Die Fundamentaleigenschaften der Linsensysteme in geometrischer Darstellung.

Von

A. Beck.

Den bekannten Fundamentalsätzen über den Zusammenhang zwischen Object und Bild bei einem centrirten Linsensystem liegen die beiden Voraussetzungen zu Grunde: 1) Alle Lichtstrahlen bilden mit der Axe verschwindend kleine Winkel. 2) Von den brechenden Kugelflächen werden nur Segmente von verschwindend kleinem Centriwinkel benützt.

Nach der von Gauss gegebenen Ableitung dieser Sätze (Gauss' Werke, Bd. 5) sind dieselben mehrfach analytisch behandelt worden: von Helmholtz (physiologische Optik 1856), Maxwell (Quarterly journal of pure and applied mathematics, vol. II, 1858), Hansen (Abhandlungen der math.-physischen Classe der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 10, 1871) u. s. w. In andern Ableitungen sind mit gutem Erfolg geometrische Betrachtungen angewandt worden: C. Neumann (Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems, Leipzig 1866), Martin, Reusch, Töpler, u. s. w. Möbius (Berichte über die Verhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig, Bd. 7, 1855) hatte schon darauf aufmerksam gemacht, dass zwischen Object und Bild die Beziehungen der Collineation bestehen. Es wird sich also zu einer anschaulichen Darstellung am besten die Betrachtungsweise der neuern Geometrie eignen. In diesem Sinne ist die Theorie von Lippich (Fundamentalpunkte eines Systems centrirter brechender Kugelflächen, Graz 1871) bearbeitet worden.

In der Abhandlung von Casorati: Alcuni strumenti topografici a riflessione e le proprietà cardinali dei cannocchiali anche non centrati, Milano 1872) ist die analytische Ableitung durch Anwendung der Determinanten sehr vereinfacht und es wird gezeigt, dass die Fundamentaleigenschaften auch dann noch fortbestehen, wenn das System nicht genau centrirt ist. Im Folgenden soll die Theorie der Linsensysteme mit Einschluss der Verallgemeinerung von Casorati rein geometrisch abgeleitet werden.

I. Durchgang des Lichtes durch eine einzige brechende Fläche.

1. Es sei eine brechende Kugelfläche F mit dem Centrum C gegeben und ein Durchmesser x als Axe bezeichnet, gegen welche alle Lichtstrahlen unter verschwindend kleinen Winkeln geneigt sind. Sei ferner ein auffallender Lichtstrahl l gegeben, der aber die Axe nicht schneide, sondern zu derselben windschief sei. Der gebrochene Strahl l' muss dann zunächst durch den Punkt gehen, in welchem l die Kugelfläche trifft. Da aber nach der Voraussetzung nur ein unendlich kleines Kugelsegment zur Anwendung kommen soll, so kann jenem Punkt der Schnittpunkt S des Strahles l mit der Ebene Σ substituirt werden, welche die Kugel im Schnittpunkt mit der Axe x berührt. Somit haben wir zunächst, wenn wir die Gesammtheit aller einfallenden Strahlen als «erstes System», die Gesammtheit aller gebrochenen Strahlen als «zweites System» bezeichnen: Jedem Strahl l des ersten Systems entspricht ein

Strahl l' des zweiten Systems und zwar so, dass je zwei einander entsprechende Strahlen l und l' sich auf der festen Ebene Σ schneiden.

2. Die Ebene $C.l$, welche durch den einfallenden Strahl und das Centrum der Kugel geht, ist die Einfallsebene und nach dem Brechungsgesetz muss in derselben auch der gebrochene Strahl l' liegen. Je zwei entsprechende Strahlen l und l' liegen also auf einer Ebene, die durch einen festen Punkt C geht.

Nehmen wir ferner im ersten System einen Punkt P an oder denken wir uns alle Strahlen eines Bündels, so ist leicht zu zeigen, dass ihre entsprechenden Strahlen unter der Voraussetzung verschwindend kleiner Einfallswinkel wieder ein Bündel bilden. Wir legen durch C die Ebene Γ senkrecht zur Axe. Wenn A der Schnittpunkt von l mit Γ ist, so muss auf der Geraden AC der Schnittpunkt A' von l' mit Γ liegen (2). Ziehen wir noch den Radius CS oder r, so ist dieser das Einfallsloth und folglich $\sphericalangle rl$ der Einfallswinkel, $\sphericalangle rl'$ der Brechungswinkel. (Fig. 1.) Nach dem Brechungsgesetz muss der Quotient ihrer beiden Sinusse constant sein, und zwar gleich dem Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten v und v' des Lichtes im ersten und zweiten Medium. Weil aber nur verschwindend kleine Einfallswinkel zugelassen werden, so kann man statt des Verhältnisses ber beiden Sinusse das Verhältniss der beiden Tangenten nehmen und weil ferner nur ein verschwindend kleines Kugelsegment benützt, also $\sphericalangle rx$ unendlich klein vorausgesetzt wird, so kann man $\sphericalangle SCA$ als rechten Winkel be-

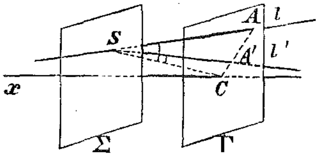

Fig. 1.

trachten, so dass die Abschnitte CA und CA' in dem Verhältniss der beiden Tangenten zu einander stehen.

3. Durch die Strahlen l des Bündels P und ihre entsprechenden Strahlen l' entstehen also auf Γ zwei ebene Systeme, die offenbar zu einander ähnlich und ähnlich gelegen sind, weil alle Verbindungslinien von je zwei entsprechenden Punkten A, A' durch einen festen Punkt C gehen und die Entfernungen CA und CA' in einem constanten Verhältniss zu einander stehen.

