Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren.

Von

H. A. Schwarz.

(Aus einem am 30. Mai gehaltenen Vortrage.)

Die unter dem Namen Dirichlet'sches Princip bekannte Schlussweise, welche in gewissem Sinne als das Fundament des von Riemann entwickelten Zweiges der Theorie der analytischen Funktionen angesehen werden muss, unterliegt, wie jetzt wohl allgemein zugestanden wird, hinsichtlich der Strenge sehr begründeten Einwendungen, deren vollständige Entfernung, soviel ich weiss, den Anstrengungen der Mathematiker bisher nicht gelungen ist.

Durch Fortsetzung einiger Untersuchungen, welche gewisse Arten von Abbildungsaufgaben betreffen, und von denen ein Theil im 70. Band von Borchardt's Journal und in dem das Programm der eidgenössischen polytechnischen Schule für das Wintersemester 1869—70 begleitenden Aufsatz: „Zur Theorie der Abbildung" veröffentlicht ist, bin ich auf ein Beweisverfahren geführt worden, durch welches, wie ich mich überzeugt zu haben glaube, alle Sätze, deren Beweis Riemann in seinen veröffentlichten Abhandlungen mittelst des Dirichlet'schen Princips zu führen gesucht hat, mit Strenge bewiesen werden können.

Die nachfolgende Mittheilung ist im Wesentlichen ein Auszug aus einer die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ betreffenden Abhandlung, welche ich im November vorigen Jahres Hrn. Kronecker und einigen andern mir nahestehenden Mathematikern mitgetheilt habe.

Es handelt sich wesentlich nur darum, den Nachweis der Existenz einer Funktion u zu führen, welche für einen gewissen gegebenen Bereich T der unabhängigen reellen Variablen x und y der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ und ausserdem gewissen vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen genügt.

Der Kürze wegen beschränke ich mich hier auf den Fall, in welchem die Nebenbedingungen nur Grenzbedingungen sind, in welchem also gefordert wird, es solle die Funktion u stets endlich sein und längs der Begrenzung des Bereiches T vorgeschriebene endliche Werthe haben, welche einer oder mehreren stetigen Folgen angehören. Auf diesen Fall kann nämlich durch das in der Folge mitzutheilende Verfahren der allgemeine Fall zurückgeführt werden.

Für die Anwendbarkeit des gedachten Beweisverfahrens ist es keineswegs erforderlich, die Voraussetzung zu machen, dass die Begrenzungslinie von T nur eine endliche Anzahl von Ecken und im Allgemeinen in jedem Punkte einen endlichen bestimmten Krümmungsradius besitze, eine Voraussetzung, welche die HH. Weber und Neumann bei ihren auf dasselbe Ziel gerichteten Untersuchungen gemacht haben. (S. Borchardt's Journal, Band 71, pag. 29, und

Berichte der mathematisch - physischen Classe der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Sitzung vom 21. April 1870.) Es wird nicht einmal die Stetigkeit in der Aenderung der Richtung der Tangente der Begrenzungslinie erfordert; es genügt vielmehr zu wissen, dass die Begrenzungslinie sich in eine endliche Zahl von Stücken theilen lasse, so dass im Innern jedes dieser Stücke die Aenderung der Richtung der Tangente stets in demselben Sinne geschehe, wenn dieselbe auch unendlich oft sprungweise erfolgt, so dass also die Begrenzungslinie unendlich viele Ecken besitzen kann.

Auch Spitzen der Begrenzungslinie sind nicht ausgeschlossen. Für solche Spitzen, welche durch die Berührung zweier analytischen Linien entstehen, die in der Umgebung des Berührungspunktes den Charakter algebraischer Curven haben, habe ich die Untersuchung durchgeführt; um jedoch hier unnöthige Weitläufigkeiten zu vermeiden, ist im Folgenden auf das Auftreten von Spitzen keine Rücksicht genommen.

