Ueber das Parallelogramm und über die Zusammensetzung der Kräfte.

Von **K. Culmann.**

Sucht man die Sätze der graphischen Statik auf analytischem Wege abzuleiten, so gelingt es sehr leicht, wenn jene Methoden, durch welche in der letzten Zeit in der analytischen Geometrie so grosse Fortschritte erzielt worden sind, angewendet werden; und die darin bestehen: Die Gleichungen von Linien und Punkten in einem einzigen Symbol zusammenzufassen und mit diesem zu rechnen. Durch Einführung dieser Symbolik reducirt sich die Zusammensetzung der Kräfte, die im Raum auf einen Punkt wirken, die Zusammensetzung der Kräfte im Strahlenbündel auf eine Summenformel $\Sigma\alpha A$, und die Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene auf eine ähnliche Summenformel $\Sigma a A$, wenn α die Normalform der Gleichung des unendlich fernen Punktes in Plücker'schen Coordinaten, a die Normalgleichung der Richtungslinie der Kraft in der Ebene, in gewöhnlichen Coordinaten, und A die Grösse der Kraft bezeichnen. Endlich ergiebt sich aus der Zusammensetzung dieser beiden Summenformeln die Zusammensetzung der Kräfte im Raum. So rechnend kann die Statik der reinen analytischen Geometrie gerade so, wie die graphische Statik der Geometrie der Lage an die Seite gestellt werden, und sowie durch Einführung der neueren Symbolik sich die Identität der analytischen Geometrie und der Geometrie der Lage herausgestellt hat, so verschwindet auch durch Einführung derselben, der Unterschied zwischen der graphischen und der analytischen Statik, beide werden zu Theilen der Geometrie.

Forscht man nach dem innern Grund dieser wissenschaftlichen Verwandtschaft, so findet man ihn darin, dass das Parallelogramm der Kräfte ein geometrischer Satz ist, der sich auch geometrisch beweisen lässt.

Hier soll nun an den geometrischen Beweis des Parallelogramms der Kräfte die Entwicklung der beiden obigen Summenformeln gereiht werden.

I. Das Parallelogramm der Kräfte.

Das Parallelogramm der Kräfte ergiebt sich unmittelbar aus den folgenden Sätzen.

Wenn 3 Kräfte A, B, C, deren Azimuthe α, β, γ sind, im Gleichgewicht sind:

1. So liegen alle 3 in einer Ebene und die Richtung irgend einer derselben, z. B. γ, ist eine Function des Verhältnisses $\frac{A}{B}$ der beiden andern, und ändert sich nicht, wenn jede derselben verhältnissmässig vergrössert, z. B. doppelt genommen wird.

2. Wenn die Richtungslinien von A, B, also α und β constant angenommen werden, so giebt es für jedes Verhältniss von $\frac{A}{B}$ eine und auch nur eine, auch keine imaginäre Richtung der 3. Kraft C.

3. Wenn $A = 0$ wird, so wird $\gamma = \beta - 180°$,
„ $B = 0$ „ „ „ $\gamma = \alpha - 180°$,
„ $A = B$ „ „ „ $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 180°$.

Der erste Satz wird bisweilen dadurch bewiesen, dass man sagt, es ändere sich offenbar nichts, wenn man A und B in verschiedenen Gewichtseinheiten ausdrückt, mithin muss γ eine Function des Verhältnisses $\frac{A}{B}$ sein. In allen Beweisen werden die Sätze Nr. 3 als selbstverständliche Axiome stillschweigend angenommen. Nr. 2 ist aber in der analytischen Form der meisten Beweise enthalten.