4. Da nun das System der Punkte A für das Bündel P perspectivisch ist zum System der Punkte S auf Σ und ähnlich zum System der Punkte A' auf Γ, so sind diese beiden letzteren Systeme zu einander collinear und zwar in perspectivischer Lage, weil offenbar jeder Punkt der unendlich fernen Schnittlinie beider Ebenen sich selbst entspricht.*) Es gehen also alle SA' oder l' durch einen und denselben Punkt P', d. h. jedem Punkt P im ersten System entspricht ein Punkt P' im zweiten. Ferner: die Verbindungslinien PP' von je zwei entsprechenden Punkten gehen alle durch einen festen Punkt C, denn der Strahl PC des einfallenden Bündels wird nicht gebrochen, fällt also mit seinem entsprechenden zusammen, weil er zur brechenden Fläche normal ist. Damit haben wir den Satz: Beim Durchgang des Lichtes durch eine einzige brechende Fläche ist das räumliche System im ersten Medium (Object) centrisch collinear zum System im zweiten Medium (Bild), und zwar in Bezug auf die Scheitelebene Σ (brechende Fläche) als Collineationsebene und den Kugelmittelpunkt C als Collineationscentrum.

*) Reye, Geometrie der Lage, 2. Abth. 3. Vortrag.

5. Den Punkten und Strahlen einer Ebene A des ersten Systems entsprechen dann ferner die Punkte und Strahlen einer Ebene A′ des zweiten Systems und zwar sind diese ebenen Systeme zu einander centrisch collinear in Bezug auf C als Collineationscentrum und die gemeinsame Schnittlinie der beiden Ebenen mit Σ als Collineationsaxe. Ist die eine Ebene parallel zu Σ, so muss es die andere auch sein. In Σ sowie in Γ fallen je zwei entsprechende Ebenen zusammen. Während aber in Σ jeder Punkt mit seinem entsprechenden zusammenfällt, sind die beiden in Γ liegenden einander entsprechenden ebenen Systeme ähnlich und ähnlich gelegen in Bezug auf C als Aehnlichkeitscentrum und mit $v:v'$ als Aehnlichkeitsverhältniss.

Die Gegenebenen F und G′ der beiden Systeme heissen hier Brennebenen. Sie gehen durch die Gegenpunkte (Brennpunkte) F und G' der beiden auf x liegenden projectivischen Reihen und sind parallel zu Σ.

6. In Bezug auf diese beiden Reihen auf x ist folgendes zu bemerken: durch Σ, C und $v:v'$ ist die ganze Brechung bestimmt. Wir nehmen auf einem Perpendikel zur Axe in C zwei Punkte A und A' so an; dass $CA : CA' = v:v'$. (Fig. 2.) Diese Punkte sind dann zwei entsprechende Punkte der beiden Systeme (3., 5.). Um nun zu einem Punkt P von x den entsprechenden P' zu finden, ziehen wir im ersten System den Strahl PA. Sein entsprechender Strahl muss sich mit ihm in S auf Σ schneiden und durch A' gehen. Da nun ein negatives Brechungsverhältniss keinen Sinn

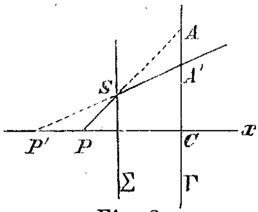

Fig. 2.

hat,*) also A und A' immer nach derselben Seite von x liegen, so sieht man ohne weiteres ein, dass die beiden von P und P' beschriebenen projectivischen Reihen immer *gleichlaufend* sind. C und der Schnittpunkt mit Σ sind ihre beiden Doppelpunkte. Die Brennpunkte F und G' ergeben sich, indem man das eine Mal P', das andere Mal P im Unendlichen auf x annimmt und die vorige Construction anwendet (Fig. 3). Man sieht, dass die Brennpunkte immer ausserhalb der Strecke der beiden Doppelpunkte liegen müssen, und zwar symmetrisch zu den letztern. Eben so leicht ergiebt die Figur, dass das Verhältniss, in welchem F oder G' die Strecke zwischen den beiden Doppelpunkten theilen, gleich dem Verhältniss $CA : CA'$, d. h. gleich dem Brechungsverhältniss ist. Wenn wir die Abstände der Brennpunkte F, G' von der brechenden Fläche die Brennweiten f, g' nennen, so lässt sich das Vorige auch so aussprechen: das Brechungsverhältniss $v : v'$ ist gleich dem Verhältniss der Brennweiten $g' : f$.

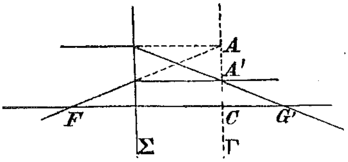

Fig. 3.