Das Gelingen des Beweises, dessen Grundgedanken hier mitgetheilt wird, beruht in letzter Instanz auf folgendem Hülfssatze:

Die Begrenzungslinie eines Bereiches T, für welchen es möglich ist, die partielle Differentialgleichung $\Delta u = 0$ beliebigen Grenzbedingungen gemäss zu integriren, werde in eine endliche Anzahl von Strecken (Theilen) getheilt. Diese mögen zu zwei Gruppen angeordnet werden, so dass in jeder Gruppe mindestens eine Strecke enthalten ist. Den einzelnen Strecken lege man, jenachdem sie der ersten oder zweiten Gruppe angehören, ungerade oder gerade Ordnungszahlen bei und bezeichne die Punkte, welche die Strecken mit gerader Ordnungszahl von denen mit ungerader Ordnungszahl trennen, mit P. Im Innern von T denke man sich eine endliche Anzahl analytischer Linien L gegeben, welche mit den Strecken ungerader Ordnungszahl entweder keinen Punkt oder nur Endpunkte P derselben gemein haben, ohne sie jedoch in diesen Punkten zu berühren.

Hierauf denke man sich für den Bereich T eine Funktion u bestimmt, welche der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt und in allen Punkten der Begrenzung von T den Werth 0 oder $+1$ hat, je nachdem die Ordnungszahl der Strecke, in deren Innerem der betreffende Punkt liegt, gerade oder ungerade ist. Dann ist die obere Grenze, beziehungsweise das Maximum aller Werthe, welche die Funktion u längs der Linien L annimmt, eine positive Zahl q, welche kleiner als 1 ist.

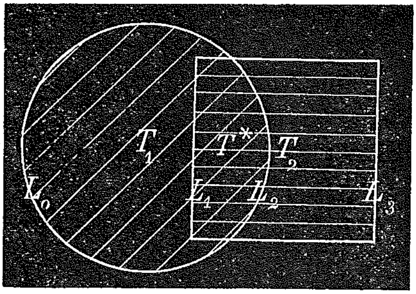
Wird nun für denselben Bereich T bei derselben Eintheilung der Begrenzung in Strecken mit gerader und ungerader Ordnungszahl und für dieselben Linien L eine Funktion u_1 bestimmt, welche der Differentialgleichung $\Delta u_1 = 0$ genügt, auf der Begrenzung von T längs der Strecken mit gerader Ordnungszahl den Werth Null hat, und deren längs der Strecken mit ungerader Ordnungszahl beliebig vorgeschriebener Werth dem absoluten Betrage nach die Grösse g nicht überschreitet, so überschreitet der absolute Betrag der Werthe, welche die Funktion u_1 in den Punkten der Linien L annehmen kann, nirgends den Werth $g.q$, wo q die im Vorhergehenden angegebene Bedeutung hat, also kleiner als 1 ist. —

Für die Fläche eines Kreises und für alle einfach zusammenhängenden Flächen, deren conforme Abbildung auf die Fläche eines Kreises bekannt ist, ist die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ unter vorgeschriebenen Grenzbedingungen mit Schwierigkeit nicht verbunden. Hinsichtlich dieser Aufgabe möge es gestattet sein, auf einen kleinen in dieser Zeitschrift (S. 113—128 des laufenden Jahrganges) mitgetheilten Aufsatz Bezug zu nehmen; in demselben sind zwar Stetigkeitsunterbrechungen in der für die Funktion u längs der Begrenzung vorgeschriebenen Werthenreihe der Kürze wegen ausdrücklich ausgeschlossen worden; indessen gelten die dort entwickelten Schlüsse *mutatis mutandis* auch dann noch, wenn in einer endlichen Anzahl von Rand-Punkten die Reihe der vorgeschriebenen Randwerthe eine Unterbrechung der Stetigkeit erfährt.

Nachdem gezeigt ist, dass für eine Anzahl von einfacheren Bereichen die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ beliebigen Grenzbedingungen gemäss integrirt werden kann, handelt es sich darum, den Nachweis zu führen, dass auch für einen weniger einfachen Bereich, der aus jenen auf gewisse Weise zusammengesetzt ist, die Integration der Differentialgleichung beliebigen Grenzbedingungen gemäss möglich ist. Zum Beweise dieses Satzes kann ein Grenzübergang dienen, welcher mit dem bekannten zur Herstellung eines luftverdünnten Raumes mittelst einer zweistiefeligen Luftpumpe dienenden Verfahren grosse Analogie hat. Die Periode der Operation besteht nämlich in dem einen wie in dem andern Falle aus zwei alternirend zur Wirkung gelangenden Einzeloperationen, welche zwar denselben Zweck haben, aber in Hinsicht auf die Art und Weise der Wirkung nicht identisch, sondern in gewissem Sinne symmetrisch sind.

Ein solcher Grenzübergang möge kurz Grenzübergang durch alternirendes Verfahren genannt werden.

