s = \frac{\partial T}{\partial q_s'} \; \text{und} \; \Sigma p_s q_s' = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_s'} q_s' = 2T,$$

somit $$\Sigma p_s q_s' - \varphi = T - U = H.$$

Es geht somit jene Gleichung über in die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

und dieser Gleichung muss die Function V genügen. Es ist dies jedoch so zu verstehen, dass in H die Grössen q_s' durch p_s ausgedrückt und $p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}$ gesetzt wird. Wir können daher den Satz aussprechen:

Wenn die Bewegung, deren Gleichungen sind

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \; \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}; \; \text{wo} \; H = T - U, \; p_s = \frac{\partial T}{\partial q_s'}$$

und wo H durch p_s und q_s dargestellt ist, zwischen zwei Zeitmomenten τ und t betrachtet wird, und als willkürliche Constanten der Integralgleichungen die 2μ Anfangswerthe $q_s{}^0$ und $p_s{}^0$ gelten und ferner $p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}$ in H gesetzt wird, so ist

$$\frac{\partial V}{dt} + H = 0$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, durch welche V als eine Function von t und der μ Grössen q_s definirt wird. Das Integral

$$V = \int_\tau^t (T + U)\, dt,$$

in welchem $T + U$ vermöge der Integralgleichungen eine Function von t und den 2μ Constanten $q_s{}^0$ und $p_s{}^0$ ist, nachdem das Resultat der Quadratur durch t und die Grössen $q_s{}^0$ und $p_s{}^0$ dargestellt ist, ist eine Lösung dieser Differentialgleichung.

Umgekehrt, kennt man eine vollständige Lösung V der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{dt} + H = 0,$$

d. h. eine solche, welche ausser der additiven Constanten noch μ andere willkürliche Constanten α_s enthält, so sind, wie sich leicht zeigt

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \; \ldots . \; \frac{\partial V}{\partial \alpha_\mu} = \beta_\mu,$$

wo die β neue Constanten bezeichnen, nebst

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \; \ldots . \; \frac{\partial V}{\partial q_\mu} = p_\mu$$

die Integralgleichungen des Systems von folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \qquad s = 1, 2, 3, \ldots . \mu.$$

Nun kann auch der Fall eintreten, dass H die Zeit nicht explicite enthält, wie bei unserm Bewegungsproblem und da reduzirt sich die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

auf eine andere, welche eine Variabele weniger enthält. Setzen wir nämlich $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$, $V - t\frac{\partial V}{\partial t} = W$ und führen wir durch diese Gleichungen an die Stelle von t und V zwei neue Variabelen α und W ein, so wird t eine Function von α und den Grössen, die ausser t noch in V vorkommen und W wird eine Function von α, q_1, $q_2 \ldots . q_\mu$ und den Constanten α_1, $\alpha_2 \ldots .$ Man hat somit

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha} - \alpha\frac{\partial t}{\partial \alpha} - t = -t,$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_s} = \frac{\partial V}{\partial q_s} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial q_s} - \alpha\frac{\partial t}{\partial q_s} = \frac{\partial V}{\partial q_s},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha_s} - \alpha\frac{\partial t}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_s} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \ldots . q_\mu; \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots . \frac{\partial V}{\partial q_\mu}\right) = 0$$

geht über in

$$\alpha + H\left(q_1, q_2, \ldots . q_\mu; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots . \frac{\partial W}{\partial q_\mu}\right) = 0 \quad \text{oder}$$

$$\alpha + T - U = 0.$$

Ist diese Gleichung integrirt, so erhält man V durch

$$V - t\frac{\partial V}{dt} = W, \qquad \text{oder da}$$

$$\frac{\partial V}{dt} = \alpha\,,\ t = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}\,,$$ vermittelst

$$V = W - \alpha\,\frac{\partial W}{\partial \alpha}$$

und in dieses V ist überall statt α wieder t einzuführen durch die Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -t\,,$$

welche nach α aufzulösen ist.

