Ueber die projectivischen Coordinaten.

Von **Wilh. Fiedler.**

Mit einer lithographirten Tafel.

---

1. Dass die Bestimmungsweise der Geometrie der Lage zu Coordinatensystemen im Sinne der analytischen Geometrie führt, ist im Allgemeinen bekannt; man findet in M. Chasles „Géométrie supérieure" von 1852 umfassende Ausführungen für die Ebene, v. Staudt hat im § 29 der „Beiträge zur Geometrie der Lage" 1857 die Coordinatenbestimmung durch Doppelverhältnisse gegeben, ohne sie aber zur Aufstellung der Gleichungen der Geraden des Punktes und der Ebene zu führen, welche für die analytische Geometrie fundamental ist. In der That führt jedoch die Benutzung der Doppelverhältnisse sehr einfach auch dazu, wenn man die in ihrer Natur liegende Dualität auch für die analytische Entwicklung ganz ebenso festzuhalten sucht, wie sie in der Entwickelung der Geometrie der Lage erscheint. Den wesentlichen Gedanken hiefür finde ich bereits von W. R. Hamilton in den Arbeiten über die „Quaternions" um 1860 gegeben. Ich will im Folgenden zeigen — wie ich es in meinen Vorlesungen zu thun pflege — dass man so dieselben Coordinatensysteme erhält, welche als trimetrische, als Dreipunkt- und Dreilinien- oder als Dreiecks-Coordinaten in der Ebene und als tetrametrische etc. oder Tetraeder-Coordinaten für den Raum durch besondere Schriften, zumeist wohl aber durch die Werke von

M. G. Salmon allgemein bekannt worden sind und deren man sich unter der Bezeichnung „homogene Coordinaten“ für die wissenschaftliche Untersuchung seit längerer Zeit fast ausnahmslos bedient. Man erhält sie so in ihrer ganzen Allgemeinheit und übersieht leicht die möglichen für bestimmte Zwecke vortheilhaften Specialisirungen; die geometrische Anschaulichkeit, die man gewinnt, erhellt besonders auch den Zusammenhang der allgemeinen Coordinaten mit den Cartesischen Punkt-Coordinaten und den Plücker-schen Linien- und Ebenen-Coordinaten.

Die Untersuchung gliedert sich naturgemäss nach den Stufen der Grundgebilde der Geometrie der Lage und sie liefert eine einheitliche analytische Darstellungsweise innerhalb jeder derselben; also eine solche für die geradlinige Punktreihe, das ebene Strahlenbüschel und das Ebenenbüschel; eine für die ebenen Systeme von Punkten und Geraden und für die Bündel von Geraden und Ebenen; eine für die Systeme von Punkten und von Ebenen im Raum und aus beiden hervorgehend endlich die zweifache Darstellung der Geraden im Raum. Sie lässt sich zugleich so auf eine Figur beziehen, dass der Fortgang von einer Stufe zur andern anschaulich wird; ich zerlege dieselbe zur Erhöhung der Deutlichkeit.

In Figur 1 erscheint eine Punktreihe $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{E}$ mit dem laufenden Punkte $\mathcal{P}$ und ein Strahlenbüschel a_2, a_1, e mit dem drehenden Strahl p, der $\mathcal{P}$ enthält; e von $\mathcal{E}$ harmonisch getrennt durch a_1, a_2 und $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1$.

In Figur 2 ist ein Dreieck $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$ oder $a_1 a_2 a_3$, ein Punkt $\mathcal{E}$ und eine Gerade e, harmonisch getrennt von einander durch das Dreieck, d. h. so, dass die Schnitte E_i von e in den Seiten desselben den Schnitten $\mathcal{E}_i$ der Ecktransversalen von $\mathcal{E}$ in Bezug auf die Ecken $\mathcal{A}_j\,\mathcal{A}_k$ harmonisch conjugirt sind; dazu ein Punkt $\mathcal{P}$ und eine durch ihn gehende Gerade p (§§ 4, 5).

Die Figur 4 zeigt ein Tetraeder $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ oder $A_1A_2A_3A_4$, einen Punkt $\mathcal{E}$ und eine von ihm durch das Tetraeder harmonisch getrennte Ebene E, d. h. so, dass die Schnitte E_{ij} von E mit den Kanten desselben den Schnitten $\mathcal{E}_{ij}$ derselben mit den durch die respectiven Gegenkanten $\mathcal{A}_k\mathcal{A}_l$ nach $\mathcal{E}$ gelegten Ebenen in Bezug auf $\mathcal{A}_i$ und $\mathcal{A}_j$ harmonisch conjugirt sind; dazu einen Punkt $\mathcal{P}$ und eine ihn enthaltende Ebene Π (§§ 8, 9).

Die Figuren 3 und 5 entsprechen den speciellen Fällen von 2 und 4, wo die eine Seite $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$ des Fundamentaldreiecks die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene und die eine Fläche $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ des Tetraeders die unendlich ferne Ebene des Raumes ist (§§ 6, 11). Der entsprechende Specialfall von Figur 1 kann übergangen werden.

Für die Entwickelung selbst genügt die Kenntniss derjenigen Begriffe und Wahrheiten der Geometrie der Lage, welche zugleich für die darstellende Geometrie unentbehrlich sind und in derselben naturgemäss entspringen, weil ohne sie keine Lösung der wesentlichen Aufgaben dieser Wissenschaft, keine wirkliche Einsicht in die Natur des Zusammenhanges zwischen Bild und Original möglich ist.

2. In einer geradlinigen Punktreihe ist jeder vierte Punkt $\mathcal{P}$ (Fig. 1) durch das Doppelverhältniss

bestimmt, welches er mit drei festen Punkten $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{E}$ derselben bildet; ist

$$(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{E}\mathcal{P}) = \frac{\mathcal{A}_1\mathcal{E}}{\mathcal{A}_2\mathcal{E}} : \frac{\mathcal{A}_1\mathcal{P}}{\mathcal{A}_2\mathcal{P}} = \frac{e_2}{e_1} : \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1 : e_1}{p_2 : e_2} = \frac{x_1}{x_2},$$

so sind x_1, x_2 zwei algebraische Zahlen, welche die Lage des Punktes $\mathcal{P}$ innerhalb der Reihe bestimmen, also Coordinaten dieses Punktes; man kann sagen, dass sie die mit den Abständen des Punktes $\mathcal{E}$ von den Fundamentalpunkten $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_1$ als Einheiten gemessenen Längenzahlen der Abstände des Punktes $\mathcal{P}$ von denselben Fundamentalpunkten sind.

Für $\mathcal{P}$ in $\mathcal{E}$ hat man $p_1 = e_1$, $p_2 = e_2$, also $x_1 = x_2 = 1$ und der Punkt $\mathcal{E}$ kann somit durch (1, 1) oder als der Einheitpunkt des Coordinatensystems der Reihe bezeichnet werden. Für $\mathcal{P}$ in $\mathcal{A}_1$ ist $x_2 = 0$, für $\mathcal{P}$ in $\mathcal{A}_2$ ist $x_1 = 0$. Durch die Gleichung $x_1 = kx_2$ ist ein Punkt $\mathcal{P}$ der Reihe bestimmt, der durch $(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{E}\mathcal{P}) = k$ aus $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{E}$ construirt wird.

Im ebenen Strahlenbüschel ist jeder Strahl p durch das Doppelverhältniss bestimmt, welches er mit drei festen Strahlen desselben a_1, a_2, e (Fig. 1) bildet; ist $(a_1 a_2 e p) = \frac{\sin(a_1,e)}{\sin(a_2,e)} : \frac{\sin(a_1,p)}{\sin(a_2,p)} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} : \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_2 : \varepsilon_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ so sind ξ_1, ξ_2 zwei Zahlen, welche die Lage des Strahls p im Büschel bestimmen, d. h. Coordinaten desselben; man kann sagen, dass sie die mit den Abständen zweier festen Punkte in a_2, a_1 respective von e gemessenen Längenzahlen der Abstände dieser Punkte von p sind.

Im Ebenenbüschel bestimmt man in gleicher Weise die Ebene Π durch die festen Ebenen A_1, A_2, E mittelst des Doppelverhältnisses

$$(A_1 A_2 E \Pi) = \frac{\sin(A_1, E)}{\sin(A_2, E)} : \frac{\sin(A_1, \Pi)}{\sin(A_2, \Pi)} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} : \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_2 : \varepsilon_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

Für p in e und Π in E hat man $\xi_1 = 1$ und $\xi_2 = 1$ und kann also den Strahl e, respective die Ebene E, als Einheitstrahl und Einheitebene für das Coordinatensystem des Büchels bezeichnen.

Für p in a_1 und respective in a_2 und für Π in A_1 und respective A_2 hat man $\xi_2 = 0$; $\xi_1 = 0$. Durch die Gleichung
$$\xi_1 = \varkappa \xi_2$$
ist ein Strahl p oder eine Ebene Π des Büschels bestimmt, welche durch
$$(a_1 a_2 e p) = \varkappa, \qquad (A_1 A_2 E \Pi) = \varkappa$$
aus a_1, a_2, e oder A_1, A_2, E construirt werden.

In Allem, die zur Bestimmung der Projectivität von zwei Grundgebilden erster Stufe nöthigen Elemente geben auch die Coordinatenbestimmung derselben und diese ist für die drei Grundgebilde erster Stufe wesentlich gleichartig.