Es seien gegeben zwei Bereiche T_1 und T_2, welche einen oder mehrere Bereiche T^* gemeinsam haben und deren Begrenzungslinien sich nicht berühren. (In der beistehenden schematischen Figur ist T_1 die Fläche eines Kreises, T_2 die Fläche eines Quadrats.)



Das System aller Theile der Begrenzung von T_1, welche ausserhalb T_2 liegen, werde mit L_0, das System aller übrigen, innerhalb T_2 liegenden Theile mit L_2 bezeichnet.

Ebenso zerfällt die Begrenzung von T_2 in die Systeme L_1 und L_3, wenn nämlich mit L_1 das System aller Stücke, welche innerhalb des Gebietes T_1 liegen, mit L_3 das System aller Stücke, die ausserhalb T_1 liegen, bezeichnet wird.

Es wird vorausgesetzt, es sei sowohl für den Bereich T_1 als auch für den Bereich T_2 möglich, die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ beliebigen Grenzbedingungen gemäss zu integriren; es handelt sich darum, zu zeigen, dass dies auch für den Bereich $T_1 + T_2 - T^* = T$ möglich ist, welcher die Bereiche T_1 und

T_2 als Theile enthält, bei welchem aber das den Gebieten T_1 und T_2 gemeinsame Gebiet T^* nur einfach zu zählen ist.

Sowohl für das Gebiet T_1 und das System L_1 als auch für das Gebiet T_2 und das System L_2 sind die Bedingungen des vorher erwähnten Hülfssatzes erfüllt; im ersten Falle möge das System L_0, im zweiten das System L_3 an die Stelle der Gruppe der Strecken mit gerader Ordnungszahl treten. Es ist daher möglich, zwei Zahlen q_1 und q_2 zu bestimmen, welche die Rolle der Zahl q in dem Hülfssatze vertreten und welche beide kleiner sind als 1.

Dem Recipienten der Luftpumpe entspricht in Beibehaltung der obigen Analogie das Gebiet T^*, dem Innern der beiden Pumpencylinder entsprechen die Gebiete $T_1 - T^*$, $T_2 - T^*$, den Ventilen die Linien L_1 und L_2.

Es seien auf der Begrenzung von T, also längs L_0 und L_3, die Werthe für die Funktion u willkürlich vorgeschrieben; g sei die obere, k sei die untere Grenze dieser Werthe; die Differenz $g-k$ werde mit G bezeichnet.

Nun nehme man längs L_2 eine Werthenreihe willkürlich an, z. B. in allen Punkten von L_2 den Werth k, und bestimme für das Gebiet T_1 eine Funktion u_1, welche längs L_0 die vorgeschriebenen Werthe, längs L_2 den Werth k hat und im Innern von T_1 der Differentialgleichung $\Delta u_1 = 0$ genügt. Nach der über das Gebiet T_1 gemachten Voraussetzung gibt es eine solche Funktion. (Erster Zug des ersten Kolbens.)

Die Werthe, welche die Funktion u_1 längs L_1 hat, denke man sich fixirt und bestimme für das Gebiet T_2 eine Funktion u_2, welche längs L_3 die vorgeschriebenen Werthe hat, längs L_1 mit der vorher bestimmten Funktion u_1 übereinstimmt und für welche $\Delta u_2 = 0$ ist. Nach der über das Gebiet T_2 gemachten Voraussetzung gibt es eine solche Funktion. (Erster Zug des zweiten Kolbens.)

Der Werth von $u_2 - u_1$ oder von $u_2 - k$ längs L_2 ist kleiner als $g - k = G$.

Man bestimme nun für das Gebiet T_1 eine Funktion u_3, welche längs L_0 die vorgeschriebenen Werthe hat, längs L_2 mit u_2 übereinstimmt und für welche $\Delta u_3 = 0$ ist. (Zweiter Zug des ersten Kolbens.)

Die Differenz $u_3 - u_1$ ist im Innern von T_1 in keinem Punkte negativ und dem absoluten Betrage nach kleiner als G, längs L_1 aber nach dem erwähnten Hülfssatze kleiner als $G . q_1$, weil $u_3 - u_1$ längs L_0 den Werth Null hat und längs L_2 kleiner als G ist.