Werden aber diese Sätze als richtig angenommen, so folgt aus 2, dass $\frac{A}{B}$ und $tg\,\gamma$ nur durch eine Gleichung 1. Grades mit einander verbunden sein können; denn wäre die Gleichung höheren Grades, so würden mehrere Werthe der einen Grösse der andern entsprechen, was gegen die Voraussetzung ist. Auch sind transcendente Formen ausgeschlossen, denn sonst könnten ja der einen Grösse ∞ viele Werthe der andern entsprechen. Die Gleichung muss daher von der Form sein:

$$a \frac{A}{B} tg\,\gamma + b \,.\, tg\,\gamma + c \,.\, \frac{A}{B} + d = 0,$$

oder $$a\,A\,tg\,\gamma + bB\,tg\,\gamma + cA + dB = 0.$$

Zur Bestimmung der unbestimmten Coefficienten $abcd$ geben die Substitutionen der sub 3 aufgeführten entsprechenden Werthe die 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} (a+b)\,tg\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + c + d &= 0, \\ a\,tg\,\alpha \qquad\quad + c \qquad &= 0, \\ b\,tg\,\beta \qquad\qquad\quad + d &= 0; \end{aligned}$$

aus denen man $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta} = \frac{c}{-\sin\alpha} = \frac{d}{-\sin\beta}$ erhält.

Die Substitution dieser Werthe von *abcd* in obige allgemeine Gleichung giebt:

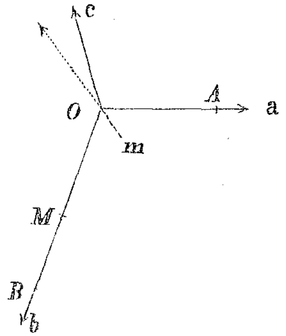
$$\frac{A}{\sin(\gamma-\beta)}=\frac{B}{\sin(\alpha-\gamma)}.$$

Genau auf dieselbe Weise kann auch bewiesen werden, dass jedes dieser beiden Verhältnisse $=\frac{C}{\sin(\beta-\alpha)}$ sei. Man hat also allgemein:

$$\frac{A}{\sin(\gamma-\beta)}=\frac{B}{\sin(\alpha-\gamma)}=\frac{C}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Hiemit ist bewiesen, dass die auf einen Punkt wirkenden Kräfte, welche im Gleichgewicht sind, in Richtung und in Grösse sich verhalten wie die 3 Seiten eines Dreiecks. Die Seiten eines Dreiecks können in der Ordnung *ABC* und *ACB* zusammengesetzt werden; fügt man nun diese beiden Dreiecke längs irgend einer gleichen Seite zusammen, so erhält man das Parallelogramm der Kräfte.

Diesem analytischen Beweis kann man auch eine geometrische Form geben. Werden die Kräfte A und B in irgend einem Massstab auf ihren in O sich schneidenden Richtungslinien a und b aufgetragen, so kann man, weil die Richtung c nur vom Verhältniss $\frac{A}{B}$ abhängt, die eine dieser Kräfte z. B. A constant annehmen und dann durch Aenderung der Strecke $OB = B$ das Verhältniss darstellen. Soll nun jedem Endpunkt B eine und



auch nur eine Richtung c der dritten Kraft entsprechen, so müssen das Punktgebilde B und der Strahlenbüschel c projectivisch sein.

Es entsprechen

den Verhältnissen $\frac{B}{A}=$	$\frac{0}{1}$,	$\frac{1}{1}$,	$\frac{1}{0}$,	$\frac{B}{A}$	;
die Punkte	O	M	∞	B	;
die Strahlen	a	m	b	c	;

wo $OM = OA$ ist, und der Mittelstrahl m den Winkel $\widehat{ab}$ halbirt.

Aus der Projectivität der beiden letztern Gebilde folgt die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$\frac{OB \,.\, \infty M}{OM \,.\, \infty B} = \frac{\sin \widehat{ac} \,.\, \sin \widehat{bm}}{\sin \widehat{am} \,.\, \sin \widehat{bc}};$$

nun ist $OM = A$, $OB = B$, $\infty M = \infty B$, und $\sin \widehat{am} = \sin \widehat{mb}$, mithin:

$$\frac{A}{\sin \widehat{bc}} = \frac{B}{\sin \widehat{ca}} \text{ und gleicherweise } = \frac{C}{\sin \widehat{ab}}.$$

Man sieht, diese beiden Beweise des Kräftedreiecks sind identisch und unterscheiden sich nur durch die Form. Nicht anders differiren die graphische Statik und die analytische, wenn Symbole wie in der neuern analytischen Geometrie eingeführt werden.

