Die Universität von Christiania besitzt dieselben alle von Sars selbst gesammelt und bestimmt. Es ist indess hierüber anderweitig wiederholt genau berichtet wo den.

(Fortsetzung folgt.)

Ueber ein Problem der Wärmetheorie.

Von

Dr. Heinrich Weber.

Bei gewissen Versuchen des Herrn Prof. Hermann handelte es sich darum, die Temperatur zu kennen, die sich an der Trennungsfläche zweier Metalle bald nach der Berührung einstellt, wenn dieselben bei der Berührung verschiedene Temperaturen haben. Eine an mich gerichtete darauf bezügliche Frage veranlasste mich zu einer kleinen theoretischen Untersuchung, deren Ergebniss ich hier mitzutheilen gedenke.

Die beiden Metalle M, M_1 mögen in einer unbegrenzten Ebene sich berühren, übrigens allseits unbegrenzt sein und beim Eintritt der Berührung respective die constanten Temperaturen c und c_1 haben. Es seien ferner

$\varkappa$, $\varkappa_1$ die Wärmeleitungsfähigkeiten,
s, s_1 die specifischen Wärmen,
d, d_1 die Dichtigkeiten (specifischen Gewichte)

der beiden Metalle. Man lege die Axe der Abscissen, x, senkrecht gegen die Trennungsfläche, so dass in dieser Fläche $x = o$ und in $M_1 x$ positiv ist.

Es müssen dann die Temperaturen u und u_1, die sich in den beiden Metallen im Verlauf der Zeit herstellen, als Functionen der Zeit t und der Abscisse x bestimmt werden, wobei jedoch u nur für negative, u_1 nur für positive Werthe von x gefunden zu werden braucht.

Nach den allgemeinen Prinzipien der von Fourier begründeten Theorie der Wärmeleitung hat man folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = a^2 \dfrac{d^2 u}{dx^2} & x < o \\ u = c;\ \text{für}\ t = o,\ x < o \\ \dfrac{du_1}{dt} = a_1^2 \dfrac{d^2 u_1}{dx^2} & x > o \\ u_1 = c_1;\ \text{für}\ t = o,\ x > o \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$a^2 = \frac{\varkappa}{s d},\quad a_1^2 = \frac{\varkappa_1}{s_1 d_1}.$$

Ausserdem muss u und seine Differentialquotienten für negative x, u_1 und seine Differentialquotienten für positive x endlich und stetig sein.

Dazu muss noch eine Bedingung treten, die an der Trennungsfläche gilt, und diese hängt von den physikalischen Voraussetzungen ab, die nur durch Versuche geprüft werden können. Das Endergebniss ist indessen, soweit es von praktischer Bedeutung ist, wie wir sehen werden, von diesen Annahmen nicht abhängig.

Nimmt man zunächst eine so innige Berührung zwischen den beiden Metallen an, dass durch die Trennungsfläche eine Wärmeleitung von derselben Art stattfindet wie in den einzelnen Metallen, so kann eine Unstetigkeit der Temperatur, auch wenn sie anfänglich bestand, sich nicht erhalten, und wenn man noch die Bedingung dafür aufsucht, dass die Temperatur an der Trennungsfläche nicht unendlich wächst, so erhält man die für $x = o$ und jedes positive t gültigen Gleichungen:

$$\text{II.}\qquad u - u_1 = o;\quad \varkappa \frac{du}{dx} - \varkappa_1 \frac{du_1}{dx} = o.$$

Diese Bedingungen genügen um die Functionen u, u_1 zu bestimmen.

Laplace hat für die Differentialgleichungen in I. allgemeine Integrale mit willkürlichen Functionen aufgestellt. Es genügen darnach den Differentialgleichungen die Functionen:

$$
1) \qquad
\begin{aligned}
u &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} F\left(x + 2a\,\alpha\sqrt{t}\right) d\alpha \\
u_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} F_1\left(x + 2a_1\alpha\sqrt{t}\right) d\alpha,
\end{aligned}
$$

wo noch die willkürlichen Functionen F, F_1 den anderweitigen Bedingungen gemäss bestimmt werden müssen.