Die Lösung W enthält nur μ Constanten und die aus ihr abgeleitete Grösse V ebenfalls. Damit aber V vollständig sei, muss es $\mu + 1$ Constanten haben. Da nun aber t in $\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$ selbst nicht auftritt, sondern nur $\frac{\partial V}{\partial t}$, so bleibt V auch noch eine Lösung, wenn man t um eine Constante vermehrt oder vermindert. Man kann daher $t - \tau$ setzen für t, wodurch

$$W = V - (t - \tau)\frac{\partial V}{\partial t} = V - \alpha\,(t - \tau)$$ und

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = (\tau - t)$$

wird. Dann enthält V die nöthigen $\mu + 1$ Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\mu-1}$ und die additive Constante von W und τ. Die Integralgleichungen des Problems werden demnach

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1\,,\ \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2\,, \ldots \frac{\partial V}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1} \text{ und } \frac{\partial V}{\partial \tau} = \text{const.}$$

Da τ nur in $t - \tau$ vorkommt, so ist $\frac{\partial V}{\partial \tau} = -\frac{\partial V}{\partial t}$ und es kann $\frac{\partial V}{\partial \tau} = \text{const.}$ ersetzt werden durch $\frac{\partial V}{\partial t} = \text{const.}$ Es ist $\frac{\partial V}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_s}$ und $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$ eine Folge von $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$

und $W = V - (t - \tau) \frac{\partial V}{dt}$; wir können unsere Integralgleichungen daher auch folgendermassen schreiben:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots \frac{\partial W}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$$

und da $\frac{\partial V}{\partial q_s} = \frac{\partial W}{\partial q_s}$, so haben wir auch

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = p_\mu.$$

Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Ist die Kräftefunction U und in Folge dessen die characteristische Function $H = T - U$ derart, dass sie die Zeit nicht explicite enthält, so stelle man T durch q_s und p_s dar und ersetze in der Gleichung

$$\alpha + T - U = 0$$

die Grössen p_s durch $\frac{\partial W}{\partial q_s}$, wodurch diese Gleichung eine partielle Differentialgleichung wird. Ist W eine vollständige Lösung derselben, welche ausser der additiven Constanten noch $\mu - 1$ andere Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\mu-1}$ enthält, so sind

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$$

die zweiten und

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = p_\mu$$

die ersten Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung. Die 2μ Constanten derselben sind

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots \ \alpha_{\mu-1};$$
$$\beta_1, \ \beta_2, \ \ldots \ \alpha_{\mu-1};$$
$$\tau \text{ und } \alpha.$$

8. Diesen Satz wollen wir nun für unser gegebenes Problem benutzen. In

$$\alpha + T - U = 0$$

ist T und U durch die q_s und p_s auszudrücken, so dass, wie wir früher gesehen haben

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{p_1^{\,2}}{b^2\sin^2 q_2} + \frac{p_2^{\,2}}{a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2}\right\} \qquad \text{und}$$

$$U = Aa^2\cos^2 q_2 + Bb^2\sin^2 q_2 + C$$

wird. Führen wir diese Werthe in obige Gleichung ein und ersetzen wir dann zugleich p_1 durch $\frac{\partial W}{\partial q_1}$ und p_2 durch $\frac{\partial W}{\partial q_2}$, so erhalten wir die für unser Problem gewünschte partielle Differentialgleichung

$$\alpha + \frac{1}{2b^2\sin^2 q_2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{2(a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 - Aa^2\cos^2 q_2 - Bb^2\sin^2 q_2 - C = 0.$$

Indem man nun die Constante α mit C vereinigt und die Brüche wegschafft, findet man

$$(a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2)\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + b^2\sin^2 q_2\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 -$$
$$2(a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2)\, b^2\sin^2 q_2\,[Aa^2\cos^2 q_2 + Bb^2\sin^2 q_2 + C] = 0,$$

wo nun C eine willkürliche Constante bezeichnet, da sie α implicite enthält. Aus der Differentialgleichung ersehen wir, dass die Function W, die derselben genügt, nothwendig die Form haben muss

$$W = cq_1 + W',$$

wo c eine Constante und W' eine neue nur von q_2 abhängige Function ist. Setzen wir $\frac{\partial W}{\partial q_1} = c$, so bestimmt sich W' wie folgt:

$$W' = \int \frac{\sqrt{2(a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2)\left\{b^2\sin^2 q_2\,(Aa^2\cos^2 q_2 + Bb^2\sin^2 q_2 + C) - c^2\right\}}}{b\sin q_2}\, dq_2$$

und d. f.