3. Denken wir die Fundamentalstrahlen a_1, a_2 des Büschels durch die Fundamentalpunkte $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1$ der Reihe respective gelegt, und den Einheitpunkt $\mathcal{E}$ vom Einheitstrahl e durch diese und durch jene harmonisch getrennt (Fig. 1), also z. B. e nach dem vierten harmonischen zu $\mathcal{E}$ conjugirten Punkt E der Reihe $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{E}$ gehend, so gelten unter der Voraussetzung, dass der Strahl p des Büschels durch den Punkt $\mathcal{P}$ der Reihe geht, die Relationen
$$(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{E}\mathcal{P}) = \frac{x_1}{x_2}, \quad (a_1 a_2 e p) = \frac{\xi_1}{\xi_2} = (\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1 E\mathcal{P}),$$
$$(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 E\mathcal{E}) = -1;$$
das Product der beiden letzteren gibt
$$(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 E\mathcal{E})(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1 E\mathcal{P}) = (\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{P}\mathcal{E}) = -\frac{\xi_1}{\xi_2}$$
und durch Multiplication dieser Gleichung mit der ersten folgt

$$-\frac{\xi_1 x_1}{\xi_2 x_2} = 1 \text{ oder } \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0,$$

als die Relation, welche zwischen den Coordinaten ξ_i eines Strahls (einer Ebene) im Büschel und denen eines Punktes in der Reihe unter den gemachten Voraussetzungen immer dann und nur dann stattfindet, wenn der Strahl oder die Ebene durch den Punkt geht.

Sind ξ_1, ξ_2 Constanten a_1, a_2, so dass sie einen bestimmten festen Strahl etc. bezeichnen, so genügen die Coordinaten x_i jedes seiner Punkte der Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,$$

die man die Gleichung des Strahles nennen wird; die Coefficienten dieser Gleichung sind die Coordinaten des Strahles im Büschel. Geht derselbe insbesondere durch einen gegebenen Punkt (y_1, y_2), so gelten gleichzeitig die Relationen

$$a_1 x_1 + a_1 x_2 = 0, \quad a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$$

und man erhält durch Multiplication dieser Gleichungen mit y_2 und $-x_2$ respective und Addition der Producte

$$a_1(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 1 \text{ oder } x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0, \text{ d. i. auch}$$

$$\begin{vmatrix} x_1, x_1 \\ y_2, y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sind dagegen x_1, x_2 Constanten α_1, α_2, so dass sie einen bestimmten festen Punkt bezeichnen, so genügen die Coordinaten jedes durch ihn gehenden Strahles der Gleichung

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 = 0,$$

die man die Gleichung des Punktes nennen wird und welche seine Coordinaten zu ihren Coefficienten hat. Liegt derselbe im gegebenen Strahl (η_1, η_2), so gelten die Relationen

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 = 0, \quad \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 = 0$$

und man hat für seine Gleichung

$$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} \xi_1, \xi_2 \\ \eta_1, \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die erhaltenen Determinanten geben auch

$$l x_1 + m y_1 = 0, \quad l x_2 + m y_2 = 0;$$

respective $\lambda \xi_1 + \mu \xi_2 = 0, \quad \lambda \eta_1 + \mu \eta_2 = 0$

und damit die leichtverständlichen Formeln

$$x_i = -\frac{m}{l} y_i; \quad \xi_i = -\frac{\mu}{\lambda} \eta_i.$$

Die gewonnenen Coordinatenbestimmungen werden durch Projection und durch Uebergang zum Relief d. h. zu einem centrisch collinearen System nicht gestört und dienen darum zur Untersuchung der projectivischen Eigenschaften mit Vortheil.

4. Die Bestimmung der Projectivität der Gebilde zweiter Stufe erfolgt durch vier Paare entsprechender Elemente, die von einander unabhängig sind; also für zwei collineare Ebenen durch vier Paare entsprechender Punkte oder Strahlen; für zwei reciproke Ebenen durch vier Punkte der einen und die vier entsprechenden Strahlen der andern; für Ebene und Bündel durch vier Punkte oder Gerade und ihre entsprechenden Strahlen oder Ebenen.

Wenn vier Punkte $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2$, $\mathcal{E}$ in einer Ebene gegeben sind, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so bestimmt jeder Punkt $\mathcal{P}$ dieser Ebene an $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ als Scheiteln den vierten Strahl eines Büschels,

Wenn vier Gerade a_1, a_2, a_3, e in einer Ebene gegeben sind, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, so bestimmt jeder Strahl p dieser Ebene in a_1, a_2, a_3 als Trägern den vierten Punkt einer Reihe,

zu welchem das entsprechende Element im projectivischen System nach den Constructionen projectivischer Grundgebilde erster Stufe linear gefunden wird

— darstellende Geometrie, Geometrie der Lage — oder in Bezug auf welche es durch das Doppelverhältniss dieses Büschels respective dieser Reihe bestimmt wird — Analytische Geometrie. Analog in den Bündeln.

Man hat in Fig. 2 im Dreieck $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$ für $\mathcal{P}$ und im Dreiseit $a_1 a_2 a_3$ für p

$$(\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{E}\mathcal{P}) = (\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{E}_1\mathcal{P}_1),$$
$$(\mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{A}_3\mathcal{A}_1\mathcal{E}\mathcal{P}) = (\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1\mathcal{E}_2\mathcal{P}_2),$$
$$(\mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{E}\mathcal{P}) = (\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{E}_3\mathcal{P}_3).$$

Sind dann e_1, e_2, e_3 die Abstände des Punktes $\mathcal{E}$ und ebenso p_1, p_2, p_3 die des Punktes $\mathcal{P}$ von den Geraden $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$ resp. oder sind allgemeiner e_1, p_1; e_2, p_2; e_3, p_3 die in gleichen Richtungen gemessenen Längen von $\mathcal{E}$ und $\mathcal{P}$ bis zu jenen Geraden,

$$(a_1 \cdot a_2 a_3 e p) = (\mathcal{A}_3\mathcal{A}_2 E_1 P_1),$$
$$(a_2 \cdot a_3 a_1 e p) = (\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3 E_2 P_2),$$
$$(a_3 \cdot a_1 a_2 e p) = (\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1 E_3 P_3).$$

Sind dann $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ die Abstände des Strahls e und ebenso π_1, π_2, π_3 die des Strahls p von den Punkten $a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2$ oder $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ respective oder allgemeiner sind ε_1, π_1; ε_2, π_2; ε_3, π_3 die in zwei bestimmten Richtungen gemessenen Längen von e und p bis zu jenen,

so haben die vorbezeichneten Doppelverhältnisse die folgenden respectiven Werthe:

$$\frac{e_3}{e_2} : \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_2 : e_2}{p_3 : e_3} = \frac{x_2}{x_3},$$
$$\frac{e_1}{e_3} : \frac{p_1}{p_3} = \frac{p_3 : e_3}{p_1 : e_1} = \frac{x_3}{x_1}, {}^{*)}$$
$$\frac{e_2}{e_1} : \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1 : e_1}{p_2 : e_1} = \frac{x_1}{x_2}.$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} : \frac{\pi_3}{\pi_2} = \frac{\pi_2 : \varepsilon_2}{\pi_3 : \varepsilon_3} = \frac{\xi_2}{\xi_3},$$
$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} : \frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{\pi_3 : \varepsilon_3}{\pi_1 : \varepsilon_1} = \frac{\xi_2}{\xi_1}, {}^{*)}$$
$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} : \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_2 : \varepsilon_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

Nun sind x_1, x_2, x_3 respective ξ_1, ξ_2, ξ_3 drei algebraische Zahlen, welche die Lage von $\mathcal{P}$ in seiner Ebene durch $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{E}$, respective die Lage von p gegen a_1, a_2, a_3 und e bestimmen, d. h. die Coordinaten des Punktes $\mathcal{P}$ respective der geraden Linie p der Ebene und insofern sie durch drei Ein-

*) Dass das Product derselben die Einheit ist, gibt leicht die Sätze der Theorie der Transversalen, so wie die Construction des § 5.

heiten e_1, e_2, e_3, respective ε_1, ε_2, ε_3 ausgedrückt werden, die trimetrischen Coordinaten eines Punktes respective einer Geraden der Ebene.

Ist $\mathcal{P}$ in $\mathcal{E}$, so ergeben sich aus $p_1 = e_1$, etc.

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

und $\mathcal{E}$ kann somit als der Einheitpunkt des Systemes bezeichnet werden.

Für $\mathcal{P}$ in $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$ ist $p_1 = 0$ und also $x_1 = 0$,

$$\frac{x_3}{x_1} = \infty, \quad \frac{x_1}{x_2} = 0,$$

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{p_2 : e_2}{p_3 : e_3} = k_1$$

Ebenso für $\mathcal{P}$ in $\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1$

$$x_2 = 0, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{p_3 : e_3}{p_1 : e_1} = k_2$$

und für $\mathcal{P}$ in $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$

$$x_3 = 0, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{p_1 : e_1}{p_2 : e_2} = k_3$$

Für $\mathcal{P}$ in $\mathcal{A}_1$ folgt

$$x_2 = 0, \; x_3 = 0, \; x_1 = \frac{h_1}{e_1}; \text{ etc.,}$$

Ist p in e, so ergeben sich aus $\pi_1 = \varepsilon_1$, etc.

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1$$

und e kann als die Einheitgerade des Systemes bezeichnet werden.

Für p durch $a_2 a_3$ oder $\mathcal{A}_1$ ist $\pi_1 = 0$, und daher $\xi_1 = 0$,

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = \infty, \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = 0,$$

$$\frac{\xi_2}{\xi_3} = \frac{\pi_2 : \varepsilon_2}{\pi_3 : \varepsilon_3} = \varkappa_1$$

Ebenso für p durch $\mathcal{A}_2$

$$\xi_2 = 0, \quad \frac{\xi_3}{\xi_1} = \frac{\pi_3 : \varepsilon_3}{\pi_1 : \varepsilon_1} = \varkappa_2$$

und für p durch $\mathcal{A}_3$

$$\xi_3 = 0, \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_2 : \varepsilon_2} = \varkappa_3$$

Für p in a_1 folgt

$$\xi_2 = 0, \; \xi_3 = 0, \; \xi_1 = \frac{h_1}{\varepsilon_1}; \text{ etc.,}$$

wenn h_1 z. B. die der Ecke $\mathcal{A}_1$ oder der Seite a_1 entsprechende Höhe des Dreiecks $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$ oder $a_1 a_2 a_3$ ist.

