Ueber die

Zerlegung echt gebrochener Functionen.

Von

W. Denzler.

Wenn man die sonst viel Vortreffliches bietenden neuesten Werke von Bertrand, Schlœmilch, Dienger etc. über Differential- und Integral-Rechnung in Beziehung auf die Zerlegung von echt gebrochenen rationalen algebraischen Functionen in Partialbrüche zu Rathe zieht, so wird man sie bald mit dem Gefühle entschiedener Unbefriedigung weglegen; da man sogar Anweisungen finden wird, deren Befolgung zu ganz verwerflichen Resultaten führen. Wendet man z. B. das in Schlœmilch's Comp. der höh. Math. I. Band, pag. 295, 3. Aufl. gelehrte Verfahren auf $\frac{-x^2-5x+23}{(x^2-4x+13)^2}$ an, setzt also:

$$\frac{-x^2-5x+23}{(x^2-4x+13)^2}=\frac{A}{(x-2-3i)^2}+\frac{B}{(x-2-3i)}+\frac{C}{x-2+3i)^2}+\frac{D}{x-2+3i}$$

so findet man $B=0$, $D=0$, $A=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i$, $C=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i$,

daher $\frac{A}{(x-2-3i)^2}+\frac{C}{x-2+3i)^2}=\frac{-x^2-5x+23}{(x-4x+13)^2}$ und man ist somit am Ende wieder genau da, wo man anfing.

Das angeführte Werk gibt also, wie leicht einzusehen, in unzählig vielen Fällen keine Auflösung der Aufg. über die Zerlegung in Partialbrüche, und lehrt daher auch nur unvollständig die Integration von rationalen algebraischen Functionen, da die beständig festgehaltene Form der Zerlegung von $\frac{f(x)}{F(x)}$ auf pag. 286 keineswegs immer eine Zerlegung in reelle Partialbrüche ermöglicht.

In Dienger's Diff. und Integr. I. Bd. pag. 119, 2. Aufl. wird derselbe vorhin besprochene Fehler begangen; jedoch gibt dieses Werk die Euler'sche Auflösung, die zwar alle Fälle umfasst, aber so lange keinen Anspruch auf Wissenschaftlichkeit machen kann, bis der Beweis geleistet ist, dass die gegebene Function sich immer in die Euler'sche Form legen lässt.

Bei so bewandten Umständen wurde ich besonders auch durch meine Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung gezwungen, selbst etwas Besseres zu suchen. Eine auch praktisch befriedigende Auflösung wollte mir lange nicht gelingen, endlich gelangte ich am 11. Febr. 1871 zu einer Auflösung, deren Mittheilung ich mir in nachfolgenden Paragraphen erlaube, da sie ganz allgemein gültig ist, und weit weniger Zeit fordert, als das Euler'sche Verfahren, das bei wiederholt vorkommenden quadratischen Factoren im Divisor der gegebenen Function das einzige Mittel bisanhin war, dessen man sich mit völliger Sicherheit bedienen konnte.

---

*) Der Beweis, den Dienger für die Richtigkeit der Euler'schen Form erst in der 3. Auflage seines Werkes über Diff. und Int. gibt, ist eher geeignet, den Zweifel in diese Richtigkeit zu verstärken für den Fall, da quadratische Factoren im Divisor der gegebenen Function wiederholt vorkommen, weil in diesem Falle die dem Beweis zu Grunde liegende Form für $\frac{f(x)}{F(x)}$ pag. 156, unter II, im Allgemeinen unzulässig ist.

§ 1. Erklärung.

Partialbrüche nenne ich Functionen einer Variablen x von der Form

$$\frac{\alpha}{\beta\,(x-b)^{m}} \text{ und } \frac{Ax+B}{C[(x-p)^2+q^2]^{m}}$$

wo α, b, A, B, p bestimmte reelle Zahlen, incl. 0, bezeichnen, wo ferner β, C, q zwar auch bestimmte reelle Zahlen, aber alle verschieden von 0, bedeuten, wo endlich m pos. ganz $\geqq I$ ist.