Setzt man in 1) zunächst $t = o$, so müssen u und u_1 in c und c_1 übergehen; also:

$$
2) \qquad
\begin{aligned}
c &= \sqrt{\pi} F\,(x) \text{ für negative } x \\
c_1 &= \sqrt{\pi} F_1(x) \text{ für positive } x.
\end{aligned}
$$

Darnach sind die beiden Functionen und zwar $F(x)$ für negative Argument-Werthe, $F_1(x)$ für positive Argument-Werthe bestimmt, und die Bedingungen I. sind dadurch vollständig befriedigt. In 1) kommen aber die Functionen F, F_1 für alle Argument-Werthe vor. Was darin noch willkürlich ist, muss durch die Bedingungen II. bestimmt werden. Da die Bedingungen II. zwei Gleichungen liefern, so setze man, um versuchsweise die einfachste Annahme zu machen:

$$
3) \qquad
\begin{aligned}
c' &= \sqrt{\pi} F\,(x) \text{ für positive } x \\
c_1' &= \sqrt{\pi} F_1(x) \text{ für negative } x,
\end{aligned}
$$

so dass die beiden Constanten c', c_1' aus den Bedingungen II. bestimmt werden. Man erhält alsdann:

4)
$$u = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{c'}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha$$
$$u_1 = \frac{c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{c_1'}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Setzt man darin $x = o$, so folgt:

$$u^0 = \frac{c + c'}{2}$$
$$u_1^0 = \frac{c_1 + c_1'}{2}$$

und wegen der ersten Bedingung II.:

5) $$c + c' = c_1 + c_1'.$$

Dieselben Werthe ergeben sich für u und u_1 wenn man t in's Unendliche wachsen lässt. Daraus ergiebt sich bereits, falls es gelingt, c' und c_1' der zweiten Bedingung II. gemäss zu bestimmen, der Satz:

An der Trennungsfläche stellt sich momentan eine Temperatur her, die sich mit der Zeit nicht mehr verändert und gleich ist dem endlich eintretenden stationären Temperaturzustand in beiden Metallen.

Setzt man nun die Ausdrücke 4) in die zweite Bedingung II. ein, so ergiebt sich:

$$\frac{\varkappa}{a}(c - c') + \frac{\varkappa_1}{a_1}(c_1 - c_1') = o$$

oder für a, a_1 ihre Werthe gesetzt:

6) $$\sqrt{\varkappa s d}\,(c - c') + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}\,(c_1 - c_1') = o,$$

so dass man die beiden Constanten c' und c_1' aus den zwei linearen Gleichungen 5), 6) zu bestimmen hat. Es ergiebt sich:

$$c' = +\frac{\sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}\,(c_1 - c)}{\sqrt{\varkappa s d} + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}} + \frac{\sqrt{\varkappa s d}\,c + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}\,c_1}{\sqrt{\varkappa s d} + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}}$$

$$c_1' = -\frac{\sqrt{\varkappa s d}\,(c_1 - c)}{\sqrt{\varkappa s d} + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}} + \frac{\sqrt{\varkappa s d}\,c + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}\,c_1}{\sqrt{\varkappa s d} + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}}.$$

Daraus erhält man die gesuchte Temperatur an der Trennungsfläche:

$$7) \qquad u^0 = \frac{\sqrt{\varkappa s d}\,c + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}\,c_1}{\sqrt{\varkappa s d} + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}}.$$

Nach den bis jetzt gemachten Annahmen stellt sich diese Temperatur an der Trennungsfläche momentan her und bleibt fortwährend ungeändert. Man kann aber noch eine allgemeinere, vielleicht mehr mit der Natur übereinstimmende Hypothese machen, nach welcher dieselbe Temperatur an der Trennungsfläche streng genommen erst nach unendlich langer Zeit, mit einer gewissen Annäherung aber schon nach Verlauf einer kurzen Zeit sich einstellt. Man erhält nämlich an Stelle der Bedingungen II. andere Grenzbedingungen, wenn man annimmt, der Wärmeaustausch zwischen den beiden Metallen sei, dem Gesetz der Strahlung gemäss, proportional der Temperaturdifferenz der beiden Berührungsflächen. Man kann sich etwa vorstellen, es befinde sich eine sehr dünne nicht leitende Schicht zwischen den beiden Metallen, durch welche hindurch der Wärmeaustausch nur durch Strahlung geschieht, oder auch es finde zwischen den beiden Metallen ein besonderer Uebergangsleitungswiderstand statt, der im Vergleich mit dem Leitungswiderstand in den einzelnen Metallen als unendlich gross anzusehen ist.