Die Coordinaten x_i, ξ_i bleiben für die Bestimmung im Strahlen- und Ebenen-Bündel unverändert brauchbar, wenn dasselbe auf Fundamental-Elemente bezogen wird, welche die projicirenden der Fundamental-Elemente des ebenen Systemes sind.

5. Um beide Arten projectivischer Systeme zweiter Stufe, die collinearen und die reciproken, gleichmässig behandeln zu können, denken wir in natürlicher Fortentwicklung des Vorigen und zunächst

für die ebenen Systeme ausgesprochen das Dreieck $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ mit dem Dreiseit $a_1a_2a_3$ in der Art identisch, dass die Ecke $\mathfrak{A}_i$ des ersten der Schnittpunkt der Seiten a_j, a_k des letzten ist und setzen fest, dass die Einheitgerade e auf allen Seiten und an allen Ecken von dem Einheitpunkte $\mathfrak{E}$ harmonisch getrennt sei durch die anliegenden Ecken respective Seiten des Fundamentaldreiecks. Die Figur 2 zeigt den constructiven Uebergang von $\mathfrak{E}$ zu e. Dann ist mit Benutzung der in ihr gegebenen Bezeichnungen

$$\frac{\xi_2}{\xi_3} = (\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2E_1P_1)\,,\ \frac{\xi_3}{\xi_1} = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3E_2P_2),\ \frac{\xi_1}{\xi_2} = (\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1E_3P_3);$$

$$-1 = (\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3E_1\mathfrak{E}_1) = (\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1E_2\mathfrak{E}_2) = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2E_3\mathfrak{E}_3)$$

und somit durch Multiplication der entsprechenden Paare

$$-\frac{\xi_2}{\xi_3} = (\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2\mathfrak{E}_1P_1)\,,\ -\frac{\xi_3}{\xi_1} = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{E}_2P_2)\,,$$

$$-\frac{\xi_1}{\xi_2} = (\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}_3P_3).$$

Verbindet man damit

$$\frac{x_2}{x_3} = (\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{E}_1\mathfrak{P}_1)\,,\ \frac{x_3}{x_1} = (\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{P}_2)\,,$$

$$\frac{x_1}{x_2} = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{E}_3\mathfrak{P}_3)\,,$$

so erhält man durch Multiplication der entsprechenden Paare

$$-\frac{\xi_2\,x_2}{\xi_3\,x_3} = (\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3P_1\mathfrak{P}_1)\,,\ -\frac{\xi_3\,x_3}{\xi_1\,x_1} = (\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1P_2\mathfrak{P}_2)\,,$$

$$-\frac{\xi_1\,x_1}{\xi_2\,x_2} = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2P_3\mathfrak{P}_3)$$

und bildet daraus drei Gruppen wie

$$-\frac{\xi_2\,x_2}{\xi_3\,x_3} = (\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3P_1\mathfrak{P}_1)\,,\ -\frac{\xi_1\,x_1}{\xi_3\,x_3} = (\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}_2P_2).$$

Sobald aber $\mathfrak{P}$ in p liegt oder p durch $\mathfrak{P}$ geht, liefert jede dieser Gruppen die Einheit als Summe.

Man hat nach der perspectivischen Lage für das Centrum $\mathcal{P}$

$$(\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1\mathcal{P}_2P_2) = (\mathcal{A}_3\mathcal{P}_1\mathcal{A}_2P_1) = (\mathcal{A}_2P_1\mathcal{A}_3\mathcal{P}_1)$$

und die Summe $(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3P_1\mathcal{P}_1) + (\mathcal{A}_2P_1\mathcal{A}_3\mathcal{P}_1)$ von zwei Doppelverhältnissen derselben Gruppe von vier Elementen, die sich nur durch Vertauschung der mittlern Elemente unterscheiden, ist stets Eins. Dies Letztere beweisen wir direct, indem wir die Reihe $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3P_1\mathcal{P}_1$ so projicieren, dass das Bild von $\mathcal{P}_1$ unendlich fern liegt, oder von einem Centrum C auf eine zu $C\mathcal{P}_1$ parallele Gerade. Die fragliche Summe wird dann

$$(\mathcal{A}_2'\mathcal{A}_3'P_1'\infty) + (\mathcal{A}_2'P_1'\mathcal{A}_3'\infty) =$$

$$\frac{\mathcal{A}_2'P_1'}{\mathcal{A}_3'P_1'} + \frac{\mathcal{A}_2'\mathcal{A}_3'}{P_1'\mathcal{A}_3'} = \frac{\mathcal{A}_3'\mathcal{A}_2' + \mathcal{A}_2'P_1'}{\mathcal{A}_3'P_1'} = \frac{\mathcal{A}_3'P_1'}{\mathcal{A}_3'P_1'} = 1.$$

Unter den für unsere trimetrischen Coordinaten gemachten Voraussetzungen ist also immer für einen Punkt $\mathcal{P}(x_1, x_2, x_3)$ und eine Gerade $p(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, wenn jener in dieser liegt und nur dann,

$$-\frac{\xi_2x_2 + \xi_3x_3}{\xi_1x_1} = 1 \text{ oder } \xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 0.$$

Sind die ξ_i constante Grössen a_i, so gilt für die Coordinaten x_i aller Punkte der durch sie nach § 4 bestimmten Geraden die Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

die man als die Gleichung der Geraden (a_1, a_2, a_3) in trimetrischen Punkt-Coordinaten zu bezeichnen hat; ihre Coefficienten sind die trimetrischen Linien-Coordinaten der Geraden.

Sind die x_i constante Grössen α_i, so gilt für die Coordinaten ξ_i aller Strahlen, welche den durch sie nach § 4 bestimmten Punkt enthalten, die Gleichung

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0,$$

die Gleichung des Punktes in trimetrischen Linien-Coordinaten; ihre Coefficienten sind die trimetrischen Punkt-Coordinaten desselben.

6. Wenn wir eine Seite a_1 oder $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$ des Fundamentaldreiecks $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$ als die unendlich ferne Gerade der Ebene voraussetzen, so ergibt sich für die Punkt-Coordinaten

$$x_1 = p_1 : e_1 = 1, \frac{x_2}{x_1} = x_2 = (\infty \mathcal{A}_1 \mathcal{E}_3 \mathcal{P}_3) = \frac{\mathcal{A}_1 \mathcal{P}_3}{\mathcal{A}_1 \mathcal{E}_3};$$

$$\frac{x_3}{x_1} = x_3 = (\infty \mathcal{A}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{P}_2) = \frac{\mathcal{A}_1 \mathcal{P}_2}{\mathcal{A}_1 \mathcal{E}_2}.$$

Die Geraden $\mathcal{P}\mathcal{P}_2$, $\mathcal{E}\mathcal{E}_2$; $\mathcal{P}\mathcal{P}_3$, $\mathcal{E}\mathcal{E}_3$ sind respective parallel zu $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$ und die Zahlen x_2, x_3 sind die Längenzahlen der mit den Einheiten $\mathcal{A}_1\mathcal{E}_3$, $\mathcal{A}_1\mathcal{E}_2$ respective gemessenen Abschnitte $\mathcal{A}_1\mathcal{P}_3$, $\mathcal{A}_1\mathcal{P}_2$. Denkt man endlich $\mathcal{A}_1\mathcal{E}_3 = \mathcal{A}_1\mathcal{E}_2$ als die Einheit des Längenmaasses, so dass $\mathcal{E}$ in der Halbierungslinie des Winkels der Axen liegt, so hat man als Specialfall der trimetrischen die gewöhnlichen Cartesischen Parallelcoordinaten des Punktes — schiefwinklig oder rechtwinklig, je nach dem Winkel der Fundamentallinien $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$. Man nenne $\mathcal{A}_1\mathcal{P}_2 = x$ die Abscisse und $\mathcal{A}_1\mathcal{P}_3 = y$ die Ordinate des Punktes $\mathcal{P}$. Die Gleichung der Geraden in solchen Punkt-Coordinaten ist

$$a_1 + a_2\, y + a_3\, x = 0 \quad \text{oder} \quad Ax + By + C = 0;$$

die Grössen $C : A$ und $C : B$ sind die entsprechenden (Plücker'schen) Linien-Coordinaten der Geraden. Ebenso folgt für die Linien-Coordinaten

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = (\mathcal{A}_1 \infty E_3 P_3) = \frac{\mathcal{A}_1 E_3}{\mathcal{A}_1 P_3}; \quad \frac{\xi_3}{\xi_1} = (\mathcal{A}_1 \infty E_2 P_2) = \frac{\mathcal{A}_1 E_2}{\mathcal{A}_1 P_2},$$

und da wegen $(\infty \mathfrak{A}_1 E_2 \mathfrak{E}_2) = (\mathfrak{A}_1 \infty E_3 \mathfrak{E}_3) = -1$, $\mathfrak{A}_1 E_2 = -\mathfrak{A}_1 \mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{A}_1 E_3 = -\mathfrak{A}_1 \mathfrak{E}_3$ ist, so hat man

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = -\frac{1}{\frac{\mathfrak{A}_1 P_3}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{E}_3}}, \quad \frac{\xi_3}{\xi_1} = -\frac{1}{\frac{\mathfrak{A}_1 P_2}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{E}_2}},$$

d. h. die Zahlen $\frac{\xi_2}{\xi_1}$ und $\frac{\xi_3}{\xi_1}$ sind die negativen Reciproken der Längenzahlen der Abschnitte $\mathfrak{A}_1 P_3$, $\mathfrak{A}_1 P_2$ der Geraden in den Fundamentallinien gemessen mit den Einheiten $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{E}_3$ und $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{E}_2$. Setzt man endlich $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{E}_3 = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{E}_2$ als Einheit des Längenmaasses voraus, so erhält man die gewöhnlichen Plücker'schen Linien-Coordinaten als Specialfall der trimetrischen. Man setzt $-\frac{1}{\mathfrak{A}_1 P_2} = \xi$ und $-\frac{1}{\mathfrak{A}_1 P_3} = \eta$ und die Gleichung des Punktes wird mit x und y als seinen Cartesischen Coordinaten

$$\xi x + \eta y + 1 = 0.$$

Es gehen somit die elementaren Coordinatensysteme von Cartesius und Plücker aus den allgemeinen projectivischen durch eine Centralprojection hervor, deren Ebene der projicirenden Ebene der einen Fundamentallinie parallel ist. Darum gelangt man auch umgekehrt durch die Centralprojection des Systems der Cartesischen Coordinaten zu den trimetrischen Punkt-Coordinaten, wie diess im Grunde genommen schon in einer Abhandlung von Jacobi im 8. Bande des Journals von Crelle „De Transformatione integralis duplicis . . .“ in dem Abschnitte über die analytische Theorie der Centralprojection (p. 338—41) nachgewiesen erscheint, wenn man denselben aus diesem Gesichtspunkte betrachtet.