§ 2. Aufgabe.

Es ist gegeben die echt gebr. rat. alg. Function von x, nämlich:

$$\frac{\varphi\,(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{u}\,\psi\,(x)}$$

die nicht ein Partialbruch ist, und bei der

1. $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ganze rat. alg. Functionen der Variablen x, mit durchgehends reellen Coefficienten, von denen jedoch Eine auch die Bedeutung einer von 0 verschiedenen reellen Constanten haben kann;
2. $\psi(x)$ für $x=\alpha+\beta i$ nicht verschwindet;
3. α und β reelle Zahlen bezeichnen, von denen jedoch β nicht 0 ist;
4. u eine pos. ganze Zahl $\geqq 1$ bedeutet.

Man verlangt die Verwandlung der gegebenen Function in eine Summe, deren erster Summand ein Partialbruch mit dem Divisor $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{u}$ und deren zweiter Summand entweder 0 ist, oder dann eine echt gebrochene rationale algebraische Function von x mit einem Divisor $=$ $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{u-1}\,\psi(x)$ ist.

Auflösung.

Man hat offenbar folgende identische Gleichung:

$$\frac{\varphi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^u\,\psi(x)} = \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^u} +$$
$$\frac{[(\varphi x)-(Mx+N)\psi(x)]:[x-\alpha)^2+\beta^2]}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{u-1}\,\psi(x)} \qquad 1)$$

I. Wir zeigen nun vorerst, dass es immer bestimmte reelle Zahlwerthe von M und N gibt, für welche $[\varphi(x) - (Mx+N)\,\psi(x)]$ durch $[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ ohne Rest theilbar wird.

Da nach der Voraussetzung $\psi(\alpha+\beta i)$ nicht 0, so lässt sich gewiss $\frac{\varphi(\alpha+\beta i)}{\psi(\alpha+\beta i}$ in eine Complexe $P+Qi$ verwandeln, wo P und Q reelle leicht zu bestimmende Zahlen sind. Suchen wir nun die Werthe von M und N, für welche die Gleichung $M(\alpha+\beta \mathrm{i})+N=P+Qi$, also auch die Gleichung $\varphi(\alpha+\beta i) - [M(\alpha+\beta i)+N]$ $\psi(\alpha+\beta i) = 0$ identisch wird, so finden wir $M=\frac{Q}{\beta}$ und $N=P-\frac{\alpha Q}{\beta}$, wo β nur nach der Voraussetzung nicht 0 ist. Bei diesen Werthen von M und N wird also die ganze Function $[\varphi(x) - (Mx+N)\,\psi(x)]$ mit durchgehends reellen Coefficienten sicher verschwinden für $x=\alpha+\beta i$, mithin auch für $x=\alpha-\beta i$, und es muss daher, da, wegen $\beta \gtrless 0$, $\alpha+\beta i$ und $\alpha-\beta i$ ungleich sind, jene ganze Function durch $[x-(\alpha+\beta i,]$ $[x-(a-\beta i)]$ oder $[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ bei den erwähnten Werthen von M und N ohne Rest theilbar sein.

II. Dass es nicht ein zweites Paar Werthe von M und N gibt, für welche $[\varphi(x) - (Mx+N)\;\psi(x)]$ durch $(x-\alpha)^2+\beta^2$ ohne Rest theilbar wird, lässt sich leicht auf folgende Weise zeigen: Bezeichnen wir der Kürze wegen die gefundenen Zahlenwerthe $\frac{Q}{\beta}$ und $P - \frac{\alpha Q}{\beta}$ von M und N mit m und n und nehmen wir an, es existire noch ein zweites Paar, nämlich $m + m_{,}$ und $n + n_{,}$ von M und N, so müsste offenbar folgende identische Gleichung bestehen:

$$\varphi(x) - [(m + m_{,})\, x + n + n_{,}]\, \psi(x) = \\ = K[(x - \alpha)^2 + \beta^2] \qquad 2)$$

wo K eine constante, inclusive 0, oder eine ganze Function von x bezeichnet. Setzen wir in dieser identischen Gleichung $\alpha + \beta i$ für x und beachten, dass nach dem bewiesenen $\varphi(\alpha + \beta i) - [m(\alpha + \beta i) + n]\, \psi(\alpha + \beta i)$ mit Null identisch und nach dieser Setzung auch der zweite Theil der Gleichung (2) mit Null identisch wird, so wird folgende Identität klar:

$$[-m_{,}(\alpha + \beta i) - n_{,}]\, \psi(\alpha + \beta i) = 0.$$

Da nun aber nach der Voraussetzung $\psi(\alpha + \beta i)$ nicht 0, so müsste $-m_{,}\alpha - n_{,} = 0$ und zugleich $-m_{,}\beta = 0$ sein, woraus nun leicht folgt, dass kein zweites Paar ausser m und n existirt.

III. Dividiren wir nun die ganze Function $[\varphi(x) - (Mx + N)\, \psi(x)]$ durch $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]$ nach der bekannten Regel der Algebra, bis wir zu einem Reste gelangen, der vom 1. Grade in Beziehung auf x ist, so wird dieser Rest von der Form $[Rx + S]$ sein, wo R und S unabhängig von x im Allgemeinen von der Form $a + bM + cN$ sein werden, wobei a, b, c bestimmte reelle Zahlen bezeichnen. Da nun dieser Rest $Rx + S$ nach der Setzung von m und n für M und N in Folge des Bewiesenen mit 0 identisch wird, und zwar für jeden Werth von x, so muss nach dieser Setzung R und zugleich S mit 0 identisch sein; denn wäre z. B. R nicht 0, so würde für jeden Werth von x, der $\gtrless -\frac{S}{R}$, die Summe $Rx + S$ nicht 0 sein. Wir erhalten daher die Werthe m und n einfacher dadurch, dass wir die 2 Gleichungen $R = 0$ und $S = 0$ nach M und N auflösen. Die so erhaltenen Werthe von M und N müssen dann nothwendig mit m und n übereinstimmen. Setzen wir m und n für M und N in das gefundene Ergebniss der erwähnten Division, welches offenbar eine ganze Function von x sein wird, und bezeichnen das Resultat dieser Setzung mit F, so hat man für die Gleichung 1.) folgende Identität:

$$\frac{\varphi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^u\psi(x)} = \frac{mx+n}{[(x-x)^2+\beta^2]^u} + \\ + \frac{F}{[(x-x)^2+\beta^2]^{u-1}\psi(x)} \qquad 1_0)$$

wo wir der Kürze wegen den Divisor $[x - \alpha)^2 + \beta^2]^{u-1}$ $\psi(x) = D$ setzen wollen.

IV. Dass durch diese Gleichung unsere Aufgabe vollständig gelöst ist, wird sofort klar, wenn wir gezeigt haben,

1) Dass D nicht eine Constante sein kann,

2) Dass, wenn D vom ersten Grade, F eine Constante $\gtreqless 0$ sein muss,

3) Dass, wenn D vom q^{ten} Grade, wo $q \geqq 2$, F eine Constante $\gtreqless 0$ oder dann eine ganze Function von x höchstens vom $(q - 1)$. Grade sein muss.

Ad 1) Wäre D eine Constante, so müsste $u = 1$ und $\psi(x)$ eine Constante, mithin $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^u$ $\psi(x)$ vom zweiten Grade sein. Da nun der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen in 1_0) echt gebrochen, so müsste $\varphi(x)$ entweder eine Constante oder eine ganze Function vom ersten Grade sein; aber in beiden Fällen wäre dann entgegen der Voraussetzung in der Aufgabe eben jener Ausdruck ein Partialbruch.