Man erhält unter dieser Voraussetzung an Stelle der Bedingungen II. die folgenden:

$$\text{III.}\qquad \begin{aligned} \varkappa\,\frac{du}{dx} + h(u - u_1) &= o \\ \varkappa_1\,\frac{du_1}{dx} + h(u - u_1) &= o \end{aligned} \qquad \text{für } x = o,$$

worin h eine Constante ist, deren Werth von der Natur der beiden Metalle, auch wohl von der Beschaffenheit der Oberflächen, abhängt und nur aus der Erfahrung bestimmt werden kann. Die Bedingungen III. ergeben als Specialfall die Bedingungen II. wenn man h unendlich gross annimmt. Wie oben die Gleichungen 4) so ergiebt sich allgemeiner:

$$8)\qquad \begin{aligned} u &= \frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha + \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} F\,(x + 2a\,\alpha\sqrt{t})\,d\alpha \\ u_1 &= \frac{c_1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha + \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} F_1(x + 2a_1\alpha\sqrt{t})\,d\alpha \end{aligned}$$

und nun muss die Function F für positive, F_1 für negative Argument-Werthe so bestimmt werden, dass die Functionen 8) den Bedingungen III. genügen. Es ist bequem, um später additive Constanten nicht berücksichtigen zu müssen, zu den Functionen F, F_1 unbestimmte Constanten $\frac{c'}{\sqrt{\pi}}, \frac{c_1'}{\sqrt{\pi}}$ hinzuzufügen, wodurch man erhält:

9)
$$u = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{c'}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha + \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} F\,(x + 2a\,\alpha\sqrt{t})\,d\alpha$$

$$u_1 = \frac{c_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{c_1'}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha + \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} F_1(x + 2a_1\alpha\sqrt{t})\,d\alpha.$$

Wenn man diese Ausdrücke in III. substituirt und dann $x = o$ setzt, so folgen die beiden Gleichungen:

10)
$$\left\{\begin{aligned} o &= \varkappa \frac{(c' - c) + \sqrt{\pi} F\,(+o)}{2a\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{2} h(c + c' - c_1 - c_1') + \\ &\quad + \int_o^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha \Big\{\varkappa\, F'(\,2a\,\alpha\sqrt{t}) + h\big(F(2a\alpha\sqrt{t}) - F_1(-2a_1\alpha\sqrt{t})\big)\Big\} \\ o &= \varkappa_1 \frac{(c_1 - c_1') - \sqrt{\pi} F_1(-o)}{2a_1\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{2} h(c + c' - c_1 - c_1') + \\ &\quad + \int_o^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha \Big\{\varkappa_1 F_1'(-2a_1\alpha\sqrt{t}) + h\big(F(2a\alpha\sqrt{t}) - F_1(-2a_1\alpha\sqrt{t})\big)\Big\} \end{aligned}\right.$$

wo, wie gebräuchlich, F' und F_1' die Differentialquotienten der Functionen F und F_1 bedeuten.