Man sieht, dass in den elementaren Coordinatenbestimmungen die Wahl der Längeneinheit und die Festsetzung des positiven Sinnes in den Axen die Bestimmung des Einheitpunktes $\mathcal{E}$ und der Einheitlinie e vertritt; man erkennt auch sofort, dass der Uebergang von der Bestimmung in der Ebene zu der Bestimmung im Strahlenbündel die Einführung der dritten Seite des Fundamentaldreiecks, ob auch als unendlich ferne Gerade ihrer Ebene, unentbehrlich macht, indess sie bei jener scheinbar überflüssig ist.

7. Damit die Gerade

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

den Punkt $\mathcal{Q}(y_1, y_2, y_3)$ und den Punkt $\mathcal{R}(z_1, z_2, z_3)$ enthalte, hat sie die Bedingungen

$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 = 0, \quad \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 = 0$$

zu erfüllen und man erhält die Gleichung der Verbindungslinie $\mathcal{QR}$, indem man zwischen den drei geschriebenen Gleichungen die Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 eliminirt. Diess geschieht durch Multiplication mit den respectiven Factoren

$$\begin{vmatrix} y_1, y_2 \\ z_1, z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1, z_2 \\ x_1, x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1, x_2 \\ y_1, y_2 \end{vmatrix} \text{ oder } \begin{vmatrix} y_2, y_3 \\ z_2, z_3 \end{vmatrix}, \text{ etc.}; \begin{vmatrix} y_3, y_1 \\ z_3, z_1 \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

und liefert die äquivalenten Entwickelungen

$$x_3 \begin{vmatrix} y_1, y_2 \\ z_1, z_2 \end{vmatrix} + y_3 \begin{vmatrix} z_1, z_2 \\ x_1, x_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1, x_2 \\ y_1, y_2 \end{vmatrix} = 0, \quad x_1 \begin{vmatrix} y_2, y_3 \\ z_2, z_3 \end{vmatrix} + \ldots = 0,$$

$$x_2 \begin{vmatrix} y_3, y_1 \\ z_3, z_1 \end{vmatrix} + \ldots = 0$$

oder

$$x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 + y_1 z_2 x_3 - y_1 z_3 x_2 + z_1 x_2 y_3 - z_1 x_3 y_2 = 0$$

und in Determinantenform

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ebenso liefert die Elimination von x_1, x_2, x_3 zwischen den Gleichungen

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0, \qquad x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3 = 0,$$
$$x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + x_3\zeta_3 = 0$$
die Gleichung des Schnittpunktes der Geraden $q(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ und $r(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ in den analogen Formen, welche vertreten sind durch
$$\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sodann bemerken wir, dass die Elimination der ξ_i zwischen den Gleichungen
$$\xi_1 x_1 + \xi_2 y_1 + \xi_3 z_1 = 0, \qquad \xi_1 x_2 + \xi_2 y_2 + \xi_3 z_2 = 0,$$
$$\xi_1 x_3 + \xi_2 y_3 + \xi_3 z_3 = 0,$$
die durch Multiplication mit den respectiven Factoren
$$\begin{vmatrix} y_2, & y_3 \\ z_2, & z_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_3, & y_1 \\ z_3, & z_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ z_1, & z_2 \end{vmatrix}; \text{ etc.}$$
und Addition der Producte erzielt wird, das nämliche Resultat liefert; nämlich z. B. in der Form
$$x_1 \begin{vmatrix} y_2, & y_3 \\ z_2, & z_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} y_3, & y_1 \\ z_3, & z_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ z_1, & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$
welches nach derselben Schreibart die Determinante ist
$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$
Aus jenen Gleichungen erhält man aber für die Coordinaten des unbestimmten Punktes $\mathcal{P}(x_1, x_2, x_3)$ der Geraden $\mathcal{Q}\mathcal{R}$ die Werthe
$$x_i = -\frac{\xi_2 y_i + \xi_3 z_i}{\xi_1};$$
schreiben wir also für ξ_1, ξ_2, ξ_3 respective l, m, n, so ist z. B. insbesondere
$$x_1 = -\frac{my_1 + nz_1}{l}$$
und da aus der zweiten der obigen Gleichungen für l der Werth $-\frac{my_2 + nz_2}{x_2}$ folgt, so ist
$$x_1(my_2 + nz_2) = x_2(my_1 + nz_1) \text{ und}$$

$$\frac{m}{n} = -\frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2} = -\frac{z_1}{y_1} \cdot \frac{1 - \frac{x_1}{x_2} : \frac{z_1}{z_2}}{1 - \frac{x_1}{x_2} : \frac{y_1}{y_2}}$$

$$= -\frac{z_1}{y_1} \cdot \frac{1 - (\mathfrak{A}_3 . \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{E} \mathfrak{P}) : (\mathfrak{A}_3 . \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{E} \mathfrak{R})}{1 - (\mathfrak{A}_3 . \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{E} \mathfrak{P}) : (\mathfrak{A}_3 . \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{E} \mathfrak{Q})} \text{ (vergl. § 4)}$$

$$= -\frac{z_1}{y_1} \cdot \frac{1 - (\mathfrak{A}_3 . \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{R} \mathfrak{P})}{1 - (\mathfrak{A}_3 . \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{Q} \mathfrak{P})} = -\frac{z_1}{y_1} \cdot \frac{(\mathfrak{A}_3 . \mathfrak{A}_1 \mathfrak{R} \mathfrak{A}_2 \mathfrak{P})}{(\mathfrak{A}_3 . \mathfrak{A}_1 \mathfrak{Q} \mathfrak{A}_2 \mathfrak{P})}$$

$$= -\frac{z_1}{y_1} (\mathfrak{A}_3 . \mathfrak{P} \mathfrak{A}_2 \mathfrak{R} \mathfrak{Q}) = -\frac{z_1}{y_1} (\mathfrak{A}_3 . \mathfrak{A}_2 \mathfrak{P} \mathfrak{Q} \mathfrak{R}),$$

d. h. das Verhältniss $m : n$ ist ein constantes Vielfaches des Doppelverhältnisses der Reihe, die durch den Schnitt der Geraden mit der Seite $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$ des Fundamentaldreiecks und die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ selbst gebildet wird.

Für Cartesische Parallelcoordinaten ist $z_1 = y_1 = 1$ und $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$ die unendlich ferne Gerade der Ebene, also

$$\frac{m}{n} = -(\infty \mathfrak{P} \mathfrak{Q} \mathfrak{R}) = -\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{R}}{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}},$$

das negative Theilungsverhältniss der Strecke $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{P}$ wie bekannt.

Die analoge Bemerkung giebt für die Linien-Coordinaten bei Ersetzung der x_1, x_2, x_3 respective durch die λ, μ, ν die Gruppe der drei Gleichungen

$$\lambda \xi_i + \mu \eta_i + \nu \zeta_i = 0$$

und daraus für die Coordinaten des unbestimmten Strahls aus q, r

$$\xi_i = -\frac{\mu \eta_i + \nu \zeta_i}{\lambda};$$

insbesondere

$$\xi_1 = -\frac{\mu \eta_1 + \nu \zeta_1}{\lambda} = \frac{\mu \eta_1 + \nu \zeta_1}{\mu \eta_2 + \nu \zeta_2} \xi_2$$

und daraus

$$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{\zeta_1}{\eta_1} \cdot \frac{1 - \frac{\xi_1}{\xi_2} : \frac{\zeta_1}{\zeta_2}}{1 - \frac{\xi_1}{\xi_2} : \frac{\eta_1}{\eta_2}} = -\frac{\zeta_1}{\eta_1} \cdot \frac{1 - (\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1E_3P_3):(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1E_3R_3)}{1 - (\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1E_3P_3):(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1E_3Q_3)}$$

(vergl. § 4)

$$= -\frac{\zeta_1}{\eta_1} \cdot \frac{(\mathcal{A}_2R_3\mathcal{A}_1P_3)}{(\mathcal{A}_2Q_3\mathcal{A}_1P_3)} = -\frac{\zeta_1}{\eta_1} \cdot (\mathcal{A}_1P_3Q_3R_3),$$

wenn nämlich P_3, Q_3, R_3 die Schnittpunkte der Strahlen p, q, r mit der Fundamentallinie $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1$ sind; d. h. $\frac{\mu}{\nu}$ ist ein constantes Vielfaches des Doppelverhältnisses, welches die Strahlen p, q, r und der von ihrem Schnitt nach dem Fundamentalpunkt $\mathcal{A}_1$ gehende Strahl mit einander bestimmen.