$$W = cq_1 + \int \frac{\sqrt{2(a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2)\left\{b^2\sin^2 q_2\,(Aa^2\cos^2 q_2 + Bb^2\sin^2 q_2 + C) - c^2\right\}}}{b\sin q_2}$$

Differentiire ich nun diese allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung nach den Constanten C und c, so finde ich die Integralgleichungen für unser Bewegungsproblem. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial W}{\partial C} = t - t_0$$

$$= \int \frac{1}{b\sin q_2} \frac{b^2\sin^2 q_2\,(a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2)\; dq_2}{\sqrt{2(a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2)\left\{b^2\sin^2 q_2\,(Aa^2\cos^2 q_2 + Bb^2\sin^2 q_2 + C) - c^2\right\}}}$$

oder

$$\text{I.}\quad t - t_0 = b\int \sin q_2 \sqrt{\frac{a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2}{b^2\sin^2 q_2\,(2Aa^2\cos^2 q_2 + 2Bb^2\sin^2 q_2 + C) - c^2}}\, dq_2 .$$

Dies ist eine Gleichung zwischen t und q_2, welche genau übereinstimmt mit der, die wir erhalten, wenn wir Gleichung II. nach dt auflösen und integriren, oder auch mit der Gleichung IV., wenn wir dort statt des Maximums $q_2{}^0$ die Grösse C einführen. Ferner ist

$$\frac{\partial W}{\partial c} = \text{const.} = q_1 +$$

$$\int \frac{1}{b\sin q_2} \frac{-c\,(a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2)\, dq_2}{\sqrt{2(a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2)\left\{b^2\sin^2 q_2\,(Aa^2\cos^2 q_2 + Bb^2\sin^2 q_2 + C) - c^2\right\}}}$$

und d. f.

$$\text{II.}\quad q_1 = \int \frac{c}{b\sin q_2} \sqrt{\frac{a^2\sin^2 q_2 + b^2\cos^2 q_2}{b^2\sin^2 q_2\,(2Aa^2\cos^2 q_2 + 2Bb^2\sin^2 q_2 + C) - c^2}}\, dq_2 .$$

Diese Gleichung gibt uns den Zusammenhang zwischen q_1 und q_2, d. h. sie ist die Gleichung der Bewegungscurve. Sie stimmt genau überein mit derjenigen Gleichung, die aus den frühern Gleichungen I. und II. folgt oder mit der Gleichung III., wenn wir auch dort statt des $q_2{}^0$ das C wieder einführen.

Wir sehen also, dass wir auch auf diesem Wege mit Hülfe der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung genau zu denselben Gleichungen und damit auch zu denselben Resultaten gelangen wie mit Hülfe der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Der Vortheil der partiellen Differentialgleichungen ist der, dass man gleich zu den fertigen Integralgleichungen gelangt und diese nicht wie früher erst aus $q_1{}'$ und $q_2{}'$ herzuleiten braucht. Auch letztere ergeben sich hier einfach, es ist z. B.

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1 = c = q_1{}' \, b^2 \sin^2 q_2 \text{ und d. f. } q_1{}' = \frac{c}{b^2 \sin^2 q_2} \text{ u. s. f.}$$

Indem ich hiemit den Gang der Rechnung angegeben und den Nachweis geliefert habe, dass man auch in diesem Falle zu ganz denselben Resultaten gelangt wie früher, schliesse ich diese Betrachtungen.

IV.

Nun wollen wir unsere Betrachtungen erweitern und zusehen, zu welchen Resultaten wir gelangen, wenn wir einen Punkt unter ganz denselben Bedingungen auf einem beliebigen dreiaxigen Ellipsoid bewegen lassen.

Bezeichnen x, y, z die rechtwinkligen, auf die Axen des Ellipsoids bezogenen Coordinaten des sich bewegenden