7. Die vorigen Betrachtungen gelten ganz gleich, ob die brechende Fläche convex oder concav (C rechts oder links von Σ) sei und ob der Uebergang vom dünnern zum dichtern oder vom dichtern zum dünnern Medium stattfinde. Aus der angegebenen Construction lassen sich die bekannten Regeln über die gegenseitige Lage von Object

*) Die Reflexion kann zwar als eine Brechung mit dem Brechungsverhältniss —1 angesehen werden; wir betrachten aber nur wirkliche Brechungen; übrigens lassen sich die zu entwickelnden Resultate ohne wesentliche Aenderungen auf die Reflexion übertragen.

und Bild in den verschiedenen Fällen der Brechung ohne weiteres ablesen. Da die einander entsprechenden ebenen Systeme in zwei zur Axe senkrechten einander entsprechenden Ebenen A, A′ zu einander perspectivisch liegen in Bezug auf das Centrum C, so ist das Bild eines in A liegenden Objectes aufrecht oder verkehrt, je nachdem A und A′ auf derselben Seite von C liegen oder nicht. Wenn A ausserhalb des Raumes $\Sigma\Gamma$ liegt, so muss A′ ebenfalls ausserhalb liegen, und zwar auf derselben Seite oder auf der entgegengesetzten, jenachdem A auf der einen oder andern Seite der Brennebene F liegt. Denn in Σ oder Γ fallen zwei entsprechende Ebenen zusammen, die unmittelbar vorher nicht zu verschiedenen Seiten von Σ oder Γ liegen konnten, weil die Reihen auf x gleichlaufend sind. Da Σ und Γ die Doppelebenen sind und die Brennebenen immer ausserhalb des Raumes $\Sigma\Gamma$ liegen (6), so muss, wenn A innerhalb $\Sigma\Gamma$ liegt, auch A′ innerhalb liegen, das Bild also aufrecht sein. Verkehrte Bilder reeller Gegenstände können also nur dann vorkommen, wenn F im ersten Medium liegt, d. h. entweder wenn die brechende Fläche convex und das zweite Medium das dichtere ist, oder wenn die brechende Fläche concav und das zweite Medium das dünnere ist (6, Fig. 3).

8. Object und Bild auf zwei Ebenen A, A′, normal zu x, können, weil sie in Bezug auf C perspectivisch sind, nie gleich gross und gleich gerichtet sein, ausser wenn sie in Σ Punkt für Punkt zusammenfallen. Für welche Ebene A ist das Object gleich gross wie das Bild auf A′, aber entgegengesetzt gerichtet? d. h. für welches Ebenenpaar AA′ sind die in ihnen liegenden Systeme centrisch symmetrisch? Diese beiden Ebenen müssen in gleichem Abstand von C, aber nach verschiedenen Seiten liegen.

Ziehen wir einen Strahl l parallel zu x, so liegen die Punkte, welche zu den Punkten von l symmetrisch liegen in Bezug auf C, auf der Geraden l^*, die parallel zu x ist und von ihr denselben Abstand hat wie l, aber nach der entgegengesetzten Seite (Fig. 4).

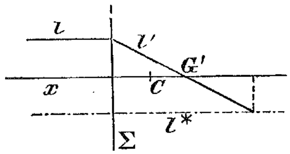

Fig. 4.

Die Gerade l' geht durch die Punkte $\overline{l\Sigma}$ und G' und schneidet l^* in einem Punkt der gesuchten Ebene A'. Die entsprechende Ebene A liegt zu A' symmetrisch in Bezug auf C. Man sieht, dass es nur ein Ebenenpaar von der angegebenen Eigenschaft gibt und dass die Ebene A (A') den doppelten Abstand von Σ hat als F (G').

9. Beim Durchgange des Lichtes durch eine einzige brechende Fläche schneidet jeder gebrochene Strahl l' den entsprechenden einfallenden auf Σ. Ein Bildsystem, welches zum Objectsystem nicht diese Beziehung hat, kann also nicht durch eine einzige Brechung erhalten werden. Um die Beziehung zweier solcher centrisch collinearer Systeme, wie sie durch eine einzige Brechung entstehen, zu bestimmen, genügt ausser der Angabe der Axe die Angabe eines Paares von entsprechenden Strahlen l, l', die sich in einem Punkte S schneiden, dagegen zu x windschief sind. Es ist dann nämlich die Ebene durch S und normal zu x die Ebene Σ (brechende Fläche), während die Ebene $\overline{l\,l'}$ aus x das Centrum C herausschneidet. Die Strahlen, die man durch C parallel zu l und l' ziehen kann, treffen l' und l in je einem Punkt der Brennebenen G' und F (Fig. 5).

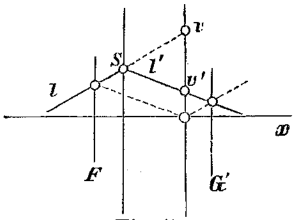

Fig. 5.

(In den Figuren sind die wirklichen Schnittpunkte zweier Geraden durch kleine Kreise von den bloss scheinbaren Schnittpunkten unterschieden). Das Brechungsverhältniss $v:v'$ wird ausser durch die Lage der Brennebenen noch veranschaulicht durch die Abschnitte Cv, Cv', welche die Strahlen l und l' auf der Schnittlinie der Ebenen $\overline{ll'}$ und Γ hervorbringen. Dabei ist noch zu bemerken: wenn die Figuren orthogonale Projectionen sind, wobei die Axe in der Bildebene liegen soll, so wird jenes Verhältniss auch noch durch die Projectionen der beiden Abschnitte dargestellt; es wäre also nur zur Ermittlung des Schnittpunktes C der Ebene $\overline{ll'}$ mit x die Anwendung einer zweiten Projectionsebene erforderlich.

10. Wenn eine nach Lage und Krümmung gegebene brechende Fläche vorliegt, so bilden die Strahlen l', die einem und demselben Strahl l bei verschiedenen Brechungsverhältnissen entsprechen, ein Strahlbüschel mit dem Scheitel S und der Ebene $\overline{lC}$. Sollen dagegen das Brechungsverhältniss und die Ebene Σ gegeben sein, während die Krümmung sich ändert, so findet Folgendes statt: das Perpendikel Cv beschreibt ein hyperbolisches Paraboloid, dessen eine Richtungsebene die Normalebene zu x ist; auf diesem Paraboloid beschreibt v', da $Cv:Cv'$ constant sein soll, eine Erzeugende λ der andern Schaar, zu welcher auch l und x gehören, und der Strahl l', der einem und demselben l entspricht, beschreibt also ein Strahlbüschel mit dem Scheitel S und der Ebene $\overline{S\lambda}$. Analoges gilt für alle Strahlen l, welche einem und demselben l' entsprechen.