Im Specialfalle der Plücker'schen Coordinaten wird nur $\frac{\zeta_1}{\eta_1} = 1$ und die directe Entwickelung für dieselben bestätigt diess. Aus der Gleichung des Punktes $(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)$

$$\begin{vmatrix} \xi, & \eta, & 1 \\ \xi_1, & \eta_1, & 1 \\ \xi_2, & \eta_2, & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ folgen } \begin{array}{r} \lambda\xi + \mu\xi_1 + \nu\xi_2 = 0 \\ \lambda\eta + \mu\eta_1 + \nu\eta_2 = 0 \\ \lambda + \mu + \nu = 0 \end{array},$$

also

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\xi_2 - \xi}{\xi - \xi_1} = \frac{\eta_2 - \eta}{\eta - \eta_1};$$

sind dann P_3, Q_3, R_3 die Schnittpunkte der Strahlen ξ, η; ξ_1, η_1; ξ_2, η_2 respective mit der Abscissenaxe, so ist zur geometrischen Deutung des ersten Bruches

$$\xi = -\frac{1}{\mathcal{A}_1P_3},\quad \xi_1 = -\frac{1}{\mathcal{A}_1Q_3},\quad \xi_2 = -\frac{1}{\mathcal{A}_1R_3}$$

und somit

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{-\frac{1}{\mathcal{A}_1R_3} + \frac{1}{\mathcal{A}_1P_3}}{-\frac{1}{\mathcal{A}_1P_3} + \frac{1}{\mathcal{A}_1Q_3}} = \frac{(\mathcal{A}_1P_3 - \mathcal{A}_1R_3)\mathcal{A}_1Q_3}{(\mathcal{A}_1Q_3 - \mathcal{A}_1P_3)\mathcal{A}_1R_3} = \frac{R_3P_3}{P_3Q_3} : \frac{\mathcal{A}_1R_3}{\mathcal{A}_1Q_3}$$

$$= -(R_3Q_3P_3\mathcal{A}_1) = -(\mathcal{A}_1P_3Q_3R_3).$$

8. Zwei projectivische Räume sind durch fünf Paare entsprechender Punkte oder Ebenen bestimmt und in Folge dessen genügen zur Coordinatenbestimmung im Raume fünf Punkte $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{E}$, von denen nicht vier in einer Ebene liegen, oder fünf Ebenen A_1, A_2, A_3, A_4, E, von denen nicht vier durch einen Punkt gehen. (Fig. 4.)

Ein Punkt $\mathcal{P}$ bestimmt mit den Verbindungslinien von dreien der Punkte $\mathcal{A}_i$, die ein Dreieck bilden, drei Ebenen, die nur ihn gemein haben und durch die Doppelverhältnisse gegeben werden können, die sie mit den drei festen Ebenen durch je dieselbe Gerade bestimmen; z. B. also durch die Doppelverhältnisse

$$(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_4 \mathcal{E} \mathcal{P}),$$
$$(\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{A}_4 \mathcal{A}_1 \mathcal{E} \mathcal{P}),$$
$$(\mathcal{A}_3 \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_4 \mathcal{E} \mathcal{P}),$$

ist der Punkt $\mathcal{P}$ bestimmt.

Bezeichnet man durch e_1, e_2, e_3, e_4 die Abstände des Punktes $\mathcal{E}$ von den Ebenen $\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_3 \mathcal{A}_4 \mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_4 \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3$ respective und durch p_1, p_2, p_3, p_4 die entsprechenden Abstände des Punktes $\mathcal{P}$, oder allgemeiner sind e_i und p_i, die in derselben Richtung gemessenen Längen von $\mathcal{E}$, respective $\mathcal{P}$ bis zur Ebene $\mathcal{A}_j \mathcal{A}_k \mathcal{A}_l$ (für $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$), so hat man

$$(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \cdot \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_4 \mathcal{E} \mathcal{P}) = \frac{p_3 : e_3}{p_4 : e_4},$$
$$(\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3 \cdot \mathcal{A}_4 \mathcal{A}_1 \mathcal{E} \mathcal{P}) = \frac{p_4 : e_4}{p_1 : e_1},$$
$$\mathcal{A}_3 \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_4 \mathcal{E} \mathcal{P}) = \frac{p_2 : e_2}{p_4 : e_4}.$$

Eine Ebene Π bestimmt mit den Durchschnittslinien von dreien der Ebenen A_i, die ein Dreikant bilden, drei Punkte, die nur sie gemein haben und durch die Doppelverhältnisse gegeben werden können, die sie mit den drei festen Punkten in je derselben Geraden bestimmen; z. B. also durch die Doppelverhältnisse

$$(A_1 A_2 . A_3 A_4 E \Pi),$$
$$(A_2 A_3 . A_4 A_1 E \Pi),$$
$$(A_3 A_1 . A_2 A_1 E \Pi),$$

ist die Ebene Π bestimmt.

Bezeichnet man durch ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 die Abstände der Ebene E von den Punkten $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_4 A_1$, $A_4 A_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3$ respective und durch $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ die entsprechenden Abstände der Ebene Π, oder allgemeiner sind die ε_i und die π_i, die in bestimmten Richtungen gemessenen Längen von den Ecken des Fundamentaltetraeders bis zu den Ebenen E und Π, so hat man

$$(A_1 A_2 . A_3 A_4 E \Pi) = \frac{\pi_3 : \varepsilon_3}{\pi_4 : \varepsilon_4},$$
$$(A_2 A_3 . A_4 A_1 E \Pi) = \frac{\pi_4 : \varepsilon_4}{\pi_1 : \varepsilon_1},$$
$$(A_3 A_4 . A_2 A_4 E \Pi) = \frac{\pi_2 : \varepsilon_2}{\pi_4 : \varepsilon_4}$$

und kann setzen

$$p_i : e_i = x_i,$$

so dass x_1, x_2, x_3, x_4 vier Zahlen bezeichnen, deren Verhältnisse *) den Punkt P in Bezug auf die fünf Fundamentalpunkte bestimmen und durch dieselben construieren lassen. Sie sind als **tetrametrische Coordinaten des Punktes** P zu bezeichnen; die vier Massstäbe, nach denen sie gemessen werden, bestimmt der Punkt $\mathcal{E}$ durch seine Lage gegen die Flächen des Fundamentaltetraeders $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$. Wir bezeichnen $\mathcal{E}$ als den **Einheitpunkt des Systems**, denn seine Coordinaten sind

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = p_i : e_i = 1.$$

Liegt P in einer Fläche des Fundamentaltetraeders also in

$$\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 \text{ oder } \mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4;\quad \mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_1;\quad \mathcal{A}_4\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2,$$

so ist respective

$x_4 = 0$ oder $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$

und wenn man die den bleibenden x_i entsprechenden p_i und e_i in Richtungen misst, welche der betreffenden Tetraederfläche angehören, so kommt man auf die Coordinatenbestimmung des ebenen Punktsystems in § 4 zurück. Der Lage von P in einer Kante z. B. $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$ entspricht das gleich-

und kann setzen

$$\pi_i : \varepsilon_i = \xi_i,$$

so dass $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ vier Zahlen bezeichnen, deren Verhältnisse *) die Ebene Π in Bezug auf die fünf Fundamentalebenen bestimmen und durch dieselben zu construieren gestatten. Sie sind als **tetrametrische Coordinaten der Ebene** Π zu bezeichnen; die vier Maassstäbe, nach denen sie gemessen werden, bestimmt die Ebene E durch ihre Lage gegen die Ecken des Fundamentaltetraeders $A_1A_2A_3A_4$. Wir bezeichnen E als die **Einheitebene des Systems**, denn ihre Coordinaten sind

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \pi_i : \varepsilon_i = 1.$$

Geht π durch eine Ecke des Fundamentaltetraeders also durch

$$A_1A_2A_3 \text{ oder } A_2A_3A_4;\quad A_3A_4A_1;\quad A_4A_1A_2,$$

so ist respective

$\xi_4 = 0$ oder $\xi_1 = 0$; $\xi_2 = 0$; $\xi_3 = 0$

und wenn man die den bleibenden ξ_i entsprechenden π_i und ε_i in Richtungen misst, die der entsprechenden Gegenfläche des Tetraeders angehören, so kommt man auf die Coordinatenbestimmung des ebenen Strahlensystems in § 4 zurück. Wenn die Ebene Π durch eine Kante z. B. A_1A_2

*) Die Gruppen von je vier solchen Verhältnissen, welche die Einheit zum Product geben, liefern die Sätze der Transversalen-Theorie; vgl. § 4.

zeitige Verschwinden zweier x_i, hier von x_3 und x_4 und der Punkt wird durch das Verhältniss der übrigbleibenden, hier von x_1 und x_2, in Bezug zu den betreffenden Fundamental-Punkten bestimmt. (Vgl. § 2.)

Für P in einer Ecke z. B. in $\mathscr{A}_1$ ist zugleich

$$x_2 = 0, \; x_3 = 0, \; x_4 = 0$$

und die bleibende Coordinate x_1 ist etwa die Längenzahl der entsprechenden Tetraederhöhe gemessen durch das gleichnamige e als Einheit.

geht, so entspricht dem das gleichzeitige Verschwinden von ξ_3 und ξ_4 und die Ebene wird durch das Verhältniss von ξ_1 und ξ_2 bestimmt. (Vgl. § 2.)

Fällt Π in eine Fläche des Fundamentaltetraeders z. B. A_1, so ist zugleich

$$\xi_2 = 0, \; \xi_3 = 0, \; \xi_4 = 0$$

und die bleibende Coordinate ξ_1 ist als die Längenzahl der betreffenden Tetraederhöhe in Bezug auf das gleichnamige ε als Einheit anzusehen.

9. Wir denken nun die Tetraeder der $\mathscr{A}_i$ und der A_i in der Art identisch, dass die Ecke $\mathscr{A}_i$ die Fläche A_i zur Gegenfläche $\mathscr{A}_i\mathscr{A}_k\mathscr{A}_l$ hat (Fig. 4) und setzen nach §§ 5 und 3 fest, dass der Einheitpunkt $\mathscr{E}$ und die Einheitebene E an allen Ecken, in allen Kanten und auf allen Flächen des Tetraeders durch dasselbe harmonisch getrennt seien — um so die gleichzeitige Bestimmbarkeit der reciproken räumlichen Systeme zu erlangen.