Den Werth der Funktion u_3 längs L_1 denke man sich fixirt und für das Gebiet T_2 eine Funktion u_4 bestimmt, welche längs L_1 mit u_3 übereinstimmt, längs L_3 die vorgeschriebenen Werthe hat und für welche $\Delta u_4 = 0$ ist. (Zweiter Zug des zweiten Kolbens.)

Die Differenz $u_4 - u_2$ hat längs L_3 den Werth Null und ist längs L_1, wo sie mit $u_3 - u_1$ übereinstimmt, positiv und kleiner als $G . q_1$; daher ist im Innern von T_2 $u_4 - u_2$ nirgends negativ und beständig kleiner als $G . q_1$, längs L_2 aber kleiner als $G . q_1 . q_2$.

Durch Fortsetzung dieses alternirenden Verfahrens gelangt man zu einer Reihe von unendlich vielen Funktionen mit ungeradem und mit geradem Index. Die einen sind für das Gebiet T_1, die andern für das Gebiet T_2 so erklärt, dass sie beziehlich längs

L_0 und L_3 die vorgeschriebenen Werthe haben und im Innern der Gebiete, für welche sie erklärt sind, der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügen.

Für das Gebiet T^* sind sowohl die Funktionen mit ungeradem als die mit geradem Index erklärt und zwar stimmen dieselben abwechselnd längs L_1 und längs L_2 mit einander überein. Längs L_1 ist nämlich $u_{2n-1} = u_{2n}$ und längs L_2 $u_{2n+1} = u_{2n}$.

Es ist nun nicht schwer nachzuweisen, dass die Funktionen mit ungeradem und diejenigen mit geradem Index sich mit wachsendem Index bestimmten Grenzfunktionen u' und u'' unbegrenzt nähern, welche durch die Gleichungen

$$u' = u_1 + (u_3 - u_1) + (u_5 - u_3) + \ldots + (u_{2n+1} - u_{2n-1}) + \ldots \text{ in inf.}$$
$$u'' = u_2 + (u_4 - u_2) + (u_6 - u_4) + \ldots + (u_{2n+2} - u_{2n}) + \ldots \text{ in inf.}$$

erklärt sind. Die auf der rechten Seite stehenden Reihen convergiren unbedingt und für alle in Betracht kommenden Werthepaare x, y in gleichem Grade; es ist nämlich

$$(u_{2n+1} - u_{2n-1}) < G \cdot (q_1 \cdot q_2)^{n-1} \text{ und}$$
$$(u_{2n+2} - u_{2n}) < G \cdot (q_1 \cdot q_2)^{n-1} \cdot q_1 .$$

Sowohl längs L_1 als längs L_2 ist $u' = u''$. Im Innern von T_1 ist $\Delta u' = 0$ im Innern von T_2 $\Delta u'' = 0$, daher ist für jeden Punkt von T^* $u' = u''$, weil auf der ganzen Begrenzung von T^* beide Funktionen mit einander übereinstimmen.

Es sind daher die beiden Funktionen u' und u'' Werthe derselben Funktion u, welche für das ganze Gebiet $T = T_1 + T_2 - T^*$ erklärt ist, im Innern desselben der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$

genügt und auf der Begrenzung $L_0 + L_3$ die vorgeschriebenen Werthe annimmt.

Hiermit ist der Beweis für die oben ausgesprochene Behauptung angedeutet: unter den angegebenen Voraussetzungen ist es auch für den Bereich T möglich, die partielle Differentialgleichung $\Delta u = 0$ willkürlich vorgeschriebenen Grenzbedingungen gemäss zu integriren. —

Durch wiederholte Anwendung und geeignete Modifikation des erwähnten Grenzüberganges durch alternirendes Verfahren kann die Existenz einer Funktion u für ein gegebenes Gebiet auch dann, wenn ausser den Grenzbedingungen noch Unstetigkeitsbedingungen, oder wie bei den Abel'schen Integralen Unstetigkeitsbedingungen allein vorgeschrieben sind, in den Fällen dargethan werden, für welche Riemann in seinen Abhandlungen die Existenz behauptet und mittelst des Dirichlet'schen Princips zu beweisen gesucht hat.

Das erläuterte Beweisverfahren erstreckt sich nicht blos auf den Fall, in welchem die das Gebiet T repräsentirende einfach oder mehrfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung in derselben Ebene oder auf derselben Kugelfläche enthalten ist, sondern gilt im Wesentlichen unverändert auch dann noch, wenn diese Fläche auf einer aus mehreren ebenen oder sphärischen Flächen zusammengesetzten Polyederoberfläche ausgebreitet ist.