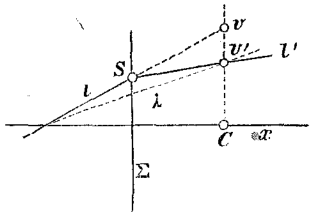

Fig. 6.

Man hätte die Beziehung zwischen den beiden Systemen auch dadurch bestimmen können, dass man ausser Σ ein Paar entsprechende Punkte P und P' gegeben hätte, die mit x in einer Ebene liegen. Dadurch, dass man diese beiden Punkte mit einem Punkt S auf Σ verbindet, ist dann alles wieder auf das Vorige zurückgeführt.

II. Durchgang des Lichtes durch beliebig viele brechende Flächen.

1. Die brechenden Flächen seien $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \ldots \Sigma'$, die zugehörigen Mittelpunkte C_1, C_2, $C_3 \ldots C'$ und die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in den auf einander folgenden Medien $v, v_1, v_2 \ldots . v'$. Wenn nun die Mittelpunkte $C_1, C_2, .. C'$ zwar nicht genau auf einer Geraden liegen, aber von einer gewissen Geraden y nur verschwindend kleine Abstände haben, so werden die in I, 1 und 2 gemachten Voraussetzungen, welche das Auftreten der Collineation zur Folge hatten, gleichzeitig für alle auf einander folgenden Brechungen erfüllt sein, wenn sie es für die erste Brechung sind. In Folge dessen haben wir eine Reihe von räumlichen Systemen $M, M_1, M_2 \ldots . . M'$, von denen jedes zum folgenden in der Beziehung der Centralcollineation steht. Zwei nicht auf einander folgende Systeme, wie namentlich das erste System M und das letzte M', sind also auch zu einander collinear, aber im Allgemeinen nicht in centrischer Lage. Wenn wir nun als Collineationsebenen $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 .. \Sigma'$ für je zwei auf einander folgende Systeme diejenigen Tangentialebenen der brechenden Kugelflächen nehmen, welche alle zu jener Geraden y normal sind, was offenbar den Voraussetzungen nicht widerspricht, so ist die Collineation zwischen zwei nicht auf einander folgenden Systemen, wie M und M', von folgender Art: die beiden

Systeme M und M' haben die Punktreihe auf der unendlich fernen Geraden u der Normalebenen zu y entsprechend gemein, denn in dieser unendlich fernen Geraden schneiden sich alle Collineationsebenen $\Sigma_1, .. \Sigma'$. Wenn aber zwei collineare Systeme eine Punktreihe u entsprechend gemein haben, so müssen sie auch ein Ebenenbüschel x entsprechend gemein haben. Denn zwei Ebenen A, B von M, die durch u gehen, entsprechen zwei Ebenen A′, B′ von M', die auch durch u gehen, und weil jeder Punkt von u sich selbst entspricht, so ist die Collineation der ebenen Systeme auf A und A′, sowie auf B und B′ eine centrische. Die Gerade x, welche das zu AA′ gehörige Collineationscentrum mit dem zu BB′ gehörigen verbindet, ist dann offenbar sich selbst entsprechend in M und M', weil sie einen Punkt von A und einen von B enthält, sowie ihre entsprechenden Punkte auf A′ und B′. Es entspricht aber jede Ebene durch x sich selbst, weil ihr Schnittpunkt mit u sich selbst entspricht.

Es gibt also, auch wenn das System nicht genau centrirt ist, immer einen und nur einen Strahl x des ersten Systems M, welcher mit seinem entsprechenden des letzten Systems M' zusammenfällt (Cardinallinie).

2. Wenn die Cardinallinie x gegeben ist, so genügt zur Bestimmung der collinearen Beziehung zwischen M und M' die Angabe eines Paares von entsprechenden Strahlen l, l' der beiden Systeme, wenn diese Strahlen zu x windschief sind. Da die unendlich ferne Gerade u sich selbst entspricht, so entspricht einer Normalebene A zu y wieder eine solche Normalebene A′ und die beiden Ebenen sind centrisch collinear (ähnlich) zu einander in Bezug auf einen Punkt A von x als Collineationscentrum. Folglich erhält man zu einer Normalebene A die entsprechende A′ und

das zugehörige Centrum A, indem man vom Schnittpunkt $\overline{\mathrm{A}l}$ aus die Transversale zu l' und x zieht. Ihre Schnittpunkte mit l' und x bestimmen A′ und A. Zu irgend einem Punkt $\boldsymbol{P}$, der nicht auf l oder x liegt, wird der entsprechende P' gefunden, indem man durch $\boldsymbol{P}$ die Normalebene zu y legt, dazu die entsprechende Ebene und das zugehörige Centrum sucht und von letzterem den Strahl nach $\boldsymbol{P}$ zieht. Aus der angegebenen Construction von A zu A oder A′ mit Hülfe der Transversalen zu l, l', x folgt, dass die Reihe der Punkte A.... auf x projectivisch ist zu dem Büschel der zu y normalen Ebenen A.... oder A′...- Daraus folgt weiter, dass es immer ein und nur ein Ebenenpaar H, H′ gibt, für welches das zugehörige Centrum im Unendlichen liegt, so dass die Systeme auf H und H′ congruent sind (Hauptebenen). $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{H}'$ seien die Schnittpunkte von H und H′ mit x (Hauptpunkte). Man erhält diese Ebenen, indem man durch l und l' diejenige Transversale zieht, welche zu x parallel ist.