Zur Einfachheit des Ausdrucks bestimmen wir, dass die Schnittpunkte der Strahlen von $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \mathscr{A}_4$ nach $\mathscr{P}$ und nach $\mathscr{E}$ respective mit den bezüglichen Gegenflächen durch $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3, \mathscr{P}_4$; $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \mathscr{E}_3, \mathscr{E}_4$; dass die Schnittpunkte der Ebenen von $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$, $\mathscr{A}_3\mathscr{A}_4$, $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_3$, $\mathscr{A}_2\mathscr{A}_4$, $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_4$, $\mathscr{A}_2\mathscr{A}_3$ nach $\mathscr{P}$ und $\mathscr{E}$ mit den entsprechenden Gegenkanten $\mathscr{A}_3\mathscr{A}_4$, $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$, etc. respective durch $\mathscr{P}_{34}, \mathscr{P}_{12}, \mathscr{P}_{24}, \mathscr{P}_{13}, \mathscr{P}_{23}, \mathscr{P}_{14}$; $\mathscr{E}_{34}, \mathscr{E}_{12}$, etc. und dass ebenso die Schnittpunkte der Ebenen Π und E mit den Kanten des Tetraeders in derselben

Ordnung mit Π_{34}, Π_{12}, etc., E_{34}, E_{12}, etc. bezeichnet werden (Fig. 4).

Dann hat man

$$\frac{x_1}{x_4} = (\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 . \mathcal{A}_1\mathcal{A}_4\mathcal{E}\mathcal{P}) = (\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4\mathcal{E}_{14}\mathcal{P}_{14}),$$
$$\frac{\xi_1}{\xi_4} = (A_2A_3 . A_1A_4E\Pi) = (\mathcal{A}_4\mathcal{A}_1E_{14}\Pi_{14}),$$
$$\frac{x_2}{x_4} = (\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3 . \mathcal{A}_2\mathcal{A}_4\mathcal{E}\mathcal{P}) = (\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4\mathcal{E}_{24}\mathcal{P}_{24}),$$
$$\frac{\xi_2}{\xi_4} = (A_1A_3 . A_2A_4E\Pi) = (\mathcal{A}_4\mathcal{A}_2E_{24}\Pi_{24}),$$
$$\frac{x_3}{x_4} = (\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 . \mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{E}\mathcal{P}) = (\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{E}_{34}\mathcal{P}_{34}),$$
$$\frac{\xi_3}{\xi_4} = (A_1A_2 . A_3A_4E\Pi) = (\mathcal{A}_4\mathcal{A}_3E_{34}\Pi_{34});$$

damit ist zu verbinden

$$-1 = (\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4E_{14}\mathcal{E}_{14}) = (\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4E_{24}\mathcal{E}_{24}) = (\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4E_{34}\mathcal{E}_{34})$$

und man erhält durch Multiplication der Brüche in den ξ und ihrer Werthe mit den entsprechenden harmonischen Relationen die Gruppe

$$-\frac{\xi_1}{\xi_4} = (\mathcal{A}_4\mathcal{A}_1\mathcal{E}_{14}\Pi_{14}),$$
$$-\frac{\xi_2}{\xi_4} = (\mathcal{A}_4\mathcal{A}_2\mathcal{E}_{24}\Pi_{24}),$$
$$-\frac{\xi_3}{\xi_4} = (\mathcal{A}_4\mathcal{A}_3\mathcal{E}_{34}\Pi_{34});$$

diese giebt aber durch Multiplication mit den entsprechenden Brüchen in den x und ihren Werthen die Gleichungen

$$-\frac{\xi_1 x_1}{\xi_4 x_4} = (\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4\Pi_{14}\mathcal{P}_{14}),$$
$$-\frac{\xi_2 x_2}{\xi_4 x_4} = (\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4\Pi_{24}\mathcal{P}_{24}),$$
$$-\frac{\xi_3 x_3}{\xi_4 x_4} = (\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\Pi_{34}\mathcal{P}_{34}).$$

Liegt dann der Punkt $\mathcal{P}$ in der Ebene Π, so ist jede der drei Reihen, deren Doppelverhältnisse in den letzten Gleichungen stehen, von P aus auf die Ebene der beiden andern zu projicieren, z. B. wie in Fig. 4 ausgeführt ist, die erste Reihe $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4\Pi_{14}P_{14}$ auf die Ebene $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ in $P_1\mathcal{A}_4\Pi^*_{14}P_{23}$.

Für die Doppelverhältnisse von drei geraden Punktreihen in einer Ebene aber wie $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4\Pi_{24}P_{24}$, $\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\Pi_{34}P_{34}$, $P_1\mathcal{A}_4\Pi^*_{14}P_{23}$, die nach Punkten $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, P_1 von demselben Punkte $\mathcal{A}_4$ aus gehen, während dieser wie jene in ihnen correspondierende Stellen einnehmen, für welche dann drei weitere correspondierende Punkte Π_{24}, Π_{34}, Π^*_{14} in einer Geraden liegen und die drei letzten die Schnittpunkte der Geraden von P_1 nach den Ecken $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_2$ mit den Gegenseiten ihres Dreiecks sind, gilt immer die Relation

$$(\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4\Pi_{24}P_{24}) + (\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\Pi_{34}P_{34}) + (P_1\mathcal{A}_4\Pi^*_{14}P_{23}) = 1.$$

Um sie zu begründen, denken wir die Figur der drei Reihen central auf eine Ebene projiciert, welche der projicierenden Ebene von $\Pi^*_{14}\Pi_{24}\Pi_{34}$ parallel ist, so dass das Bild dieser Geraden $\Pi^{*\prime}_{14}\Pi'_{24}\Pi'_{34}$ unendlich fern liegt; wenn wir dann die Bilder der Punkte durch dieselben Buchstaben mit Beifügung eines Striches bezeichnen, so wird die vorige Summe, die linke Seite der Relation

$$(\mathcal{A}'_2\mathcal{A}'_4\infty P'_{24}) + (\mathcal{A}'_3\mathcal{A}'_4\infty P'_{34}) + (P'_1\mathcal{A}'_4\infty P'_{23})$$

oder nach einer leicht verständlichen Bezeichnung der Verhältnisse, nach denen die Geraden $\mathcal{A}'_3P'_1$, $P'_1\mathcal{A}'_2$, $\mathcal{A}'_2\mathcal{A}'_3$ die zwischen den Punkten $\mathcal{A}'_4\mathcal{A}'_2$, $\mathcal{A}'_4\mathcal{A}'_3$, $\mathcal{A}'_4P'_1$ gelegenen Strecken theilen,

$$(\mathcal{A}'_4,\ \mathcal{A}'_2,\ \mathcal{A}'_3P'_1) + (\mathcal{A}'_4,\ \mathcal{A}'_3,\ P'_1\mathcal{A}'_2) + (\mathcal{A}'_4,\ P'_1,\ \mathcal{A}'_2\mathcal{A}'_3).$$

Dann kann man aber für diese Verhältnisse die äquivalenten Verhältnisse von Dreiecksflächen setzen und hat für ihre Summe

$$\frac{\Delta \mathfrak{A}'_4 \mathfrak{A}'_3 \mathfrak{P}'_1}{\Delta \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{A}'_3 \mathfrak{P}'_1} + \frac{\Delta \mathfrak{A}'_4 \mathfrak{P}'_1 \mathfrak{A}'_2}{\Delta \mathfrak{A}'_3 \mathfrak{P}'_1 \mathfrak{A}'_2} + \frac{\Delta \mathfrak{A}'_4 \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{A}'_3}{\Delta \mathfrak{P}'_1 \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{A}'_3}$$

$$= \frac{\Delta \mathfrak{A}'_4 \mathfrak{A}'_3 \mathfrak{P}'_1 + \Delta \mathfrak{P}'_1 \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{A}'_4 - \Delta \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{A}'_4 \mathfrak{A}'_3}{\Delta \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{A}'_3 \mathfrak{P}'_1},$$

$$\text{d. h.} = \frac{\Delta \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{A}'_3 \mathfrak{P}'_1}{\Delta \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{A}'_3 \mathfrak{P}'_1} = 1.$$

Sobald also die Ebene Π den Punkt $\mathfrak{P}$ enthält und nur, wenn diess der Fall ist, besteht zwischen den Coordinaten ξ_i von jener und den Coordinaten x_i von diesem nach den gemachten Voraussetzungen die Gleichung

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0.$$

10. Sind die ξ_i constante Grössen x_i, so gilt für die Coordinaten x_i aller Punkte der durch sie bestimmten Ebene die Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$

die man als die Gleichung der Ebene (a_1, a_2, a_3, a_4) in tetrametrischen Punkt-Coordinaten zu bezeichnen hat; ihre Coefficienten sind die tetrametrischen Coordinaten der Ebene.

Sind dagegen die x_i constante Grössen α_i, so gilt für die Coordinaten ξ_i aller Ebenen aus dem durch sie bestimmten Punkte die Gleichung

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 + \alpha_4 \xi_4 = 0,$$

die man als die Gleichung des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ in tetrametrischen Ebenen-Coordinaten bezeichnen muss und deren Coefficienten die tetrametrischen Coordinaten desselben sind. Man nennt die entwickelten Coordinaten auch homogene Coordinaten, weil die Gleichungen der geometrischen Gebilde in denselben homogen werden. (Vgl. §§, 3, 5.)

In dieser Homogeneität liegt der analytische Hauptvorzug derselben für allgemeine Entwickelungen.

Geht die Ebene | Liegt der Punkt

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

durch drei feste Punkte y, z, w, | in den drei festen Ebenen η, ζ, ω,

so genügen die Coefficienten der allgemeinen Gleichung den Bedingungen

$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 + \xi_4 y_4 = 0,$	$\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 + \eta_4 x_4 = 0,$
$\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 + \xi_4 z_4 = 0,$	$\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3 + \zeta_4 x_4 = 0,$
$\xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 + \xi_3 w_3 + \xi_4 w_4 = 0,$	$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 + \omega_4 x_4 = 0,$

und man erhält aus denselben durch Elimination der ξ, respective der x die Coefficientenbestimmung der Gleichung der Verbindungsebene der drei Punkte und der Gleichung des Schnittpunktes der drei Ebenen.