Mit Hülfe dieser Erweiterung kann unter Anderem auch der Beweis geführt werden, dass ein einfach zusammenhängender auf einer solchen Polyederoberfläche ausgebreiteter Bereich conform abgebildet werden kann auf die Fläche eines Kreises, wenn derselbe eine in sich zurückkehrende Begrenzungslinie besitzt, und auf die Fläche einer Kugel, wenn der Bereich ein einfach zusammenhängender und geschlossener Bereich ist.

Hiermit ist auch die Frage nach der Möglichkeit der Constantenbestimmung, auf welche die conforme Abbildung der einfach zusammenhängenden Oberfläche eines von ebenen Flächen begrenzten Polyeders auf eine Kugel zurückgeführt werden kann (s. Borchardt's Journal, Bd. 70, pag. 119), beantwortet.

Ein specieller Fall der soeben erwähnten Abbildungsaufgabe tritt ein, wenn es sich darum handelt, die einfach zusammenhängende Fläche eines von geradlinigen Strecken begrenzten ebenen Polygons auf die Fläche eines Kreises conform abzubilden, mag die Fläche des Polygons ganz im Endlichen liegen, oder den unendlich fernen Punkt der Ebene ein- oder mehrmals in ihrem Innern enthalten; auch Windungspunkte im Innern derselben sind nicht ausgeschlossen. Bei dieser Aufgabe liegt ebenfalls die einzige Schwierigkeit in dem Nachweise der Möglichkeit, eine gewisse Anzahl zum Theil reeller, zum Theil conjugirter complexer Constanten, von denen die abbildende Funktion abhängig gemacht wird, so zu bestimmen, dass allen Bedingungen der Aufgabe genügt wird.

Diese Schwierigkeit kann durch Anwendung eines von Herrn Weierstrass entwickelten Verfahrens überwunden werden. Die Anwendung des obigen Grenzverfahrens bietet ein neues Mittel zur Ueberwindung derselben dar.

Aehnliches gilt von dem Nachweise der Möglichkeit derjenigen Constantenbestimmung, auf welche die Aufgabe der conformen Abbildung einer von Kreisbogenstrecken begrenzten einfach zusammenhängenden Figur auf die Fläche eines Kreises zurückgeführt wird. (a. a. O. pag. 117.)

Auch in diesem Falle kann die Fläche in ihrem Innern Windungspunkte oder den unendlich fernen Punkt enthalten.

Nachtrag. Vor Kurzem sind drei Abhandlungen des Herrn Christoffel mir bekannt geworden (Annali di Matematica diretti da Brioschi e Cremona, Tomo IV°, pag. 1—9, Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1870, pag. 283—298 und 359—369), deren zu der obigen Mittheilung in Beziehung stehender Inhalt zu einigen Bemerkungen Anlass gibt.

Auf pag. 1 des vierten Bandes der Annali liest man: „. . . la determinazione delle temperature stazionarie sopra una superficie rettangolare F non offre alcuna difficoltà, il problema associato delle temperature stazionarie sulla superficie complementare F' è rimasto completamente inaccessible ai metodi adoperati finquì . . .“

und auf pag. 284 der erwähnten Nachrichten: „. . . (man) gelangt dann zu einer merkwürdigen Gattung von Problemen, welche so auffallende Schwierigkeiten darbietet, dass die Lösung einer Aufgabe dieser Art ungeachtet aller Anstrengungen bisher nur in dem einzigen, durchaus elementaren Falle gelungen war, wo die Begrenzung von $\mathfrak{P}_1$ (— die nach allen Richtungen in's Unendliche reichende Fläche, welche von einer Ebene übrig bleibt, wenn aus dieser ein einfach zusammenhängendes, endliches Stück $\mathfrak{P}$ herausgeschnitten wird —) ein Kreis ist. Namentlich sind, was im Folgenden seine Erklärung finden wird, alle Versuche gescheitert, irgend einen der besondern, vorzugsweise interessanten Fälle zu behandeln, wo $\mathfrak{P}_1$ von einer geradlinigten Figur begrenzt ist."

Dieser Behauptung gegenüber erscheint es angemessen, auf einige einfache Beispiele aufmerksam zu machen, welche vielleicht auch an und für sich denen, welchen sie neu sind, einiges Interesse darbieten.