3. Wenn man jetzt das System $\boldsymbol{M}'$ so weit parallel zu x verschiebt, bis $\boldsymbol{H}'$ mit $\boldsymbol{H}$ zusammenfällt, so ist das System $\boldsymbol{M}$ zu der Verschiebung $\boldsymbol{M}^*$ des Systems $\boldsymbol{M}'$ centrisch collinear, weil die beiden Systeme die Ebene H Punkt für Punkt entsprechend gemein haben (Collineationsebene). Es existirt dann also ein Collineationscentrum $\boldsymbol{K}$ für die beiden Systeme $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}^*$, das selbstverständlich auf x liegt, weil x sich selbst entspricht.*) Jeder Strahl durch $\boldsymbol{K}$ entspricht sich selbst in den beiden Systemen $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{M}^*$. Verschiebt man nun das System $\boldsymbol{M}^*$ wieder zurück in die Lage $\boldsymbol{M}'$, so kommt der mit $\boldsymbol{K}$ zusammenfallende Punkt von $\boldsymbol{M}^*$ in eine Lage $\boldsymbol{K}'$, so dass

*) Reye, l. c. pag. 24.

der Abstand der beiden einander entsprechenden Punkte K, K' gleich gross ist wie der Abstand HH' der beiden Hauptpunkte oder dass die Strecken HK' und $H'K$ denselben Mittelpunkt O haben. Geht ein Strahl im System M durch K, so ist sein entsprechender zu ihm parallel und geht durch K' (Knotenpunkte).

4. Jedes der beiden Systeme M, M' hat eine Gegenebene, F, G′, normal zu y, entsprechend der unendlich fernen Ebene des andern Systems, und da für die perspectivischen Systeme M, M^* die Gegenebenen symmetrisch liegen müssen zu K und H (I, 6), so müssen die Gegenebenen F, G′ von M, M' symmetrisch liegen zu H, K' (Brennebenen). Sind F, G' die Schnittpunkte von F, G′ mit x (Brennpunkte), so hat die Strecke FG' denselben Mittelpunkt O wie die Strecken HK' und $H'K$. Unter Hauptbrennweiten versteht man die beiden Strecken $HF = f$, $H'G' = g'$.

5. Endlich kann man nach denjenigen Normalebenen zu y fragen, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Für ein solches Ebenenpaar liegt das zugehörige Centrum im Schnittpunkt der beiden zusammenfallenden Ebenen mit x. Diese Ebenen sind die Doppelebenen S, T der beiden projectivischen Büschel der Normalebene zu y und sind offenbar durch diejenigen beiden Transversalen zu l, l', x bestimmt, welche zu y senkrecht sind (symptotische Ebenen)*. Ihre Schnittpunkte mit x seien S, T. Diese sind die Doppelpunkte der beiden projectivischen Reihen auf x und liegen folglich zu den Gegenpunkten F und G' symmetrisch, so dass also die vier Strecken HK', $H'K$, FG' und ST denselben Mittelpunkt O haben.

*) Listing, Pogg. Ann. Bd. 29.

6. Es ist aber zu bemerken, dass, während die Hauptpunkte, Knotenpunkte und Brennpunkte immer reell sind, die symptotischen Punkte imaginär werden können, da ihre Construction (Doppelpunkte zweier projectivischen Reihen auf x) eine Aufgabe zweiten Grades ist. Diese beiden Reihen auf x sind offenbar gleichlaufend, weil die Ebenenbüschel A . . . A′. . es sind, zu denen sie perspectivisch liegen (das Ebenenbüschel A . . . ist gleichlaufend mit A_1 . . ., dieses mit A_2 . . . u. s. w.). In Folge dessen müssen S und T, wenn sie reell sind, zwischen F und G' liegen (I, 6). Die symptotischen Punkte haben mit den Brennpunkten das gemein, dass sie schon bestimmt sind durch die projectivische Beziehung der beiden Reihen A . . . A' . . . auf x, was bei den Haupt- und Knotenpunkten nicht der Fall ist.

Da die Knotenpunkte, wenn man die Systeme M, M' bis zur perspectivischen Lage verschiebt, zusammenfallen und das Collineationscentrum bilden, so können sie in der ursprünglichen Lage von M, M' dadurch erhalten werden (I, 9) dass man durch l die Ebene legt parallel zu l' und durch l' die Ebene parallel zu l; die erstere Ebene schneidet x im Punkte K, die letztere im Punkte K'. Vermöge der Eigenschaft (II, 3) der Knotenpunkte kann man dieselben (K, K') auffassen als die Aehnlichkeitscentren der Brennebenen (F, G′) und ihrer entsprechenden im Unendlichen (F′, G).

7. Wir wollen für das Weitere annehmen, dass die Systeme genau centrirt seien, so dass die beiden Geraden x und y zusammenfallen (Axe). Dann lassen sich die Fundamental-Punkte und -Ebenen in einer einzigen Figur anschaulich darstellen: Seien gegeben x, l, l'. Diese drei Geraden bestimmen eine Regelschaar ihrer Transversalen. Die Hauptebenen sind bestimmt durch diejenige Erzeugende der Schaar, welche parallel ist zur Leitgeraden x.