Mit Hilfe der Gleichungen

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 y_1 + \xi_3 z_1 + \xi_4 w_1 = 0,$$
$$\xi_1 x_2 + \xi_2 y_2 + \xi_3 z_2 + \xi_4 w_2 = 0,$$
$$\xi_1 x_3 + \xi_2 y_3 + \xi_3 z_3 + \xi_4 w_3 = 0,$$

— deren Gruppe durch eine vierte ergänzt werden kann — erhält man durch Multiplication mit den Faktorengruppen

$$\text{a)} \begin{vmatrix} y_2, z_2 \\ y_3, z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_3, z_3 \\ y_1, z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1, z_1 \\ y_2, z_2 \end{vmatrix}; \text{ b)} \begin{vmatrix} z_2, x_2 \\ z_3, x_3 \end{vmatrix}, \ldots; \text{ c)} \begin{vmatrix} x_2, y_2 \\ x_3, y_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

die Relationen

$$\begin{vmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{vmatrix} \xi_1 + \begin{vmatrix} w_1, w_2, w_3 \\ y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{vmatrix} \xi_4 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{vmatrix} \xi_2 + \begin{vmatrix} w_1, w_2, w_3 \\ z_1, z_2, z_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{vmatrix} \xi_4 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} z_1, z_2, z_3 \\ x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \end{vmatrix} \xi_3 + \begin{vmatrix} w_1, w_2, w_3 \\ x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \end{vmatrix} \xi_4 = 0.$$

Wir merken an, dass in denselben die Auflösung von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten

$\xi_1 : \xi_4$, $\xi_2 : \xi_4$, $\xi_3 : \xi_4$ enthalten ist, also auch die Bestimmung der Coordinaten des Durchschnittspunktes von drei Ebenen und der Verbindungsebene von drei Punkten, die zu deren Construction führen. (Das Analoge gilt in § 7.)

Man multipliciert sonach die Gleichungen in den ξ, respective den x mit den Factoren

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} z_1, & z_2, & z_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} w_1, & w_2, & w_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix}$$

und den gleichgebildeten aus den ξ, η, ζ, ω der Reihe nach und erhält die Eliminationsresultate in der Form

$$x_4 \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix} - y_4 \begin{vmatrix} z_1, & z_2, & z_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{vmatrix} + z_4 \begin{vmatrix} w_1, & w_2, & w_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{vmatrix} - w_4 \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

und der entsprechenden in den ξ, η, ζ, ω oder

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \\ w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \end{vmatrix} = 0 \text{ und } \begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3, & \zeta_4 \\ \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \omega_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Da man die nämlichen Determinanten aber auch als Resultate der Elimination derselben Grössen zwischen den Systemen von Gleichungen

$$lx_i + my_i + nz_i + pw_i = 0 \text{ und } \lambda\xi_i + \mu\eta_i + \nu\zeta_i + \pi\omega_i = 0$$
$$\text{für } i = 1, 2, 3, 4$$

betrachten kann, so erhält man für die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Ebene von y, z, w die Bestimmungen

$$x_i = -\frac{my_i + nz_i + pw_i}{l}$$

und für die Coordinaten der beliebigen Ebene durch den Schnittpunkt von η, ζ, ω die analogen

$$\xi_i = -\frac{\mu\eta_i + \nu\zeta_i + \pi\omega_i}{\lambda}. \text{ (Vergl. § 7.)}$$

Wenn die x_i respective ξ_i in Gleichungen eintreten, die in ihnen homogen sind, so wird man für die laufenden Coordinaten mit Hinweglassung der Nenner setzen dürfen

$$x_i = my_i + nz_i + pw_i \quad \text{respective} \quad \xi_i = \mu\eta_i + \nu\zeta_i + \pi\omega_i$$

und innerhalb der Gebilde zweiter Stufe (§ 7)

$$x_i = my_i + nz_i \quad , \quad \xi_i = \mu\eta_i + \nu\zeta_i .$$

11. Setzen wir voraus, dass die Ebene $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4$ oder A_1 die unendlich ferne Ebene des Raumes sei, so bilden die Punkte $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$ und $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$ die Parallelprojectionen von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{E}$ nach den Richtungen der drei von $\mathcal{A}_1$ ausgehenden Kanten auf die Flächen der jedesmaligen beiden andern und man hat in $\mathcal{A}_1\mathcal{E}_{12}\mathcal{E}_4\mathcal{E}_{13}\mathcal{E}_2\mathcal{E}_{14}\mathcal{E}_3\mathcal{E}$ das projicierende Parallelepiped von $\mathcal{E}$ und entsprechend das von $\mathcal{P}$; ferner werden wegen

$$(\mathcal{A}_1 \infty E_{1i}\mathcal{E}_{1i}) = -1$$

$$\mathcal{A}_1E_{12} = -\mathcal{A}_1\mathcal{E}_{12}, \quad \mathcal{A}_1E_{13} = -\mathcal{A}_1\mathcal{E}_{13}, \quad \mathcal{A}_1E_{14} = -\mathcal{A}_1\mathcal{E}_{14}$$

(Fig. 5).

Man erhält somit

für die Punkt-Coordinaten	für die Ebenen-Coordinaten
$x_1 = \frac{p_1}{e_1} = 1, \ \frac{x_2}{x_1} = x_2 = \frac{\mathcal{A}_1\mathcal{P}_{12}}{\mathcal{A}_1\mathcal{E}_{12}},$	$\frac{\xi_2}{\xi_1} = -\frac{1}{\frac{\mathcal{A}_1\Pi_{12}}{\mathcal{A}_1\mathcal{E}_{12}}}, \ \frac{\xi_3}{\xi_1} = -\frac{1}{\frac{\mathcal{A}_1\Pi_{13}}{\mathcal{A}_1\mathcal{E}_{13}}},$
$\frac{x_3}{x_1} = x_3 = \frac{\mathcal{A}_1\mathcal{P}_{13}}{\mathcal{A}_1\mathcal{E}_{13}},$	$\frac{\xi_4}{\xi_1} = -\frac{1}{\frac{\mathcal{A}_1\Pi_{14}}{\mathcal{A}_1\mathcal{E}_{14}}};$
$\frac{x_4}{x_1} = x_4 = \frac{\mathcal{A}_1\mathcal{P}_{14}}{\mathcal{A}_1\mathcal{E}_{14}};$	

d. h. man hat, wenn $\mathcal{A}_1\mathcal{E}_{12} = \mathcal{A}_1\mathcal{E}_{13} = \mathcal{A}_1\mathcal{E}_{14}$ gesetzt und als Einheit des Längenmaasses gewählt wird, die gewöhnlichen Cartesischen Punkt-Coordinaten einerseits und die Plücker'schen Ebenen-Coordinaten anderseits.

Man bezeichne für die erstern

$$x_2 = \mathcal{A}_1 P_{12} = x,\ x_3 = \mathcal{A}_1 P_{13} = y,\ x_4 = \mathcal{A}_1 P_{14} = z$$

und erhält die Gleichung der Ebene in der Form

$$a_1 + a_2\, x + a_3\, y + a_4\, z = 0$$

oder

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

die Ebene durch drei Punkte 1, 2, 3 speciell

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

endlich die Coordinaten eines Punktes in derselben

$$x = \frac{m x_1 + n x_2 + p x_3}{m + n + p}, \text{ etc.}$$

Man bezeichne für die letztern

$$-\frac{1}{\mathcal{A}_1 \Pi_{12}} = \xi,\ -\frac{1}{\mathcal{A}_1 \Pi_{13}} = \eta,\ -\frac{1}{\mathcal{A}_1 \Pi_{14}} = \zeta$$

und erhält die Gleichung des Punktes in der Form

$$\alpha_1 + \alpha_2\, \xi + \alpha_3\, \eta + \alpha_4\, \zeta = 0$$

oder

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0;$$

den Punkt in drei Ebenen 1, 2, 3 speciell

$$\begin{vmatrix} \xi, & \eta, & \zeta, & 1 \\ \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1, & 1 \\ \xi_2, & \eta_2, & \zeta_2, & 1 \\ \xi_3, & \eta_3, & \zeta_3, & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

endlich die Coordinaten einer Ebene durch denselben

$$\xi = \frac{\mu \xi_1 + \nu \xi_2 + \pi \xi_3}{\mu + \nu + \pi}, \text{ etc.}$$

Man sieht, dass der Uebergang von den allgemeinen projectivischen Coordinaten zu den elementaren Coordinatensystemen von Cartesius und Plücker einer Reliefbildung entspricht, der Bildung eines zu dem gegebenen centrisch-collinearen Systems, in welchem die eine Fläche des Fundamental-Tetraeders zur Gegenebene seines Systems gewählt wird. So lässt sich auch umgekehrt von den elementaren Systemen zu den allgemeinen gelangen, am einfachsten jedoch unter Voraussetzung der Einsicht, dass die Wahl der Längeneinheit und die Festsetzung des positiven Sinnes in den Axen für dieselben nichts anderes als die Festsetzung des Einheitpunktes und der Einheitebene bedeutet. Die Entwickelung dieses Uebergangs kann dann aber in ähnlicher Weise wie in der angezogenen auf die Ebene und die Centralprojection bezüglichen Stelle von Jacobi gestaltet werden.