Um diesen Unterschied klar zu zeigen, wurden oben beide Beweise mitgetheilt; und jetzt wollen wir zur Entwicklung der beiden Fundamentalsummenformeln für die Zusammensetzung der Kräfte übergehen.

II. Zusammensetzung der Kräfte im Strahlenbündel.

In I. wurde bewiesen, dass 3 Kräfte im Gleichgewicht sich wie die Richtungen und Längen der 3 Seiten eines Dreiecks, d. h. einer geschlossenen Figur verhalten.

Bezeichnet man in irgend einem schiefen oder rechtwinkeligen Coordinatensystem mit $X_i Y_i Z_i$ die Coordinaten der in ihrer Richtung vom Ursprung aus, auf den sie wirkt, aufgetragenen Kraft A_i, so muss

$$0 = X_0 + X_1 + X_2,$$
$$0 = Y_0 + Y_1 + Y_2,$$
$$0 = Z_0 + Z_1 + Z_2 \text{ sein.}$$

Versteht man unter der Mittelkraft S_{12} der Kräfte A_1 und A_2 diejenige Kraft, welche in entgegengesetzter Richtung, d. h. negativ genommen, mit A_1 und A_2 im Gleichgewicht ist, so hat man offenbar:

$$X_{12} = X_1 + X_2,$$
$$Y_{12} = Y_1 + Y_2,$$
$$Z_{12} = Z_1 + Z_2.$$

Setzt man nun die Mittelkraft S_{12} mit einer 3. Kraft A_3 zusammen, so erhält man:

$$X_{1.3} = X_{12} + X_3 = X_1 + X_2 + X_3,$$

und ganz ähnliche Summen für $Y_{1.3}$ und $Z_{1.3}$. Auf die gleiche Weise fortfahrend, erhält man allgemein:

$$X_{1\ldots n} = \sum_1^n X_i; \; Y_{1\ldots n} = \sum_1^n Y_i; \; Z_{1\ldots n} = \sum_1^n Z_i.$$

Um diese 3 Summenformeln, die wir hier in der allgemein üblichen Form gegeben haben, in eine einzige zusammenzufassen, multipliziren wir alle X mit einer variabeln ξ, alle Y mit einer andern η, alle Z mit einer dritten ζ, und fassen die 3 zu einer Kraft i gehörigen Ordinaten in dem Ausdruck:

$$\alpha'_i = X_i \xi + Y_i \eta + Z_i \zeta$$

zusammen; dann ist offenbar die entsprechende Gleichung $\sigma_{1..n}$ der Mittelkraft $S_{1..n}$:

$$\sigma_{1..n} = X_{1..n} \xi + Y_{1..n} \eta + Z_{1..n} \zeta = \sum_1^n \alpha'_i.$$

Damit diese Formen einen praktischen Werth erhalten, müssen sie irgend einem geometrischen Gebilde assimilirt werden können, das mit den treffenden Kräften im Zusammenhang steht, dann wird auch von diesen Summenformeln alles gelten, was von dem geometrischen Gebilde gilt.

Denkt man sich unter ξ, η, ζ Plücker'sche Coordinaten einer Ebene, d. h. die negativ reciproken Abschnitte der Coordinatenaxen zwischen dem Ursprung und einer variabeln Ebene, dann ist α'_i die Gleichung des unendlich fernen Punktes der Kraft A_i, und $\alpha'_i + 1$ die Gleichung ihres Endpunktes.