Punktes, so wird der für denselben stattfindende Zwang auf dem Ellipsoid zu verbleiben durch die Bedingungsgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ausgedrückt. Nun kommt es wiederum darauf an, x, y, z als Functionen zweier neuen Variabelen so darzustellen, dass sie in die Bedingungsgleichung eingesetzt, dieselbe identisch befriedigen. Solche gewünschte neue veränderliche Grössen sind die elliptischen Coordinaten λ_1 und λ_2. Wir setzen also:

$$x^2 = \frac{a^2(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2 = \frac{b^2(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},$$

$$z^2 = \frac{c^2(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Setze ich dabei $a < b < c$ und $\lambda_1 > \lambda_2$, so gibt es für jeden Punkt (x, y, z) auf unserm Ellipsoid zwei Werthe λ_1 und λ_2, welche unserer Bedingungsgleichung genügen, und zwar entspricht λ_1 einem einschaligen Hyperboloid und λ_2 einem zweischaligen und diese beiden bilden mit dem gegebenen Ellipsoid drei confocale Oberflächen zweiten Grades, die sich in dem betreffenden Punkte gegenseitig rechtwinklig schneiden und die Schnittcurven der beiden Hyperboloide je mit dem Ellipsoid sind die Krümmungscurven des letztern in dem nämlichen Punkte. Dabei kann λ_1 alle Werthe annehmen zwischen $-a^2$ und $-b^2$ und λ_2 alle Werthe zwischen $-b^2$ und $-c^2$.

Nun haben wir durch die Grössen λ_1 und λ_2 die Kräftefunction U und ebenso haben wir durch die nämlichen Grössen und ihre Differentialquotienten $\lambda_1' = \frac{d\lambda_1}{dt}$ und $\lambda_2' = \frac{d\lambda_2}{dt}$ die halbe lebendige Kraft T auszudrücken, sodann für λ_1' und λ_2' die neuen Variabelen $\mu_1 = \frac{\partial T}{\partial \lambda_1'}$ und $\mu_2 = \frac{\partial T}{\partial \lambda_2'}$ einzuführen und $\mu_1 = \frac{\partial T}{\partial \lambda_1'} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}$ und $\mu_2 = \frac{\partial T}{\partial \lambda_2'} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}$ zu setzen. So ergibt sich T ausgedrückt durch λ_1, λ_2, $\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}$ und $\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}$ und dann ist

$$\alpha + T - U = 0$$

die partielle Differentialgleichung unseres Problems. Durch dieselbe wird W als Function von λ_1 und λ_2 definirt. Hier vertreten die Variabelen λ und μ die Stelle der früher mit q und p bezeichneten Grössen.

Für ein dreiaxiges Ellipsoid ist

$$\begin{aligned} U &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D \\ &= A\frac{a^2(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} + B\frac{b^2(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)} + \\ &\qquad C\frac{c^2(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} + D. \end{aligned}$$

Wenn wir ferner unsere Substitutionsgleichungen logarithmisch differentiiren, dann x'^2, y'^2 und z'^2 bilden und die zwischen den elliptischen Coordinaten stattfindenden Relationen berücksichtigen, finden wir

$$\begin{aligned} 2\,T = x'^2 + y'^2 + z'^2 &= \tfrac{1}{4}\frac{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}\lambda_1'^2 + \\ &\quad \tfrac{1}{4}\frac{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}\lambda_2'^2. \end{aligned}$$

Nehme ich nun hiemit die oben angegebene Umwandlung vor, so findet sich

$$2T = 4\frac{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)^2 + 4\,\frac{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2.$$

Es nimmt somit unsere partielle Differentialgleichung $\alpha + T - U = 0$ nun folgende Form an:

$$\frac{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}{\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)^2 - \frac{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}{\lambda_2}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2 =$$

$$= (\lambda_1-\lambda_2)\Big[(A'a^4+B'b^4+C'c^4)+(A'a^2+B'b^2+C'c^2)(\lambda_1+\lambda_2)+ + (A'+B'+C')\,\lambda_1\lambda_2+D'\Big].$$

Dabei ist

$$A' = \frac{Aa^2}{2(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\quad B' = \frac{Bb^2}{2(b^2-a^2)(b^2-c^2)},\quad C' = \frac{Cc^2}{2(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

und D' eine willkürliche Constante, da sie α implicite enthält. Diese partielle Differentialgleichung ist nicht integrirbar. Die Integration wäre möglich, wenn sich die Variabelen trennen liessen und zu dem Ende müsste, wie sofort ersichtlich, die Bedingung

$$A' + B' + C' = 0,$$ d. h.