12. Eine gerade Linie im Raum — das Element der Grundgebilde vierter Stufe — ist die Verbindungslinie von zwei Punkten y, z — wir setzen allgemeine projectivische Coordinaten voraus — und die Durchschnittslinie von zwei Ebenen η und ζ; daraus entspringen die Bedingungen

$$\begin{aligned}
\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 + \eta_4 y_4 &= 0, \\
\eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + \eta_3 z_3 + \eta_4 z_4 &= 0; \\
\zeta_1 y_1 + \zeta_2 y_2 + \zeta_3 y_3 + \zeta_4 y_4 &= 0, \\
\zeta_1 z_1 + \zeta_2 z_2 + \zeta_3 z_3 + \zeta_4 z_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Die successive Elimination von $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ zwischen den beiden ersten Gleichungen giebt das System

$$\begin{aligned}
(y_1 z_2 - y_2 z_1)\eta_2 - (y_3 z_1 - y_1 z_3)\eta_3 + (y_1 z_4 - y_4 z_1)\eta_4 &= 0, \\
-(y_1 z_2 - y_2 z_1)\eta_1 + (y_2 z_3 - y_3 z_2)\eta_3 + (y_2 z_4 - y_4 z_2)\eta_4 &= 0, \\
(y_3 z_1 - y_1 z_3)\eta_1 - (y_2 z_3 - y_3 z_2)\eta_2 + (y_3 z_4 - y_4 z_3)\eta_4 &= 0, \\
-(y_1 z_4 - y_4 z_1)\eta_1 - (y_2 z_4 - y_4 z_2)\eta_2 - (y_3 z_4 - y_4 z_3)\eta_3 &= 0;
\end{aligned}$$

und aus den beiden letzten Gleichungen folgt ebenso dasselbe System von Gleichungen durch Elimination der ζ, natürlich mit Vertauschung der η und ζ.

Eliminiert man dagegen nach einander y_1, y_2, y_3, y_4 zwischen der ersten und dritten Gleichung, so erhält man

$$\begin{aligned}
(\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1) y_2 - (\eta_3 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_3) y_3 + (\eta_1 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_1) y_4 &= 0, \\
-(\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1) y_1 + (\eta_2 \zeta_3 - \eta_3 \zeta_2) y_3 + (\eta_2 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_2) y_4 &= 0, \\
(\eta_1 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_1) y_1 - (\eta_2 \zeta_3 - \eta_3 \zeta_2) y_2 + (\eta_3 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_3) y_4 &= 0, \\
-(\eta_1 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_1) y_1 - (\eta_2 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_2) y_2 - (\eta_3 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_3) y_3 &= 0;
\end{aligned}$$

und aus der zweiten und vierten Gleichung dasselbe System unter Vertauschung der y mit den z.

Vergleicht man die entsprechenden Gleichungen beider Systeme in jeder Gruppe mit einander, so erhält man die Gleichheit der folgenden Verhältnisse aus beiden Gruppen:

$$(y_1 z_2 - y_2 z_1) : (y_2 z_3 - y_3 z_2) : (y_3 z_1 - y_1 z_3) : (y_1 z_4 - y_4 z_1)$$
$$: (y_2 z_4 - y_4 z_2) : (y_3 z_4 - y_4 z_3)$$
$$= (\eta_3 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_3) : (\eta_1 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_1) : (\eta_2 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_2) : (\eta_2 \zeta_3 - \eta_3 \zeta_2)$$
$$: (\eta_3 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_3) : (\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1).$$

Wir setzen

$p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$, $\pi_{ik} = \eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i$, also $p_{ik} = -p_{ki}$, etc. und haben dann die Identitäten

$$p_{12} p_{34} + p_{23} p_{14} + p_{31} p_{24} = 0 \equiv P,$$
$$\Pi_{12} \Pi_{34} + \Pi_{23} \Pi_{14} + \Pi_{31} \Pi_{24} = 0 \equiv \Pi.$$

Die sechs Grössen p_{ik} — und ebenso die π_{ik} — sind unabhängig von der Wahl der zwei Punkte y, z in der geraden Linie oder von der der beiden Ebenen η, ζ durch dieselbe, die zur Bestimmung dienten; denn nach §§ 7 und 10 können z. B. zwei andere Punkte der Geraden yz durch

$$m_1 y_1 + n_1 z_1,\ m_1 y_2 + n_1 z_2,\ m_1 y_3 + n_1 z_3,\ m_1 y_4 + n_1 z_4;$$
$$m_2 y_1 + n_2 z_1,\ m_2 y_2 + n_2 z_2,\ m_2 y_3 + n_2 z_3,\ m_2 y_4 + n_2 z_4$$

dargestellt werden; wenn man aber statt $y_1, \ldots; z_1, \ldots$ diese Werthe in die p_{ik} einsetzt, so verändern sich diese nach dem Multiplicationsgesetz der Determinanten sämmtlich durch Hinzutritt des Factors $(m_1 n_2 - m_2 n_1)$ und ihre Verhältnisse bleiben ungeändert. Ebenso für zwei andere durch die Linie $\eta\zeta$ gehende Ebenen, für die man hat $\mu_1 \eta_1 + \nu \zeta_1, \ldots$; $\mu_2 \eta_1 + \nu_2 \zeta_1$. Man kann daher die p_{ik} — respective die verhältnissgleichen π_{ik} — als Coordinaten der geraden Linie im Raum betrachten; es ergiebt sich auch aus den

Gleichungen, die sie definieren, dass die p_{ik} nichts anderes sind als die Coefficienten in den Gleichungen, also die Coordinaten derjenigen Ebenen, welche die Gerade aus den Ecken des Fundamentaltetraeders projicieren, die π_{ik} aber die Coefficienten in den Gleichungen oder die Coordinaten derjenigen Punkte, in welchen die Gerade die Fläche des Fundamentaltetraeders durchschneidet. (Man bildet die fraglichen Gleichungen leicht nach § 10.)

Auch ist die Determinante der obigen Gruppen von Gleichungen mit den η respective den y nichts anderes als das Quadrat der linken Seite der bezüglichen Identität $P = 0$ respective $\Pi = 0$ und zugleich die Bedingung dafür, dass die vorbezeichneten vier projicierenden Ebenen durch dieselbe Gerade gehen und die vier Punkte der Tetraederflächen in derselben Geraden liegen; d. h. diese Identität

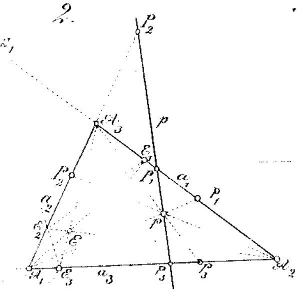
$$\begin{vmatrix} 0, & p_{12}, & -p_{31}, & p_{14} \\ -p_{12}, & 0, & p_{23}, & p_{24} \\ p_{31}, & -p_{23}, & 0, & p_{34} \\ -p_{14}, & -p_{24}, & -p_{34}, & 0 \end{vmatrix} = (p_{12}\,p_{34} + p_{23}\,p_{14} + p_{31}\,p_{24})^2 = 0$$

ist die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass sechs Grössen p_{ik} oder π_{ik} die Coordinaten einer Geraden sind. Durch sie wird zugleich die Zahl der unabhängigen Veränderlichen, welche in die Ausdrücke der Coordinaten eintreten, auf vier reduciert, entsprechend den vier geometrischen Bedingungen, welche eine Gerade im Raum bestimmen.

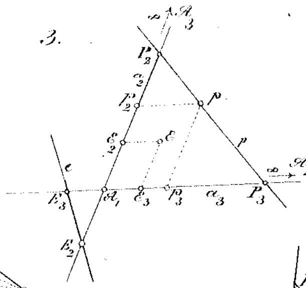
Diese Coordinaten, die homogenen Coordinaten der geraden Linie, sind die durch eine Abhandlung von Plücker „Philos. Transact.“ Vol. 155 (1865) und durch das Werk „Neue Geometrie des Raumes“ 1868—69 (Leipzig, Teubner) allgemein bekannt gewordenen „Strahlen- und Axen-Coordinaten“, die jedoch schon 1860 von M. Cayley („Quart. Journ. of Math.“ Vol. 3) aufgestellt und benutzt wurden. Auf ihre weitere Entwicklung ist hier nicht einzutreten.

Es unterbleibt auch die allgemeine Erörterung des Uebergangs zu metrischen Specialisierungen, die sich an die Festsetzung der Dimensionen des Fundamental-Tetraeders respective Dreiecks und der Lage des Einheitpunktes ebenso knüpft, wie die constructive Behandlung metrischer Verhältnisse in der darstellenden Geometrie an die Festsetzung des Projectionscentrums und eines Axensystems. Für die Untersuchung projectivischer Eigenschaften sind die Relationen, welche zwischen den Coordinaten und den Massverhältnissen des Fundamental-Tetraeders bestehen, entbehrlich (§§ 4, 8). Practisch liegt aber die Sache so, dass die rechtwinkligen Cartesischen und Plücker'schen Coordinaten diejenigen Specialisierungen der projectivischen Coordinaten sind, welche zur Untersuchung metrischer Eigenschaften vorzugsweise sich eignen, weil die unendlich ferne Ebene und das orthogonale Polarsystem in derselben, von denen alle Metrik abhängt, hier in das Fundamental-Tetraeder aufgenommen sind: die unendlich ferne Ebene als vierte Fläche desselben, das fragliche Polarsystem aber in der Art, dass die Richtungen der drei Kanten und die Stellungen der drei Flächen im Endlichen in ihm conjugierte Tripel sind.

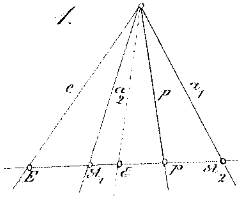
2.



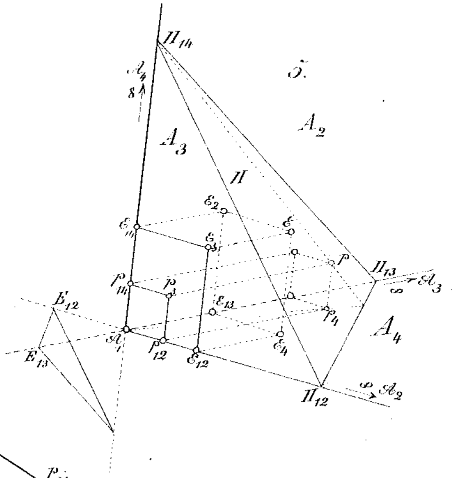
3.



1.



5.



4.