Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

für die Fläche eines Kreises.*

Von

H. A. Schwarz.

In seiner Inauguraldissertation (Art. 18, 19, 21) und in seiner Abhandlung über die Theorie der Abelschen Funktionen (Borchardt's Journal, Bd. 54, pag. 112, 114) hat Riemann einige die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ für ein gegebenes Gebiet T unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen betreffende allgemeine Lehrsätze ausgesprochen, für welche meines Wissens ein strenger Beweis gegenwärtig noch nicht bekannt ist.

Auch für den einfachen und wichtigen Spezialfall, in welchem das gegebene Gebiet eine schlichte Kreisfläche ist, können die bisherigen Untersuchungen, soweit meine Kenntniss derselben reicht, nicht als vollständig angesehen werden.

---

* Diese Mittheilung bildet einen Theil einer grösseren Abhandlung über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$.

Wenn der Werth der gesuchten Funktion u in jedem Punkte der Begrenzung des Gebietes vorgeschrieben ist und diese längs der Begrenzung vorgeschriebene Werthenreihe ausser der Bedingung, stetig zu sein, keiner andern Beschränkung unterworfen wird, so ist die Annahme nicht zulässig, dass die gesuchte Funktion u längs der Begrenzung endliche partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ beziehungsweise $\frac{\partial u}{\partial p}$ besitze, da unter den gemachten Voraussetzungen partielle Ableitungen der Funktion u längs des Randes im Allgemeinen überhaupt nicht existiren. Auf diesen Umstand, auf den vor mehreren Jahren Hr. Weierstrass in seinen Vorlesungen aufmerksam gemacht hat, ist, soviel ich weiss, bisher nicht Rücksicht genommen worden.

Im Nachfolgenden beschränke ich mich auf die Betrachtung des Falles, in welchem das Gebiet der unabhängigen Variablen x und y eine die Ebene einfach bedeckende Kreisfläche S ist; jedoch mit Ausschliessung von Stetigkeitsunterbrechungen und unendlich grossen Werthen in der für die Funktion u längs der Begrenzung der Fläche S vorgeschriebenen Werthenreihe.

§ 1.

In der Ebene A, deren Punkte die komplexe Grösse $z = x + yi = r . e^{i\varphi}$ geometrisch darstellen, sei gegeben ein ganz im Endlichen liegender die Ebene allenthalben nur einfach bedeckender Bereich T, dessen Begrenzung von einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Linien gebildet wird.

Für den Bereich T sei definirt eine (reelle) Funktion u der beiden reellen unabhängigen Variablen x, y und zwar als eine endliche, stetige und eindeutige Funktion derselben für alle Punkte im Innern und auf der Begrenzung von T.

Es wird vorausgesetzt, dass die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

existiren, endliche, stetige und eindeutige Funktionen von x und y sind und die Gleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

erfüllen.

Jedoch werden diese, die Ableitungen betreffenden Voraussetzungen entweder

I. nur für alle innern Punkte des Gebietes T

oder

II. auch für alle Punkte der Begrenzung von T einschliesslich gestellt.

Hiernach sollen die für u und für die Ableitungen von u gestellten Voraussetzungen im Folgenden als „Bedingungen I" und „Bedingungen II" von einander unterschieden werden.

§ 2.

a. Sind u und u' zwei für denselben Bereich T den Bedingungen II (s. den vorhergehenden Paragraph) genügende Funktionen, so haben die beiden Integrale

$$\int (u \Delta u' - u' \Delta u)\, dT \quad \text{und} \quad -\int \left(u \frac{\partial u'}{\partial p} - u' \frac{\partial u}{\partial p}\right) ds,$$

von denen das erste über den Bereich T selbst, das zweite über alle Begrenzungslinien desselben zu erstrecken ist, den Werth Null; das erste, weil Δu und $\Delta u'$ beständig gleich Null sind, das zweite, weil es durch theilweise Integration aus dem ersten erhalten werden kann (s. Green: An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism. Crelle's Journal, Bd. 44, pag. 360; Riemann's Inaug.-Diss., Art. 7 bis 10).

b. Setzt man $u' = 1$, also $\frac{\partial u'}{\partial p} = 0$, so ergibt sich der Satz: Das über alle Begrenzungslinien eines Bereiches T, für welchen die Funktion u den Bedingungen II genügt, zu erstreckende Integral $\int \frac{\partial u}{\partial p} ds$ hat den Werth Null.

§ 3.