1. Es sei in der Ebene der complexen Grösse z eine Parabel gegeben, deren Brennpunkt der Punkt $z = 0$, deren Scheitel der Punkt $z = +1$ ist. Durch die Funktion $Z = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{z}\right)$ wird das Innere und durch die Funktion $Z_1 = \frac{2}{\sqrt{z}} - 1$ wird das Aeussere der Parabelfläche zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich auf die Fläche je eines Kreises abgebildet, womit bekanntlich die betreffende Wärme-Aufgabe für das Aeussere und für das Innere der Parabel als gelöst zu betrachten ist.

2. Es sei die Gleichung einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben; $a^2 - b^2 = 1$. Durch die Funktion $Z = \sin \operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi} \arcsin z\right)$, $q = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$, wird das Innere und durch die Funktion $Z_1 = \frac{z - \sqrt{z^2-1}}{a-b}$ wird das Aeussere der Ellipse auf die Fläche eines Kreises conform abgebildet, womit die betreffende Wärme-Aufgabe auch für diesen Fall als gelöst zu betrachten ist.

3. Es sei gegeben ein Quadrat, dessen Ecken

die vier Punkte $z = +1, +i, -1, -i$ bilden. Durch die Funktion $Z = \sin \operatorname{am} Kz$, $k = i$ wird das Innere des Quadrates auf die Fläche eines Kreises conform abgebildet und durch die Funktion

$$z = -\frac{1}{C}\int^{Z_1} \frac{\sqrt{1-Z_1^4}}{Z_1^2}\, dZ_1\,, \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\varphi}\; d\varphi$$

wird umgekehrt die Fläche des mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebenen Kreises in der Ebene der complexen Grösse Z_1 auf das Aeussere jenes Quadrates conform abgebildet, wenn die complexe Integrationsvariable Z_1 auf jene Kreisfläche beschränkt wird und die Integrationsconstante aus der Bedingung bestimmt wird, dass $\lim\left(z - \frac{1}{CZ_1}\right)$ für $Z_1 = 0$ auch gleich 0 sei. Durch die angegebenen Abbildungen darf aber die Wärme-Aufgabe für das Innere und für das Aeussere des Quadrates als gelöst angesehen werden. (Vrgl. Borchardt's Journ. Bd. 70, p. 115.)

4. Es sei gegeben ein Kreisbogendreieck. Die conforme Abbildung der Fläche eines Kreises auf das Innere und auf das Aeussere eines Kreisbogendreiecks ist mittelst hypergeometrischer Reihen ohne Schwierigkeit ausführbar. (Am angef. Orte p. 117.)

Die Zahl dieser Beispiele könnte noch vermehrt werden. —

Es darf hier nicht unerwähnt gelassen werden, dass auch gegen den übrigen Inhalt der genannten Abhandlungen erhebliche Einwendungen geltend zu machen sind.

An einen vollständigen Beweis würde zweifelsohne die Forderung zu stellen sein, dass auch bewiesen werde, es sei in der That möglich, sämmtliche Constanten, auf deren Bestimmung es ankommt, so zu bestimmen, dass allen Bedingungen der Aufgabe genügt wird.

Es ist ferner wohl zu beachten, dass in den beiden erwähnten Abhandlungen in den Göttinger Nachrichten die Untersuchung ausdrücklich auf den Fall beschränkt wird, in welchem die Begrenzungslinie des abzubildenden Bereiches durch eine „unzerfällbare Gleichung“ gegeben ist. Hierdurch werden also von vornherein sowohl die Fälle ausgeschlossen, in denen die Begrenzungslinie aus mehreren Stücken verschiedener analytischer Linien besteht, als auch der Fall, in welchem diese Linie an keiner Stelle den Charakter einer algebraischen Curve besitzt.

Endlich ist nicht zu übersehen, dass in einer sehr grossen Anzahl von Fällen, zu welchen auch der einfache Fall der conformen Abbildung des Innern einer Ellipse auf das Innere eines Kreises gehört, die in den genannten Abhandlungen aufgestellten Schlussformeln mit einer ungehobenen Schwierigkeit noch behaftet bleiben, ein Umstand, welcher es als fraglich erscheinen lässt, ob diese Formeln als ein Beweis für die Möglichkeit der Lösung der gestellten allgemeinen Aufgabe angesehen werden dürfen.

August 1870.