$$\frac{a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\int_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)R} + \frac{b^2}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}\int_0^\infty\frac{ds}{(b^2+s)R} + + \frac{c^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\int_0^\infty\frac{ds}{(c^2+s)R} = 0$$

erfüllt sein. Wenn es also überhaupt dreiaxige Ellipsoide gibt, für die die Integration möglich ist, so müssen die Halbaxen des Ellipsoids dieser Bedingungsgleichung genügen. In ihr sind alle Elemente positiv, ausgenommen der Factor $b^2 - c^2$ im zweiten Gliede. Bringe ich nun alles unter ein Integralzeichen, so finde ich für die drei Halbaxen folgende Bedingungsgleichung:

$$a^2(b^2+s)(c^2+s)(c^2-b^2)+b^2(a^2+s)(c^2+s)(a^2-c^2)+$$
$$+c^2(a^2+s)(b^2+s)(b^2-a^2)=0.$$

Diese Gleichung liefert für b keine andere Wurzeln als $b=a$ und $b=c$, welche Werthe uns nichts anderes liefern, als die Rotationsellipsoide, die wir bereits betrachtet haben. Es gibt also kein dreiaxiges Ellipsoid für das sich unsere partielle Differentialgleichung integriren lässt unter der Bedingung, dass der sich bewegende Punkt vom Ellipsoid nach dem Newton'schen Attractionsgesetz, wofür

$$U=Ax^2+By^2+Cz^2+D,$$

angezogen werde.

Wir können uns daher fragen, wie müssen wir die Kräftefunction modificiren, damit jene Bedingungsgleichung erfüllt wird. Sie wird identisch erfüllt, wenn jene elliptischen Integrale, d. h. die Constanten A, B und C einander gleich werden. Wir setzen daher $A=B=C=C_0$ und nehmen die Kräftefunction von folgender Form an:

$$\tfrac{1}{2}C_0(x^2+y^2+z^2)=\tfrac{1}{2}C_0r^2,$$

wo r den Radius vector bedeutet. Ist $\frac{1}{2}C_0r^2$ die Kräftefunction, so ist C_0r die auf den Punkt wirkende Kraft und wir finden also:

Die Integration unserer partiellen Differentialgleichung ist möglich, wenn nicht eine Kraft wirkt, wie sie das Newton'sche Attractionsgesetz verlangt, sondern eine Kraft, die den sich bewegenden Punkt nach dem Mittelpunkt proportional der Entfernung von demselben anzieht.

Nun ist $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2+\lambda_1+\lambda_2$ und somit wird $\frac{1}{2}C_0(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{2}C_0(\lambda_1+\lambda_2)+C_1$.

Es nimmt daher für dieses spezielle Bewegungsproblem die partielle Differentialgleichung $\alpha+T-U=0$ nun folgende Form an:

$$\frac{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}{\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)^2-\frac{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}{\lambda_2}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2$$

$$=\tfrac{1}{4}C_0(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)+C_1(\lambda_1-\lambda_2)=\tfrac{1}{4}C_0(\lambda_1{}^2-\lambda_2{}^2)+C_1(\lambda_1-\lambda_2)$$

Dabei ist C_1 eine willkürliche Constante, da sie α implicite enthält. Diese partielle Differentialgleichung theilt sich nun ganz von selbst in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, deren jede nur eine der unabhängigen Variabelen enthält, wobei man auf der rechten Seite eine willkürliche Constante C_2 zugleich additiv und subtractiv hinzufügt. Auf diese Weise erhalten wir folgende zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\frac{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}{\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)^2=\tfrac{1}{4}C_0\lambda_1{}^2+C_1\lambda_1+C_2\,,$$

$$\frac{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}{\lambda_2}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2=\tfrac{1}{4}C_0\lambda_2{}^2+C_1\lambda_2+C_2\,.$$

Aus diesen zwei Gleichungen ergibt sich nun folgende vollständige Lösung unserer partiellen Differentialgleichung:

$$W=\int_a^{\circ} d\lambda_1\sqrt{\frac{\lambda_1(\frac{1}{4}C_0\lambda_1{}^2+C_1\lambda_1+C_2)}{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}}+\int^{\circ} d\lambda_2\sqrt{\frac{\lambda_2(\frac{1}{4}C_0\lambda_2+C_1\lambda_2+C_2)}{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}}.$$