Eine Funktion u genüge für die Fläche S des mit dem Radius 1 um den Punkt $z = o$ beschriebenen Kreises den Bedingungen I.

Man setze $u' = \log r$ (s. Riemann's Dissertat. Art. 10). Die Curven konstanter Werthe von u' sind konzentrische Kreise, deren Mittelpunkt der Punkt $z = o$ ist. Sind R_1 und R_2 zwei spezielle zwischen 1 und 0 liegende Werthe von r mit der Bedingung $1 > R_1 > R_2 > 0$, so genügen die Funktionen u und u' für das von den beiden Kreisen mit dem Mittelpunkte $z = o$ und den Radien R_1 und R_2 begrenzte Ringgebiet T den Bedingungen II und es sind daher die Voraussetzungen des Satzes § 2, a erfüllt.

Das über die ganze Begrenzung von T erstreckte Integral
$$\int \left(u \frac{\partial u'}{\partial p} - u' \frac{\partial u}{\partial p}\right) ds$$
hat demnach den Werth Null. Es ist zu zeigen, dass jedes der über die ganze Begrenzung von T erstreck-

ten Integrale $\int u \frac{\partial u'}{\partial p} ds$ und $\int u' \frac{\partial u}{\partial p} ds$ für sich den Werth Null hat.

Längs des Kreises mit dem Radius R_1 hat u' den konstanten Werth $\log R_1$ und längs des Kreises mit dem Radius R_2 den konstanten Werth $\log R_2$. Es ist also

$$\int u' \frac{\partial u}{\partial p} ds = \log R_1 \,.\, \int\limits_{(r=R_1)} \frac{\partial u}{\partial p} ds + \log R_2 \,.\, \int\limits_{(r=R_2)} \frac{\partial u}{\partial p} ds.$$

Wendet man den Satz § 2, b auf die Fläche des Kreises mit dem Radius R_1 und auf das Ringgebiet T an, so erhält man

$$\int\limits_{(r=R_1)} \frac{\partial u}{\partial p} ds = 0, \quad \int\limits_{(r=R_1)} \frac{\partial u}{\partial p} ds + \int\limits_{(r=R_2)} \frac{\partial u}{\partial p} ds = 0,$$

folglich ist auch $\displaystyle\int\limits_{(r=R_2)} \frac{\partial u}{\partial p} ds = 0.$

Daher hat das Integral $\int u' \frac{\partial u}{\partial p} ds$ und also auch das Integral $\int u \frac{\partial u'}{\partial p} ds$ den Werth Null, wenn beide Integrale über die ganze Begrenzung von T erstreckt werden.

Es ergibt sich für $r = R_1$, $\frac{\partial u'}{\partial p} = -\frac{1}{R_1}$ und für $r = R_2$, $\frac{\partial u'}{\partial p} = \frac{1}{R_2}$. Setzt man daher für ds seinen Werth $R_1 . d\varphi$, beziehlich $R_2 . d\varphi$ und bezeichnet den Werth der Funktion u in dem Punkte $z = r \,.\, e^{i\varphi}$ mit $u(r, \varphi)$, so erhält man aus der Gleichung $\int u \frac{\partial u'}{\partial p} ds = 0$ die folgende

$$\int_0^{2\pi} u(R_2, \varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} u(R_1, \varphi)\, d\varphi.$$

In dieser Gleichung sind R_2 und R_1 zwei von einander unabhängige veränderliche Grössen, welche alle Werthe zwischen 0 und 1 annehmen können, wobei jedoch die Werthe 0 und 1 zunächst noch ausgeschlossen sind. Nun folgt aber aus der Voraussetzung, dass die Function u eine stetige Funktion der Variablen x und y, also auch der Variablen r und φ ist, dass der Werth des Integrals $\int\limits_0^{2\pi} u\,(r, \varphi)\, d\varphi$ für alle Werthe von r zwischen 0 und 1, einschliesslich der Werthe 0 und 1, sich mit dem Werthe von r nicht anders als stetig ändern kann. Aus diesem Grunde bleibt die obige Gleichung, obgleich bei deren Herleitung zunächst vorausgesetzt wurde, dass R_2 und R_1 von 0 und 1 verschieden seien, auch dann noch bestehen, wenn $R_2 = 0$ und $R_1 = 1$ gesetzt wird. Für den Werth $R_2 = 0$ geht das Integral auf der linken Seite in $2\pi \,.\, u(\mathrm{o})$ über, wenn mit $u(\mathrm{o})$ der Werth von u im Punkte $z = \mathrm{o}$ bezeichnet wird. Es besteht daher die Gleichung

$$u(\mathrm{o}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u\,(1, \varphi)\, d\varphi.$$

§ 4.