Man hat daher die Functionen F und F_1 aus den Differentialgleichungen zu bestimmen:

11)
$$\begin{aligned} &\varkappa\, F'(a\,x) \quad + h\big(F(ax) - F_1(-a_1 x)\big) = o \\ &\varkappa_1 F_1'(-a_1 x) + h\big(F(ax) - F_1(-a_1 x)\big) = o, \end{aligned}$$

ausserdem erhält man für die willkürlichen Constanten die Gleichungen:

$$
\text{12)}\qquad
\begin{aligned}
c + c' &= c_1 + c_1' \\
c - c' &= \sqrt{\pi}\,F(+o) \\
c_1 - c_1' &= \sqrt{\pi}\,F_1(-o).
\end{aligned}
$$

Die Integration der Gleichungen 11) ergiebt:

$$
\text{13)}\qquad
\begin{aligned}
F(x) &= F(o)\; e^{-h\frac{x}{a}\left(\frac{a}{\varkappa}+\frac{a_1}{\varkappa_1}\right)} \\
F_1(-x) &= F_1(-o)\, e^{-h\frac{x}{a_1}\left(\frac{a}{\varkappa}+\frac{a_1}{\varkappa_1}\right)}
\end{aligned}
$$

wenn man zwischen den Constanten $F(o)$ und $F_1(-o)$ die Relation festsetzt:

$$
\text{14)}\qquad \frac{\varkappa}{a}F(o) + \frac{\varkappa_1}{a_1}F_1(-o) = o.
$$

Die Gleichungen 12), 14) reichen aus zur Bestimmung sämmtlicher Constanten. Für die Constanten c', c_1' erhält man zunächst:

$$
\begin{aligned}
c + c' &= c_1 + c_1' \\
\frac{\varkappa}{a}(c - c') + \frac{\varkappa_1}{a_1}(c_1 - c_1') &= o,
\end{aligned}
$$

was für diese Constanten genau dieselben Werthe ergiebt, wie oben. Ferner folgt:

$$
\text{15)}\qquad
\begin{aligned}
F(+o) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}\,(c - c_1)}{\sqrt{\varkappa s d} + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}} \\
F_1(-o) &= \frac{-2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{\varkappa\, s\, d}\,(c - c_1)}{\sqrt{\varkappa s d} + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}}.
\end{aligned}
$$

Damit ist das Problem vollständig gelöst. Setzt man in den beiden Ausdrücken für u und u_1 $x = o$, so erhält man die Temperaturen zu beiden Seiten der Berührungsfläche als Functionen der Zeit:

16)
$$u^0 = \frac{\sqrt{\varkappa s d}\, c + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}\, c_1}{\sqrt{\varkappa s d} + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}\,(c - c_1)}{\sqrt{\varkappa s d} + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}} \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha^2 - 2h\alpha\sqrt{t}\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa s d}} + \frac{1}{\sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}}\right)} d\alpha$$

$$u_1^0 = \frac{\sqrt{\varkappa s d}\, c + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}\, c_1}{\sqrt{\varkappa s d} - \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\varkappa\, s\, d}\,(c - c_1)}{\sqrt{\varkappa s d} + \sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}} \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha^2 - 2h\alpha\sqrt{t}\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa s d}} + \frac{1}{\sqrt{\varkappa_1 s_1 d_1}}\right)} d\alpha.$$

Diese beiden Ausdrücke schliessen sich für $t = o$ stetig an die Werthe c und c_1 an, behalten aber unter einander eine endliche Differenz die mit der Zeit abnimmt, aber erst nach unendlich langer Zeit völlig verschwindet. Es nähern sich dann beide Ausdrücke derjenigen Grenze, welche im vorigen Falle die Temperatur der Berührungsfläche ergab. Diese Grenze wird um so schneller annähernd erreicht sein, je grösser der Werth der Constanten h ist und wenn h unendlich wird, so ist dieselbe momentan erreicht. Ist, was bei der Berührung von Metallen doch wohl angenommen werden kann, h sehr gross [1]), so wird die an der Trennungsfläche vorhandene Unstetigkeit in sehr kurzer Zeit verwischt sein, und die früher gefundene Temperatur der Grenzfläche tritt ein.

---

[1]) Die Constante $\frac{\varkappa s d}{h^2}$ ist eine durch Zeiteinheiten ausgedrückte Grösse; nennen wir dieselbe T, so wird man die Unstetigkeit vernachlässigen dürfen, sobald $\frac{t}{T}$ hinlänglich gross ist. Je kleiner also die Zeit T ist, um so schneller wird dies eintreten.

Zürich, im Mai 1871.