Differentiiren wir diese vollständige Lösung nach den in ihr vorkommenden willkürlichen Constanten C_1 und C_2, so finden wir die fertigen Integralgleichungen für unsere Bewegung. Die Gleichung für die Zeit ist $\frac{\partial W}{\partial C_1}=t-t_0$ oder

$$\text{I.}\quad t-t_0=\int\lambda_1\,d\lambda_1\sqrt{\frac{1}{2(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)(\frac{1}{4}C_0\lambda_1{}^2+C_1\lambda_1+C_2)}}+\int\lambda_2\,d\lambda_2\sqrt{\frac{1}{2(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)(\frac{1}{4}C_0\lambda_2{}^2+C_1\lambda_2+C_2)}}.$$

Die Gleichung der Bewegungscurve ist $\frac{\partial W}{\partial C_1}=\text{const.}$ oder

$$\text{II.}\quad c=\int d\lambda_1\sqrt{\frac{\lambda_1}{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)(\frac{1}{4}C_0\lambda_1{}^2+C_1\lambda_1+C_2)}}+\int d\lambda_2\sqrt{\frac{\lambda_2}{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)(\frac{1}{4}C_0\lambda_2{}^2+C_1\lambda_2+C_2)}}.$$

In diesen zwei Gleichungen, also mit Hülfe der Abel'schen Integrale, findet dieses spezielle Bewegungsproblem, — wo nämlich ein Punkt gezwungen ist sich auf der Oberfläche eines Ellipsoids zu bewegen und auf den eine Kraft wirkt, die ihn nach dem Mittelpunkt des Ellipsoids proportional der Entfernung von demselben anzieht, — seine Lösung. Wollen wir die Natur der Bewegungscurve näher ermitteln, so gelangen wir zum Ziele analog wie früher, mit Hülfe der Integralgleichungen $\mu_1=\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}$ und $\mu_2=\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}$, welche uns die Geschwindigkeitscomponenten liefern, worauf wir jedoch hier nicht mehr näher eingehen wollen.

Fig. 1.

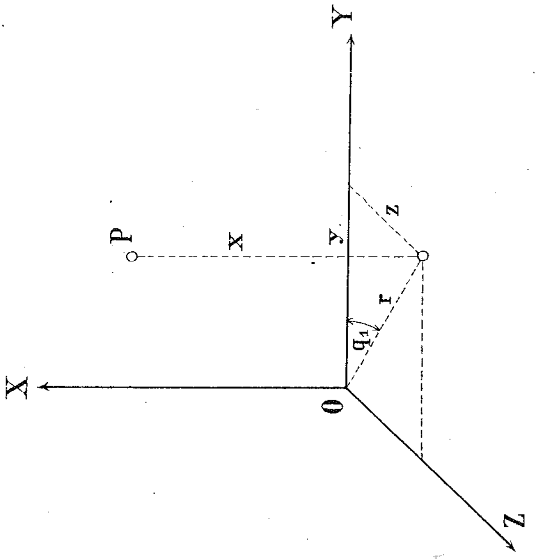


Fig. 2.

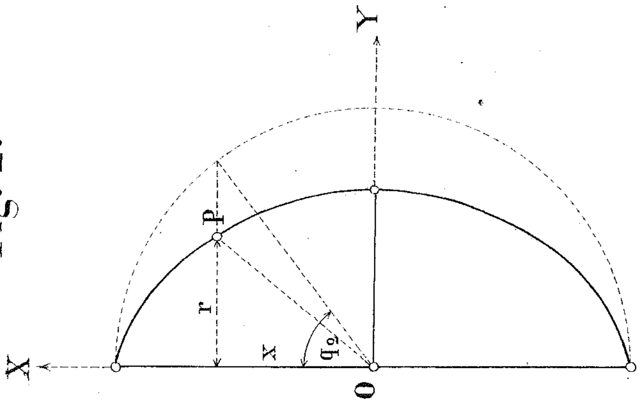
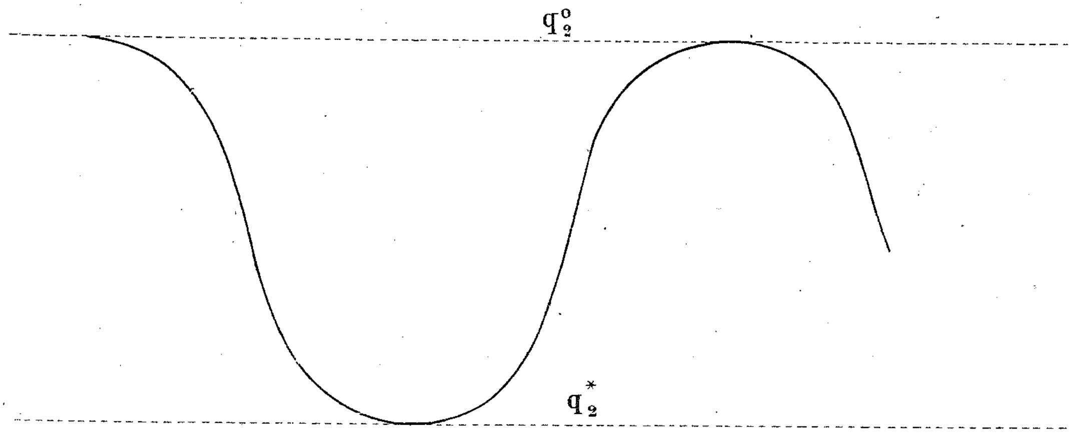