Bei zweckmässig geänderter Bestimmung der Funktion u' führt die im vorhergehenden Paragraphen entwickelte Schlussweise, welche dem Art. 10 der Dissertation Riemann's entnommen ist, auch zu einem Ausdruck für den Werth $u\,(r, \varphi)$ der Funktion u in einem beliebigen, dem Innern der Kreisfläche angehörenden Punkte $z_0 = r\,.\,e^{i\varphi}$, unter der alleinigen

Voraussetzung, dass die Funktion u für die Fläche S den Bedingungen I genüge.

Dem Punkte $z_0 = r.e^{i\varphi}$ innerhalb der Fläche S werde zugeordnet der Punkt $z'_0 = \frac{1}{r} e^{i\varphi}$ ausserhalb derselben; $0 < r < 1$. Alle Punkte z, deren Abstände von den Punkten z_0 und z'_0, $[z - z_0]$ und $[z - z'_0]$, ein konstantes Verhältniss haben, $\frac{[z - z_0]}{[z - z'_0]} = r \,.\, t$, mit der Einschränkung $0 \leqq t \overline{\overline{<}} 1$, liegen auf einem der Fläche S angehörenden Kreise, dessen Mittelpunkt c und dessen Radius R durch die Gleichungen

$$c = z_0 \,.\, \frac{1 - t^2}{1 - r^2 t^2}, \quad R = \frac{t\,(1 - r^2)}{1 - r^2 t^2}, \quad z_0 - c = z_0 \,.\, R \,.\, t$$

gegeben werden. Für $t = 1$ fällt dieser Kreis mit der Begrenzung von S zusammen, für $t = 0$ geht derselbe in einen Punkt, nämlich in den Punkt z_0 über.

Zu jedem Punkte z von S gehört nach dem Vorhergehenden, sobald der Punkt $z_0 = r.e^{i\varphi}$ fixirt ist, ein Werth von t, $0 \leqq t \overline{\overline{<}} 1$, also auch je ein Werth von c und R. Setzt man nun $z - c = R.e^{i\psi}$, so entspricht jedem Punkte z von S mit Ausnahme des Punktes z_0 ein Werth von ψ, welcher der Bedingung $0 \overline{\overline{<}} \psi < 2\pi$ genügt, und für den die Gleichung $z - c = R \,.\, e^{i\psi}$ erfüllt ist. Da auch umgekehrt zu jedem Werthepaare t, ψ nur ein Werth von z gehört, so können t und ψ als unabhängige Variable gewählt werden. Es geht dann die Funktion u von x und y in eine Funktion von t und ψ über. Der dem Werthepaare t, ψ eindeutig entsprechende Werth von u möge mit $u\,[t;\,\psi]$ bezeichnet werden. Für die Werthe $t = 1$

und $t = 0$ ergeben sich die Identitäten $u[1; \psi] = u(1, \psi)$, $u[0; \psi] = u(r, \varphi)$. Auch in Beziehung auf die Variablen t und ψ ändert sich die Funktion u für alle in Betracht kommenden Werthepaare mit beiden Argumenten stetig.

Man setze u' gleich dem reellen Theile der analytischen Funktion $\log \frac{z - z_0}{z - z'_0}$,

$$u' = \log \frac{[z - z_0]}{[z - z'_0]} = \log (r \,.\, t).$$

Es seien t_1 und t_2 zwei spezielle Werthe von t, welche beide zwischen 1 und 0 liegen, mit der Bedingung $1 > t_1 > t_2 > 0$. R_1 und R_2 seien die Radien der diesen Werthen von t entsprechenden zwei Kreise, T bezeichne das von diesen beiden Kreisen begrenzte Ringgebiet.

Nun genügen die Funktionen u und u' für die Fläche T, die Funktion u für die Fläche des Kreises mit dem Radius R_1 den Bedingungen II; längs beider Begrenzungslinien von T hat die Funktion u' je einen konstanten Werth. Mittelst derselben Schlüsse wie in § 3 wird daher gefolgert, dass das über die ganze Begrenzung von T erstreckte Integral $\int u \frac{\partial u'}{\partial p} ds$ auch in dem vorliegenden Falle den Werth Null hat.