Die Brennebenen sind bestimmt durch diejenigen Erzeugenden der Schaar, welche parallel sind zu den beiden andern Leitgeraden l, l'. Die Knotenpunkte sind die Schnittpunkte dieser beiden Erzeugenden mit der Leitgeraden x. Die symptotischen Ebenen oder Punkte sind bestimmt durch diejenigen beiden Erzeugenden der Schaar, welche senkrecht sind zur Leitgeraden x.

8. Um für ein centrirtes System den Satz zu beweisen: «Die Hauptbrennweiten f, g' verhalten sich zu einander wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im letzten und ersten System», betrachten wir zuerst nur die drei Systeme M, M_1, M_2. Die collineare Beziehung der Systeme M und M_2 ist bestimmt durch Angabe eines Strahles l in M (windschief zu x) und seines entsprechenden l_2 in M_2 (II, 2). Der entsprechende Strahl l_1 in M_1 ist dann eine Transversale zu l und l_2. Durch die Punkte $\overline{ll_1}$ und $\overline{l_1 l_2}$ gehen die Ebenen Σ_1, Σ_2, während die Ebenen $\overline{ll_1}$ und $\overline{l_1 l_2}$ die Axe in den Punkten C_1 und C_2 treffen. Durch C_1 geht ein Perpendikel zu x, welches l und l_1 in zwei Punkten v, v_1 schneidet und die Strecken $C_1 v$ und $C_1 v_1$, sowie auch ihre Projectionen (I, 9), stehen zu einander in demselben Verhältniss wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten v, v_1 im ersten und zweiten Medium (Fig. 7). Die Strecken

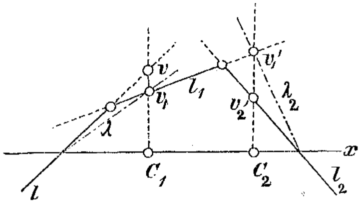

Fig. 7.

$C_2 v_1'$ und $C_2 v_2'$, welche l_1 und l_2 auf dem in C_2 errichteten Perpendikel zu x abschneiden, repräsentiren ebenso das Verhältniss $v_1 : v_2$. Aendert sich nun l_1, während l und l_2 fest bleiben, so ändert sich auch das Verhältniss $v : v_1 : v_2$. In der ursprünglichen Lage von l_1 ziehen wir durch den Punkt v_1 die Gerade λ, welche mit l und x zu derselben Schaar von Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloids gehört, das durch l und x als Leitlinien und durch die Normalebene zu x als Richtungsebene bestimmt ist (I, 10). Wenn dann l_1 sich so ändert, dass es auch fortwährend diese Gerade λ schneidet, so bleibt das Verhältniss $v : v_1$ constant. Ebenso gibt es eine Gerade λ_2 durch v_1', welche von allen denjenigen l_1 geschnitten wird, für welche $v_1 : v_2$ denselben Werth haben soll, wie bei der ursprünglichen Lage von l_1. Nun lässt sich aber leicht beweisen, dass jedes l_1, welches λ schneidet, auch λ_2 trifft. In der That haben die vier Geraden l, λ, λ_2, l_2 hyperbolische Lage, d. h. sie lassen unendlich viele Transversalen zu, weil man drei solcher Transversalen angeben kann, nämlich die ursprüngliche Gerade l_1 und dann noch die beiden Transversalen zu x, l, l_2, welche senkrecht sind zu x (II, 5). Jedes l_1 bestimmt also eine ganze Regelschaar von Transversalen l_1 zu l und l_2, für welche das Verhältniss $v : v_1 : v_2$ dasselbe ist. Diese Regelschaar, die zu einem bestimmten l_1 gehört, wird gefunden, indem man mit Hülfe des Punktes C_1 (C_2) die Gerade λ (λ_2) construirt, welche die dritte Leitlinie der Regelschaar ist.

9. Um nun die verschiedenen Verhältnisse $v : v_1 : v_2$ in Betracht zu ziehen, welche allen Transversalen l_1 von l und l_2 entsprechen, genügt es nach dem Vorigen, alle diejenigen l_1 zu betrachten, welche durch einen beliebigen festen Punkt S von l gehen. Denn irgend ein anderes l_1 würde eine ganze Regelschaar bestimmen, deren Erzeugende, als l_1 genommen, dasselbe Verhältniss $v : v_1 : v_2$ liefern und unter diesen Erzeugenden gibt es eine, die durch den Punkt S geht.

Die zu betrachtenden l_1 bilden also jetzt ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel S und der Ebene $\overline{Sl_2}$, so dass für alle diese l_1 die Ebene $\overline{l_1 l_2}$ und damit der Punkt C_2 fest ist, während die Ebene $\overline{l l_1}$ ein Ebenenbüschel mit der Axe l bildet und der Punkt C_1 eine dazu perspectivische Reihe auf x beschreibt. Wir suchen nun, das Verhältniss $v : v_2$ darzustellen: die Verhältnisse $v : v_1$ und $v_1 : v_2$ sind auf den Perpendikeln in C_1 und C_2 dargestellt (II, 8). Das zweite dieser Perpendikel ist fest sammt dem Punkt v_2' auf demselben. Wenn wir in der Projection (Fig. 8) von dem scheinbaren Schnittpunkt R

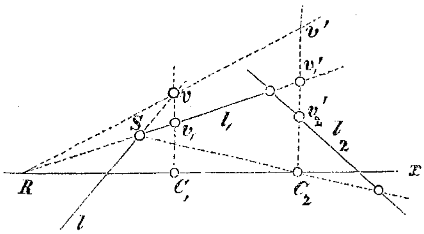

Fig. 8.