Fig. 3.



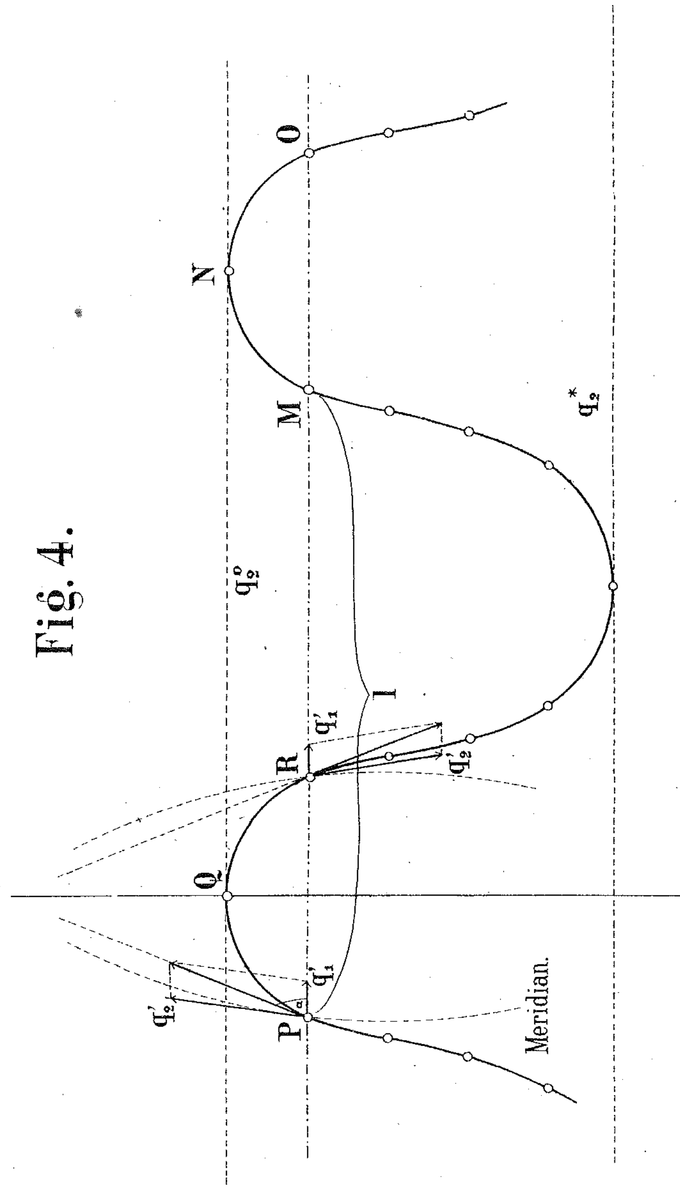
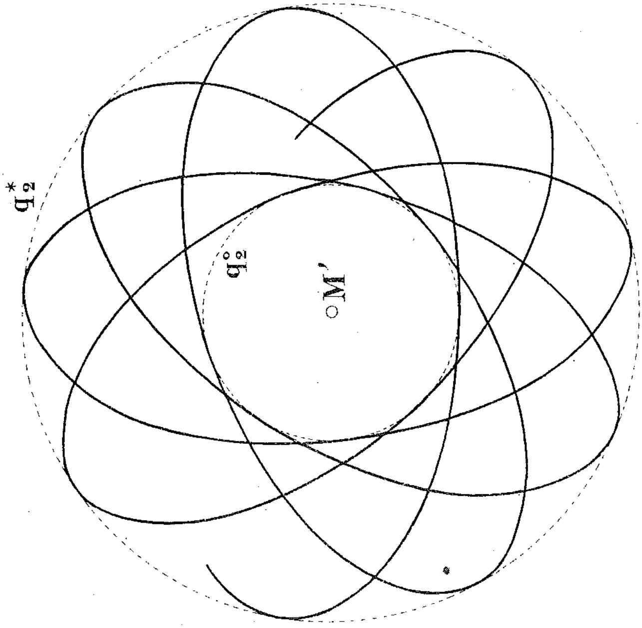