Man erhält für $\frac{\partial u'}{\partial p}$ längs der beiden den Werthen $t = t_1$, $t = t_2$ entsprechenden Begrenzungslinien von T beziehlich die Werthe

$$-\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1 - r^2 t_1^2}{1 - 2 r t_1 \cos(\psi - \varphi) + r^2 t_1^2}$$

und

$$\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1 - r^2 t_2^2}{1 - 2 r t_2 \cos(\psi - \varphi) + r^2 t_2^2}$$

Wenn daher für ds sein Werth $R_1 . d\psi$ beziehlich $R_2 . d\psi$ gesetzt wird, so ergibt sich aus der Gleichung $\int u \frac{\partial u'}{\partial p} ds = 0$ die folgende

$$\int_0^{2\pi} u[t_2; \psi] \frac{1 - r^2 t_2^2}{1 - 2rt_2 \cos(\psi - \varphi) + r^2 t_2^2} \cdot d\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi} u[t_1; \psi] \frac{1 - r^2 t_1^2}{1 - 2rt_1 \cos(\psi - \varphi) + r^2 t_1^2} \cdot d\psi.$$

Die Grössen t_1 und t_2 sind von einander unabhängig und können alle Werthe zwischen 1 und 0 annehmen, ausgenommen die Werthe 1 und 0 selbst. Aus den über die Funktion u gemachten Voraussetzungen folgt aber, dass für alle Werthe von t zwischen 1 und 0, einschliesslich der Werthe 1 und 0, der Werth des Integrals $\int_0^{2\pi} u[t; \psi] \frac{1 - r^2 t^2}{1 - 2rt \cos(\psi - \varphi) + r^2 t^2} d\psi$ sich mit dem Werthe von t nicht anders als stetig ändern kann; daher bleibt die obige Gleichung auch dann noch bestehen, wenn $t_2 = 0$, $t_1 = 1$ gesetzt wird. Für den Werth $t_2 = 0$ geht die linke Seite der Gleichung in $2\pi . u(r, \varphi)$ über, während die rechte Seite für $t_1 = 1$ in $\int_0^{2\pi} u(1, \psi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\psi - \varphi) + r^2} d\psi$ übergeht.

Es besteht daher, wenn die Funktion u für die Kreisfläche S den Bedingungen I genügt, für alle Werthe von r, welche kleiner sind als 1 und für alle Werthe von φ die Gleichung

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \psi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\psi - \varphi) + r^2} d\psi.$$

(Vergl. C. Neumann: Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$. Borchardt's Journal, Bd. 59, pag. 364.)

Also ist der Werth der Funktion u in einem beliebigen Punkte $z = r . e^{i\varphi}$ im Innern der Kreisfläche unter den angegebenen Voraussetzungen nur abhängig von denjenigen Werthen, welche die Funktion u auf der Peripherie des Kreises annimmt, und ausserdem von den Polarkoordinaten jenes Punktes, bezogen auf den Mittelpunkt des Kreises als Pol; überdiess ist $u(r, \varphi)$ durch die genannten Grössen eindeutig ausgedrückt.

Wenn es daher eine Funktion u gibt, welche für die Fläche eines Kreises den Bedingungen I Genüge leistet und auf der Peripherie desselben mit einer gegebenen Funktion $f(\varphi)$ dem Werthe nach übereinstimmt, so ist die Funktion durch diese Bedingungen bestimmt und es gibt nur eine solche Funktion.

§ 5.

Im Vorhergehenden ist gezeigt worden, dass jede Funktion u, welche für eine Kreisfläche S den Bedingungen I genügt, durch diejenigen Werthe eindeutig bestimmt ist, welche dieselbe auf dem Rande von S annimmt. Es entsteht nun die Frage, ob für eine solche Funktion u die Reihe der Randwerthe $u(1, \varphi) = f(\varphi)$ willkürlich vorgeschrieben werden kann?

Diese Frage beantwortet folgender Lehrsatz:

Wenn längs des Randes der Kreisfläche S eine für alle Werthe des reellen Argumentes φ endliche, stetige und eindeutige reelle Funktion $f(\varphi)$, welche bei Vermehrung des Argumentes um 2π periodisch in sich zurückkehrt, sonst aber keiner weiteren Beschränkung unterliegt, willkürlich vorgeschrieben ist, so gibt es jedesmal eine (und nach dem Vorhergehenden nur eine einzige) Funktion u, welche für die Fläche S den Bedingungen I genügt und längs des Randes von S mit der gegebenen Funktion $f(\varphi)$ übereinstimmt.