Ad 2) Wenn D vom ersten Grade wäre, so müsste $u = 1$ und $\psi(x)$ vom ersten Grade, mithin der Divisor im ersten Theil der Gleichung 1_0) vom dritten Grade sein. Da nun der erste Theil in 1_0) echt gebrochen, so könnte $\varphi(x)$ und mithin auch $[\varphi(x) - (m + n)\,\psi(x)]$ höchstens vom zweiten Grade sein, woraus sofort folgt, dass F in diesem Falle nur eine Constante $\gtreqless 0$ sein kann. Ist z. B. der erste Theil in 1_0) $= \frac{x-1}{(x^2+1)(x-1)}$, so fände man $m = 0$, $n = 1$, $F = 0$.

Ad 3) Wenn D vom q. Grade, so ist der Divisor im ersten Theil von 1_0) vom $(q + 2)$. Grade, mithin $\varphi(x)$ höchstens vom $(q + 1)$. Grade, $(mx + n)\,\psi(x)$ ebenfalls höchstens vom $(q + 1)$. Grade. In diesem Falle ist also F gewiss entweder eine Constante $\gtreqless 0$, was sehr wohl sein kann, oder dann eine ganze Function höchstens vom $(q - 1)$. Grade.

V. Da jede der Auflösungen unserer Aufgabe offenbar in der Form der Gleichung 1) gedacht werden kann, so wird, wenn m_0 und n_0 die Werthe von M und N irgend einer Auflösung sind, $\varphi(x) - (m_0 x + n_0)\,\psi(x)$ durch $(x - \alpha)^2 + \beta^2$ ohne Rest theilbar sein. Da es aber nach dem Bewiesenen nur Ein Paar Werthe von M und N

gibt, für welche diese Theilbarkeit eintritt, so wird klar, dass unsere Aufgabe nur eine einzige Auflösung zulässt.

§ 3. Aufgabe.

Es ist gegeben die echt gebrochene rationale algebraische Function von x, nämlich:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^m \psi(x)}$$

die nicht ein Partialbruch ist, und bei der 1) $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ganze rationale algebraische Functionen von x mit durchgehends reellen Coefficienten sind, von denen jedoch Eine auch eine von 0 verschiedene reelle Constante sein kann, 2) $\psi(x)$ nicht 0 wird für $x = a$, 3) a irgend eine bestimmte Zahl incl. 0, 4) m eine positive ganze Zahl $\geqq 1$.

Man verlangt die Verwandlung der gegebenen Function in eine Summe aus 2 Summanden, von welchen der eine ein Partialbruch mit dem Divisor $(x-a)^m$ und der andere entweder 0 oder eine echt gebrochene rationale algebraische Function von x mit dem Divisor $(x-a)^{m-1}$ $\psi(x)$ ist.

Auflösung.

Man hat folgende identische Gleichung:

$$\frac{\varphi(x)}{x-a)^m \psi(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{[\varphi(x) - A\psi(x)]:(x-a)}{(x-a)^{m-1}\psi(x)}$$

Nun dividirt man nach den bekannten Regeln der Algebra $\varphi(x) - A\psi(x)$ durch $x-a$, bis man zu einem Reste gelangt, der x nicht mehr enthält. Den so erhaltenen Rest setzt man $= 0$ und löst die entstandene Gleichung nach A auf.

Bezeichnet nun p den gefundenen Werth von A, und H

das, was man erhält, wenn man in dem Ergebniss der vorgenommenen Division, durchgehends p für A setzt, so gibt folgende identische Gleichung die verlangte Auflösung.

$$\frac{\varphi(x)}{(x)-a)^m \psi(x} = \frac{p}{(x-a)^m} + \frac{H}{(x-a)^{m-1}\psi(x)}$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Auflösung ist dem im § 2 ganz gleich, nur einfacher. Auch findet man ebenso, dass die Aufgabe nur eine einzige Auflösung zulässt. Endlich wird man wie bei der ersten Bestimmung von m und n in § 2 leicht finden, dass auch A oder $p = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$. Bei der Zerlegung echt gebrochener Functionen in Partialbrüche kann man jene erste Bestimmung von m und n, wie auch die eben erwähnte von p oft zur Abkürzung anwenden.