von x und l_1 aus das Perpendikel in C_1 auf das Perpendikel in C_2 projiciren, so projicirt sich C_1 in C_2, v_1 in v_1' und v in einem Punkt v', so dass also das Verhältniss der Abschnitte $C_2 v'$ und $C_2 v_2'$ dem Verhältniss $v : v_2$ gleich ist. Nun lässt sich aber leicht beweisen, dass dieser Punkt v' fest bleibt, wenn l_1 jenes Strahlenbüschel beschreibt. Es ist nämlich die Reihe, welche v auf l beschreibt, projectivisch zur Reihe der Punkte R auf x, weil die letztere projectivisch ist zur Reihe der Punkte C_1 auf x. Die beiden Reihen $R\ldots$ und $v\ldots$ sind aber in perspectivischer Lage; denn wenn C_1 und damit auch v in den scheinbaren Schnittpunkt von l und x fällt, also die Ebene $l l_1$ normal zur Zeichnungsebene ist, so fällt auch R mit diesem scheinbaren Schnittpunkt zusammen. Die Geraden Rv bilden also ein Strahlenbüschel. Der Scheitel dieses Büschels muss aber auf dem Perpendikel in C_2 liegen, denn dieses Perpendikel ist selbst ein solcher Strahl Rv; die Gerade SC_2 muss nämlich l_2 wirklich schneiden; nimmt man aber diese

Linie SC_2 als l_1, so fällt R nach C_2 und v auf das Perpendikel in C_2. Damit ist bewiesen, dass der Punkt v' auf dem Perpendikel in C_2 fest ist, und da v_2' auch fest ist, so haben wir den Satz:

Einer bestimmten collinearen Beziehung zwischen dem ersten und dritten System entspricht auch ein bestimmtes Verhältniss $v:v_2$ der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im ersten und dritten Medium, auf welche Weise auch der Uebergang vom ersten zum dritten System mit Hülfe eines zu beiden perspectivischen zweiten Systems gemacht werde.

10. Wir denken uns das System M parallel zu x verschoben, bis es zu M_2 perspectivisch wird (II, 3) und bezeichnen es in dieser verschobenen Lage mit M^*. Dieses System M^* kann nun nach (II, 9) als vermittelndes System genommen werden anstatt M_1; denn es ist sowohl zu M_2 als auch zu M perspectivisch, letzteres allerdings in der ganz speziellen Weise, dass das Collineationscentrum auf der unendlich fernen Collineationsebene liegt, so dass also für den Uebergang von M zu M^* das Verhältniss $v:v_1$ den Werth $=1$ hat. In Folge dessen ist das Verhältniss $v_1:v_2$ für den Uebergang von M^* zu M_2 zugleich das Verhältniss $v:v_2$. Um also dieses Verhältniss $v:v_2$ zu bestimmen, braucht man nur die Systeme M und M_2 bis zur perspectivischen Lage zusammenzuschieben und das Brechungsverhältniss dieser beiden centrisch collinearen Systeme nach (I, 9) zu bestimmen.

11. Es seien jetzt wieder die $n+1$ centrirten Systeme $M, M_1, M_2 \dots M_{n-1}, M'$ gegeben. Alles wird bestimmt sein, wenn ausser der Axe x ein Zug von geraden Linien $l, l_1, l_2 \dots l_{n-1}, l'$ gegeben ist, die diesen Systemen angehören und einander entsprechen, von denen also jede die folgende schneidet, während sie zu x windschief sind.

Der Schnittpunkt zweier auf einander folgenden l bestimmt die zwischenliegende brechende Fläche, die Ebene der beiden l bestimmt das zugehörige Kugelcentrum. Zu den auf einander folgenden Brechungen gehören ferner die Brechungsverhältnisse $v : v_1$, $v_1 : v_2$, $\ldots v_{n-1} : v'$ und durch die collineare Beziehung der Systeme, wie sie durch den Linienzug $l, l_1, \ldots l'$ bestimmt ist, wird für jedes Medium, z. B. M', eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit, v', bestimmt, sobald die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v im ersten Medium gegeben ist. v_1 wird direct bestimmt durch die centrische Collineation zwischen M und M_1. Um v_2 zu bestimmen, verschieben wir M bis zur perspectivischen Lage mit M_2 und bestimmen das Brechungsverhältniss $v : v_2$, unabhängig von v_1. In derselben Weise bestimmt sich aber weiter v_3 unabhängig von v_2, indem wir M noch weiter verschieben bis zur perspectivischen Lage mit M_3 u. s. w. Damit ist bewiesen: «Wenn die collineare Beziehung zwischen dem ersten und letzten System gegeben ist (durch l, l'), so ist damit auch das Verhältniss $v : v'$ der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im ersten und letzten Medium bestimmt, ganz unabhängig von der Anzahl und Beschaffenheit der vermittelnden Systeme; dieses Verhältniss ist dasjenige, welches der perspectivischen (verschobenen) Lage der beiden Systeme M, M' entspricht, also auch gleich dem Verhältniss der beiden Hauptbrennweiten $g' : f$.» (I, 6, II, 4).