Diese Funktion wird für alle Punkte $z = r.e^{i\varphi}$ im Innern von S, $r < 1$, dargestellt durch das Integral

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\psi - \varphi) + r^2.} d\psi.$$

Der Beweis dieses Satzes zerfällt in zwei Theile; in dem ersten Theile (a) ist zu zeigen, dass die durch die vorstehende Gleichung definirte Funktion $u(r, \varphi)$ für alle dem Innern von S angehörenden Punkte $z = r \,.\, e^{i\varphi} = x + yi$ in Beziehung auf die Variablen x und y partielle Ableitungen aller Ordnungen besitzt und der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt; in dem zweiten Theile (b) hingegen ist der Nachweis zu führen, dass die Funktion $u(r, \varphi)$ auch in der Nähe des Werthes $r = 1$ eine stetige Function ihrer Argumente ist und für $r = 1$ in die Funktion $f(\varphi)$ stetig übergeht. (S. pag. 126.)

a. Die durch das Integral

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\psi - \varphi) + r^2} \cdot d\psi$$

definirte Funktion u stimmt überein mit dem reellen Theile der durch die Gleichung

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) \cdot \frac{e^{i\psi} + z}{e^{i\psi} - z} \cdot d\psi$$

für alle Werthe von z, deren absoluter Betrag r kleiner ist als 1, mit dem Charakter einer ganzen Funktion eindeutig definirten analytischen Funktion $F(z)$ des komplexen Argumentes $z = r.e^{i\varphi} = x + yi$.

Daher besitzt die Funktion u für alle im Innern der Kreisfläche liegende Punkte z in Beziehung auf die unabhängigen Variablen x und y partielle Ableitungen aller Ordnungen und genügt in demselben Umfange der Differentialgleichung $\Delta u = 0$.

b. Wegen der vorausgesetzten Periodizität der Funktion $f(\psi)$ kann man statt des Integrals

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2} \cdot d\psi$$

das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi+\psi) \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2} \cdot d\psi$$

setzen und da für alle Werthe von r, welche kleiner sind als 1, den Werth $r = 1$ ausgeschlossen, das

Integral $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2} \cdot d\psi$$

den Werth 1 hat, so gilt in demselben Umfange die Gleichung

$$u(r,\varphi) = f(\varphi) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(\varphi+\psi)-f(\varphi)]\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2}d\psi.$$

Es ist nun zu zeigen, dass es möglich ist, für die Differenz $1-r$ eine Grenze festzusetzen, sodass für alle Werthe von r, für welche die Differenz $1-r$ von Null verschieden ist und jene Grenze nicht überschreitet, und für alle Werthe von φ der Werth des Integrals in der vorstehenden Gleichung dem absoluten Betrage nach kleiner ist als eine beliebig kleine vorgeschriebene Grösse. (S. pag. 126.)

Wegen der Periodizität der Funktion $f(\varphi)$ kann das Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$, über welches sich die Integration erstreckt, wenn mit δ eine kleine positive Grösse bezeichnet wird, durch die beiden Intervalle von δ bis $2\pi-\delta$ und von $-\delta$ bis $+\delta$ ersetzt werden.

Während ψ sich in dem Intervalle von δ bis $2\pi-\delta$ befindet, ist der unter dem Integralzeichen vorkommende Nenner stets grösser als $2r(1-\cos\delta)$. Die Differenz $f(\varphi+\psi)-f(\varphi)$ bleibt stets kleiner als $2g$, wenn g den grössten Werth des absoluten Betrages von $f(\varphi)$ bezeichnet. Folglich ist der Beitrag, den dieses Intervall zu dem Werthe des Integrales liefert, numerisch kleiner als $\frac{g(1-r^2)}{r(1-\cos\delta)}$. Wie klein man aber auch die Grösse δ, die immer von Null verschieden bleibt, in der Folge zu wählen für gut finden wird, durch entsprechende Verkleinerung von $1-r$ kann man über die Kleinheit von $\frac{g(1-r^2)}{r(1-\cos\delta)}$ gebieten.

Es bleibt noch das Integral

$$\int_{-\delta}^{+\delta}[f(\varphi+\psi)-f(\varphi)]\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2}d\psi$$

zu betrachten.