Anmerkung zu § 2 und § 3.

Dass die Euler'sche Form zur Zerlegung in Partialbrüche in allen Fällen zulässig ist und ihre Zähler nicht verschiedener Werthe fähig sind, geht sehr leicht aus dem Umstande hervor, dass jede der beiden Aufgaben in § 2 und § 3 nur eine einzige Auflösung hat.

§ 4. Aufgabe.

Es ist gegeben die echt gebrochene rationale algebraische Function von x, nämlich $\frac{f(x)}{F(x)}$, die nicht ein Partialbruch ist und bei der $f(x)$ und $F(x)$ ganze rationale algebraische Functionen mit durchgehends reellen Coefficienten sind, wobei jedoch $f(x)$ auch eine von 0 verschiedene reelle Constante sein kann. Man verlangt die Verwandlung der gegebenen echt gebrochenen Function in eine Summe aus lauter Partialbrüchen.

Auflösung.

Nachdem man auf bekannte Weise $F(x)$ in ein Product aus dem Coefficienten der höchsten Potenz von x bei $F(x)$ in ein Product aus Potenzen von verschiedenen (reellen) binomischen und verschiedenen trinomischen Factoren verwandelt hat, worunter dann natürlich auch erste Potenzen sein können, setze man $F(x)$ gleich dem Product aus irgend einer dieser Potenzen (P^r) in das Product aller übrigen Factoren, das $\psi(x)$ sei. Nun verwandle man die gegebene Function $\frac{f(x)}{P^r\psi(x)}$ nach III. in der Auflösung zu § 2 oder nach der Auflösung zu § 3, jenachdem P ein trinomischer oder binomischer Factor ist, in eine Summe aus einem Partialbruch mit dem Divisor P^r und einer echt gebrochenen Function mit dem Divisor $P^{r-1}\psi(x)$. Ist nun dieser zweite Summand ein Partialbruch, so ist natürlich die Aufgabe gelöst. Im entgegengesetzten Falle verwandle man diesen zweiten Summanden genau so, wie man $\frac{f(x)}{F(x)}$ verwandelt hat, indem man wieder entweder § 2 oder § 3 anwendet. Man erhält auf diese Weise eine zweite Gleichung deren zweiter Theil eine Summe aus einem Partialbruch und einer echt gebrochenen Function ist, deren Divisor wieder wenigstens um einen Grad niedriger ist, als der Divisor im ersten Theil dieser zweiten Gleichung. Wenn nun der zweite Summand dieser zweiten Gleichung nicht ein Partialbruch ist, so verwandle man ihn wieder nach § 2 oder § 3 in eine Summe aus zwei Summanden. So fahre man fort, bis man endlich zu einer Gleichung gelangt, deren zweiter Theil eine Summe aus zwei Partialbrüchen ist. Es ist alsdann, wie sehr leicht einzusehen, die gegebene Function $\frac{f(x)}{F(x)}$ = der Summe aus sämmtlichen ersten Summanden der zweiten Theile der gefundenen Gleichungen und dem zweiten Summanden im zweiten Theil der letzten Gleichung, mithin für $\frac{f(x)}{F(x)}$ eine Summe aus lauter Partialbrüchen gefunden worden.

Erstes Exempel.

$$\frac{-x^2-5x+23}{(x^2-4x+13)^2} = \frac{Mx+N}{(x^2-4x+13)^2} + \frac{\varphi(x)}{x^2-4x+13}$$

Die Berechnung von M, N, $\varphi(x)$ ist folgende:

$$\begin{array}{l|l} x^2-4x+13: & -x^2-5x+23-(Mx+N) \\ \hline -1=\varphi(x) & \underline{-x^2+4x-13} \\ & (-9-M)x+36-N=0 \left\{\begin{array}{l} N=36 \\ M=-9 \end{array}\right\} \end{array}$$

Nach der Euler'schen Methode hat man bei Beispielen mit einem solchen Divisor, wie $(x^2-4x+13)^2$ ist, $Px+Q$ für $\varphi(x)$ zu setzen und zuletzt 4 Gleichungen mit den Unbekannten M, N, P, Q aufzulösen.