In der Regel wird die Richtung der Kraft A_i durch die Gleichung:

$$a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta = 0$$

ihres unendlich fernen Punktes gegeben sein, und a_i, b_i, c_i werden nicht gerade gleich den Coordinaten X_i, Y_i, Z_i sein, sondern man wird nur haben:

$$\frac{X_i}{a_i} = \frac{Y_i}{b_i} = \frac{Z_i}{c_i} = \frac{A_i}{\left[e_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + 2b_i c_i \omega_1 + 2c_i a_i \omega_2 + 2a_i b_i \omega_3}\right]},$$

worin ω_1, ω_2, ω_3 die Cosinus der Coordinatenaxenwinkel sind. Aus diesen Verhältnissen folgt:

$$\alpha'_i = (a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta) \frac{A_i}{e_i}.$$

Wir wollen jetzt

$$\alpha_i = \frac{1}{e_i}(a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta),$$

die Normalform des unendlich fernen Punktes der Richtungslinie der Kraft A_i nennen. Sie ist nichts anderes als wie die um 1 verminderte Gleichung des Punktes in dieser Linie, dessen Entfernung vom Ursprung der Coordinaten gleich 1 ist.

Dann ist $\alpha_i' = A_i\alpha_i$, und die Gleichung des unendlich fernen Punktes der Mittelkraft ist:

$$\sigma_{1\,..\,n} = \sum_1^n A_i\alpha_i = 0.$$

Die Gleichung des Endpunktes der Mittelkraft ist:

$$\sigma_{1\,..\,n}' + 1 = \sum_1^n A_i\alpha_i + 1 = 0$$

und hieraus ergiebt sich die Grösse der Mittelkraft:

$$S_{1\,..\,n} = \sqrt{\left\{\begin{array}{l}\left(\sum_1^n A_i\frac{a_i}{e_i}\right)^2 + \left(\sum_1^n A_i\frac{b_i}{e_i}\right)^2 + \left(\sum_1^n A_i\frac{c_i}{e_i}\right)^2 + \\ + 2\left(\sum_1^n A_i\frac{b_i}{e_i}\right)\left(\sum_1^n A_i\frac{c_i}{e_i}\right)\omega_1 + 2\left(\sum_1^n A_i\frac{c_i}{e_i}\right)\left(\sum_1^n A_i\frac{a_i}{e_i}\right)\omega_2 + \\ + 2\left(\sum_1^n A_i\frac{a_i}{e_i}\right)\left(\sum_1^n A_i\frac{b_i}{e_i}\right)\omega_3.\end{array}\right\}}$$

In allen obigen Formeln denken wir uns $S_{1\,..\,n}$ und alle A_i positiv, die Richtungslinie einer Kraft wird dann unzweideutig durch die Zeichen von $\frac{a_i}{e_i}, \frac{b_i}{e_i}, \frac{c_i}{e_i}$ und die Kraft durch die der entsprechenden Summen ausgedrückt.

Aus der Natur der Gleichung geht hervor, dass wenn alle Kräfte in einer Ebene wirken, auch die Mittelkraft in dieser Ebene liege. Werden in derselben die Axen der x und y angenommen, so erhält man die entsprechenden Formeln einfach dadurch, dass man in den oben entwickelten Formeln alle c und $Z = 0$ setzt.

Wir schreiben noch einmal die Formeln für die Ebene an:

Die Gleichung des unendlich fernen Punktes der Kraft A_i sei:

$$a_i \xi + b_i \eta = 0,$$

$$e_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + 2 a_i b_i \omega},$$

wo ω den Cosinus des Winkels xy bezeichnet. Die Normalform des unendlich fernen Punktes ist:

$$\alpha_i = \frac{1}{e_i}(a_i \xi + b_i \eta) = 0.$$

Die Gleichung des unendlich fernen Punktes der Mittelkraft:

$$\sigma_{1\,..\,n} = \sum_1^n A_i \alpha_i = 0,$$

und die Grösse der Mittelkraft:

$$S_{1\,..\,n} = \sqrt{\left(\sum_1^n A_i \frac{a_i}{e_i}\right)^2 + \left(\sum_1^n A_i \frac{b_i}{e_i}\right)^2 + 2\left(\sum_1^n A_i \frac{a_i}{e_i}\right)\left(\sum_1^n A_i \frac{b_i}{e_i}\right)\omega}.$$

Setzt man in $\sum_1^n A_i \alpha_i$ nach einander $n = 1, 2 \ldots n$, so bilden die n Punkte in der Reihenfolge der Zusammensetzung das Kräftepolygon, das graphisch direkt durch die Addition der die Kräfte darstellenden Linien erhalten wird (siehe Gr. St. Nr. 24, S. 77 und Nr. 1, S. 4). Also sehen wir, dass hier, dem im Eingang Gesagten entsprechend, die graphische und die analytische Zusammensetzung der Kräfte identische Operationen sind.