12. Wenn also v und v' gegeben sind, d. h. wenn die äussern Medien von bestimmter physikalischer Beschaffenheit sein sollen, so kann die geometrische (collineare) Beziehung zwischen Object und Bild nicht mehr jede beliebige sein; die Strahlen l, l', durch welche diese Beziehung vollkommen bestimmt ist (II, 2), müssen so liegen, dass beim Zusammenschieben eine centrische Collineation ent-

steht mit dem Verhältniss $v : v'$. Wir construiren zu l die Gerade λ nach (I, 10), welche dem Verhältniss $v : v'$ entspricht. Dann erhalten wir alle möglichen l', indem wir alle möglichen Transversalen zu l und λ ziehen und dieselben um beliebige Strecken parallel zu x verschieben. Durch jeden beliebigen Zug von geraden Linien $l_1, l_2 \ldots$, welcher l mit l' verbindet, ist dann eine Art des Ueberganges von M zu M' oder eine Combination von brechenden Flächen zwischen bestimmten Medien dargestellt (II, 11), für welche M' das Bild von M ist.

Wenn die äussern Medien gleich sind, $v = v'$, so sind auch die beiden Hauptbrennweiten einander gleich (II, 11). Die zusammengeschobenen Systeme repräsentiren eine Centralcollineation, in welcher das Centrum auf der Collineationsebene liegt, (Γ mit Σ zusammenfällt, weil das Aehnlichkeitsverhältniss auf $\Gamma = 1$ sein soll), während die Gegenebenen sich zu beiden Seiten von derselben in gleichen Abständen befinden. Die Bedingung, welcher l, l' genügen müssen, besteht also in Folgendem: wenn man l' parallel zu x verschiebt, bis es l schneidet, so muss das von diesem Schnittpunkt auf x gefällte Perpendikel mit l und dem verschobenen l' in derselben Ebene liegen. — Der Knotenpunkt K (K') liegt auf der Hauptebene H (H').

13. Vergrösserung. Wir betrachten zunächst wieder den allgemeinen Fall. Ist das Object eine ebene Figur in einer Normalebene A zu x, so liegt das Bild ebenfalls in einer solchen Normalebene A' und Object und Bild sind ähnlich und ähnlich gelegen in Bezug auf ein Centrum C auf x. Seien P und P' ein Paar entsprechender Punkte von A und A', die mit C in einer Geraden liegen müssen, so stellt das Verhältniss $CP' : CP$ die lineare Vergrösserung für das Ebenenpaar AA' dar, d. h. das constante

Verhältniss einer Strecke in A′ zu der entsprechenden in A. Wie dieses Verhältniss sich ändert, übersieht man deutlich, wenn man sich die collineare Beziehung wieder durch die beiden Strahlen l, l' bestimmt denkt. Die Verbindungslinien PP' der entsprechenden Punktepaare dieser beiden Geraden bilden dann eine Regelschaar mit x als dritter Leitgeraden (II, 2); ihre Schnittpunkte mit x sind die Punkte C. Nun projiciren wir diese Regelschaar orthogonal auf eine Normalebene zu x, wodurch die Verhältnisse nicht geändert werden; da aber die Regelschaar sich als Strahlbüschel projicirt, so sind die Vergrösserungen dargestellt durch die Verhältnisse der Abschnitte, welche die Projectionen von l' und l auf den Strahlen dieses Büschels bestimmen. Man übersieht so deutlich, dass diese Vergrösserung alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft und jeden Werth nur einmal annimmt.

Seien A, A' zwei entsprechende Punkte von x, a, a' zwei durch sie gehende einander entsprechende Strahlen. Dann ist das Verhältniss $tg(xa') : tg(xa)$, für welches man wegen der Kleinheit der Winkel das Verhältniss der Winkel selbst nehmen kann (Winkelvergrösserung), constant für alle Strahlenpaare der Bündel A, A'. Denn wenn man die beiden Systeme M, M' bis zur perspectivischen Lage verschiebt, so schneiden sich die Strahlenpaare von A und A' auf der Collineationsebene Σ und es ist $tg(xa') : tg(xa) = SA : SA'$, wo S der Schnittpunkt von Σ mit x ist. Denken wir uns durch A, A' die Normalebenen A, A′ zu x und nennen wir das Collineationscentrum C, so drückt das Verhältniss $CA' : CA$ die lineare Vergrösserung für das Ebenenpaar AA′ aus.

In dem speziellen Fall, wo die äussern Medien identisch sind, fallen C und S zusammen (II, 12), so dass für irgend ein Punktepaar A, A' auf x die lineare Vergrösserung der reciproke Werth der Winkelvergrösserung ist.

Ist noch spezieller das System ein teleskopisches, d. h. entsprechen einander die unendlich fernen Ebenen von M und M', so ist die lineare und damit auch die Winkelvergrösserung constant für alle Punktepaare. Denn den Punkten von M, welche auf einem Parallelstrahl zu x liegen, entsprechen wieder die Punkte eines solchen Parallelstrahls in M', da der unendlich ferne Punkt von x sich selbst entspricht.

Von der Beziehung, welche bei einem teleskopischen Linsensystem zwischen M und M' besteht, lässt sich leicht beweisen, dass sie durch Angabe der Axe x und eines Paares entsprechender Punkte PP' bestimmt ist, während im allgemeinen Fall ein Paar entsprechender Strahlen erforderlich war. Zu irgend einem Strahl l durch P lässt sich dann l' durch P' construiren mit Hülfe von (II, 9) und der Bemerkung am Schlusse von (II, 12).

Das Polarlicht.

Von

H. Fritz.

„Du, Nordlichtkrone, du hellst die Nacht
Der nord'schen Zone mit Rosenpracht,
Umströmst mit Flüssen von Gold den Pol!
Dich soll ich missen?"

klagt Frithjof (in Tegnér's Gedicht) bei seinem Abschiede vom Nordlande. Wir Bewohner niederer Breiten haben ebenfalls mit dem grossen Nordlichte vom 4. Februar 1872 für eine Reihe von Jahren von den grossartigen und häufigen