Zweites Exempel.

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{Mx+N}{(x^2+1)^2} + \frac{\varphi(x)}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Px+Q}{x^2+1} + \frac{\psi(x)}{x-1}$$

Die Berechnung von M, N, P, Q, $\psi(x)$ ist folgende:

$$\begin{array}{l|l} x^2+1: & x+1-(Mx+N)(x-1) \\ \hline -M & \underline{\quad -Mx^2-M} \\ \varphi(x)=1 & (1-N+M)x+1+N+M=0 \left\{\begin{array}{l} M=-1 \\ N=0 \end{array}\right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2+1: & 1-(Px+Q)(x-1) \\ \hline -P & \underline{\quad -Px^2-P} \\ \psi(x)=\frac{1}{2} & (P-Q)x+1+P+Q=0 \left\{\begin{array}{l} P=-\frac{1}{2} \\ Q=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \end{array}$$

Drittes Exempel.

$$\frac{8x^4-3x^3+5}{(x^2+2x+3)^3x}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^3}+\frac{\varphi(x)}{(x^2+2x+3)^2x}$$

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+2x+3)^2x}=\frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{\psi(x)}{(x^2+2x+3)x}$$

$$\frac{\psi(x)}{(x^2+2x+3)x}=\frac{Ex+F}{x^2+2x+3}+\frac{\chi(x)}{x}$$

Berechnung von A, B, C, D, E, F und $\chi(x)$:

$$\begin{array}{ll}
x^2+2x+3: & 8x^3-3x^3+5-(Ax+B)x \\
\hline
8x^2-19x+14-A & \underline{8x^3+16x^4+24x^2} \\
 & -19x^3-(24+A)x^2-Bx+5 \\
8x^2-19x+\frac{5}{3}=\varphi(x) & \underline{-19x^3-38x^2-57x} \\
 & +(14-A)x^2+(57-B)x+5 \\
 & \underline{+(14-A)x^2+(28-2A)x+3(14-A)} \\
 & (29+2A-B)x+(3A-37)=0 \left\{\begin{array}{l} A=\frac{37}{3} \\ B=\frac{161}{3}\end{array}\right\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
x^2+2x+3: & 8x^2-19x+\frac{5}{3}-(Cx+D)x \\
\hline
8-C & \underline{8x^2+(16-2C)x+24-3C-Cx^2} \\
8-\frac{67}{9}=\psi(x) & (-35-D+2C)x+3C-\frac{67}{3}=0 \left\{\begin{array}{l} C=\frac{67}{9} \\ D=-\frac{181}{9}\end{array}\right\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
x^2+2x+3: & \frac{5}{9}-(Ex+F)x \\
\hline
-E & \underline{-Ex^2-2Ex-3E} \\
\frac{5}{27}=\chi(x) & (2E-F)x+3E+\frac{5}{9}=0 \left\{\begin{array}{l} E=-\frac{5}{27} \\ F=-\frac{10}{27}\end{array}\right\}
\end{array}$$

Nach dem Euler'schen Verfahren (conf. Dienger's Diff. u. Integ. I. Bd. pag. 116. 2. Aufl.) hat man zur Berechnung dieses Exempels zuletzt 7 Gleichungen mit 7 Unbekannten aufzulösen, wobei zur blossen Herstellung dieser 7 Gleichungen wenigstens die Zeit erforderlich ist, welche die vollständige Auflösung dieser Aufgabe nach unserm Verfahren fordert. Ueberdies gestattet dieses Verfahren eine weit leichtere Auffindung allfälliger Rechnungsfehler.