Bezeichnet man mit ε eine Grösse, welche der absolute Betrag der Differenz $f(\varphi-\psi)-f(\varphi)$ in dem Intervalle $-\delta \leqq \psi \overline{\overline{<}} \delta$ nicht überschreitet, so ist der

Werth dieses Integrals numerisch kleiner als

$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{+\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2}\,d\psi,$$

also auch keiner als

$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2}\,d\psi,$$

d. h. kleiner als ε.

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktion $f(\varphi)$ lässt sich nun, wie klein auch die von Null verschiedene Grösse ε angenommen werden möge, stets eine von Null verschiedene Grösse δ angeben, sodass für alle dem absoluten Betrage nach die Grösse δ nicht überschreitende Werthe von ψ und zugleich für alle Werthe von φ der absolute Betrag der Differenz $f(\varphi+\psi)-f(\varphi)$ kleiner ist als ε; es verschwindet daher das angegebene Integral für alle Werthe von φ gleichzeitig mit δ.

Hiermit ist der oben ausgesprochene Satz in allen seinen Theilen bewiesen.

Für die Formulirung des hier mitgetheilten Beweises ist eine Forderung massgebend gewesen, welche im Januar d. J. von Hrn. Heine brieflich mir gestellt wurde, im Wesentlichen des Inhalts: Wie klein auch eine von Null verschiedene Grösse ε' angenommen werden mag, es muss möglich sein, eine von Null verschiedene Grösse ϱ anzugeben, so dass — für alle Werthe von r, für welche die Differenz $1-r$ von Null verschieden und kleiner als ϱ ist, und zugleich für alle Werthe von φ — der absolute Betrag der Differenz $u(r,\varphi)-f(\varphi)$ kleiner ist als die Grösse ε'.

Näheres über die Bedeutung dieser Forderung enthält eine Abhandlung des Hrn. Heine, Ueber trigonometrische Reihen, Borchardt's Journal, Bd. 71, pag. 353, eine Abhandlung, welche alle Mathematiker mit lebhafter Freude begrüssen werden.

Ein analoges Verfahren führt zu einem strengen Beweise der entsprechenden Formel, durch welche die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ für das Innere eines kugelförmigen Raumes integrirt wird, an dessen Oberfläche die Funktion V vorgeschriebene Werthe annehmen soll.

Hinsichtlich dieser Aufgabe möge auf zwei Schriften des Hrn. C. Neumann verwiesen werden, deren Titel folgen:

Lösung des allgemeinen Problemes über den stationären Temperaturzustand einer homogenen Kugel. Halle, bei H. W. Schmidt, 1861.

Allgemeine Lösung des Problemes über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nichtkonzentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Halle, bei H. W. Schmidt, 1862.

§ 6.

Die analytische Funktion $F(z)$ ist im Vorhergehenden durch ein bestimmtes Integral dargestellt worden. Aus demselben ergibt sich eine zweite Darstellung der Funktion $F(z)$ durch eine für alle Werthe von z, deren absoluter Betrag kleiner ist als 1, unbedingt convergirende, nach Potenzen von z mit ganzen positiven Exponenten fortschreitende Reihe

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi)\,d\psi + \sum_{(m=1,2\,..\,\infty)} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi)\,e^{-mi\psi}\,d\psi \,.\, z^m$$

Die Funktion $u(r,\varphi)$ ist der reelle Theil der Funktion $F(z)$; man erhält daher aus der vorstehenden Gleichung die Entwickelung

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi)\,d\psi +$$

$$+ \sum_{(m=1,2\,..\,\infty)} \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi)\cos m\psi\,d\psi\,.\cos m\varphi +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi)\sin m\psi\,d\psi\,.\sin m\varphi\right).r^m.$$

Wird $r = 1$ gesetzt, so geht die rechte Seite der vorstehenden Gleichung in die Fourier'sche Reihe für die Funktion $f(\varphi)$ über.

Mitunter ist es nützlich, einen Werth zu kennen, welchen der absolute Betrag der Differenz $u(r,\varphi) - u(0)$ als Funktion von r nicht überschreiten kann, sobald die Werthe $u(1,\varphi) = f(\varphi)$ eine endliche Grösse g dem absoluten Betrage nach nicht überschreiten.

Man erhält

$$[u(r,\varphi) - u(0)] < [F(z) - F(0)] < 2g.\frac{r}{1-r};$$

oder

$$u(r,\varphi) - u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi+\psi)\left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi+r^2} - 1\right)d\psi,$$

$$[u(r,\varphi) - u(0)] < \frac{4g}{\pi}\arcsin r.$$

Mai 1870.