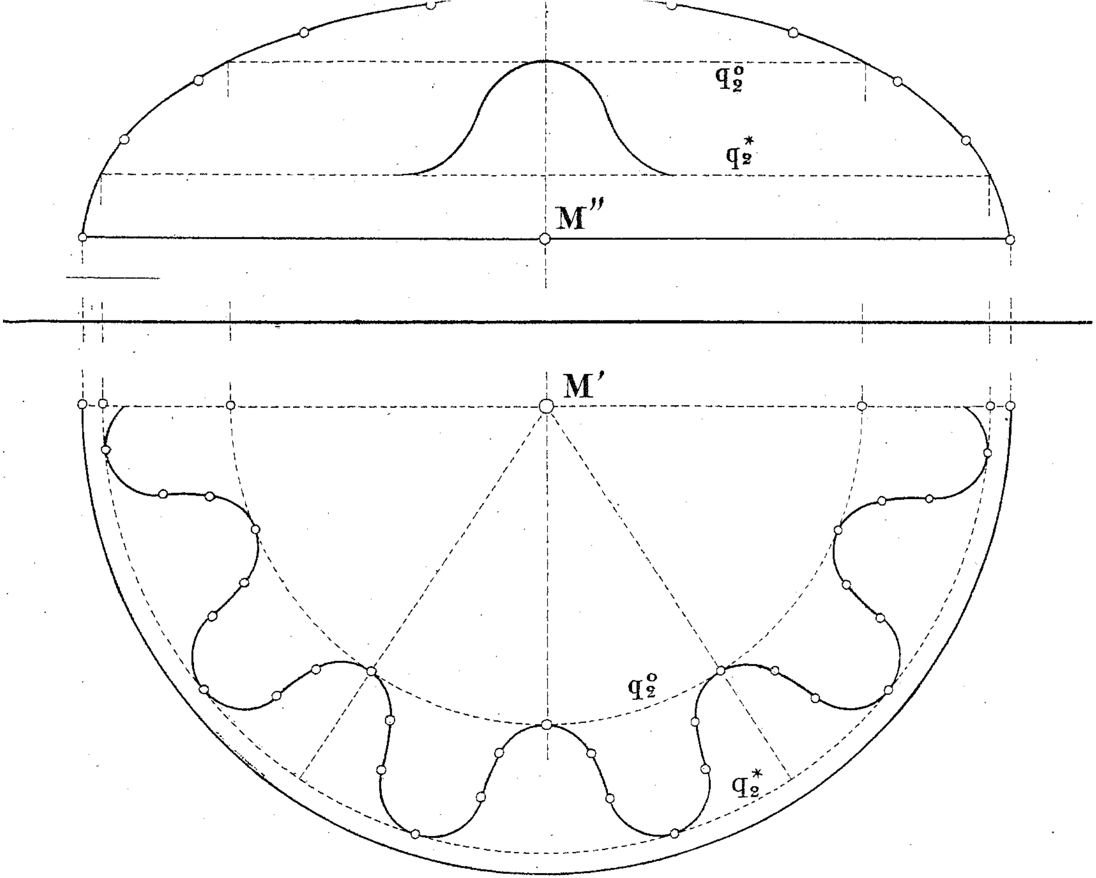


Fig. 4.

Fig. 5b.





q_2^o
q_2^*
M″
M′
q_2^o
q_2^*

Fig. 6.