III. Die Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene.

Da es möglich war die Zusammensetzung der Kräfte im Strahlenbüschel auf die einfache Form $\Sigma A\alpha$ zu bringen, so muss es auch möglich sein die reciproke Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene auf eine ähnliche einfache Form zu bringen; es kann auf folgende Weise geschehen.

Es sei die Gleichung der Linie, in der die Kraft A_i wirkt:

$$a_i x + b_i y + c_i = a_i' = 0.$$

Dann muss die Gleichung der Mittelkraft der Kräfte A_1 und A_2 von der Form

$$m a_1' + n a_2' = 0$$

sein, weil sie durch den Schnitt von a_1' und a_2' gehen muss. Die Coefficienten m und n sind so zu wählen, dass diese Linie auch durch den unendlich fernen Punkt der Mittelkraft gehe, der nach II. wie folgt bestimmt werden kann.

Der Gleichung a_i' genügen die Werthe $x = + b_i \,.\, \infty$, und $y = - a_i \infty$. Demnach ist die Gleichung ihres unendlich fernen Punktes:

$$b_i \xi - a_i \eta = 0;$$

die Normalform desselben:

$$\alpha_i = \frac{1}{e_i}(b_i \xi - a_i \eta),$$

worin: $e_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2 - 2 a_i b_i \omega}$ ist.

Die Gleichung des unendlich fernen Punktes der Mittelkraft von A_1 und A_2 ist demnach:

$$0 = A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = \left(A_1 \frac{b_1}{e_1} + A_2 \frac{b_2}{e_2}\right)\xi - \left(A_1 \frac{a_1}{e_1} + A_2 \frac{a_2}{e_2}\right)\eta.$$

Soll $m a_1' + n a_2'$ durch diesen unendlich fernen Punkt gehen, so muss nothwendiger Weise $m = \frac{A_1}{e_1}$ und $n = \frac{A_2}{e_2}$ sein; und wir erhalten die Gleichung der Mittelkraft:

$$A_1 \frac{a'_1}{e_1} + A_2 \frac{a'_2}{e_2} = 0.$$

Wird nun der Sinus des Winkels der Coordinatenaxen mit ω' bezeichnet, so ist $a_i = \frac{a_i' \omega'}{e_i}$ nichts anderes als die Normalform der Gleichung a_i', d. h. der Richtungslinie der Kraft; so dass die Gleichung der Mittelkraft durch Multiplikation mit ω_i' in die folgende Form: $$A_1 a_1 + A_2 a_2 = 0$$
gebracht werden kann.

Bezeichnet man mit s_{12} die Normalform dieser Mittelkraft, so erhält man sie durch Entwickelung:

$$0 = s_{12} = \frac{\left[\left(A_1 \frac{a_1}{e_1} + A_2 \frac{a_2}{e_2}\right) x + \left(A_1 \frac{b_1}{e_1} + A_2 \frac{b_2}{e_2}\right) y + \left(A_1 \frac{c_1}{e_1} + A_2 \frac{c_2}{e_2}\right)\right] \omega'}{\sqrt{\left(A_1 \frac{a_1}{e_1} + A_2 \frac{a_2}{e_2}\right)^2 + \left(A_1 \frac{b_1}{e_1} + A_2 \frac{b_2}{e_2}\right)^2 - 2\left(A_1 \frac{a_1}{e_1} + A_2 \frac{a_2}{e_2}\right)\left(A_1 \frac{b_1}{e_1} + A_2 \frac{b_2}{e_2}\right) \omega}}.$$

In dieser Gleichung ist der Nenner nach II. die Mittelkraft S_{12} der Kräfte A_1 und A_2; die Verschiedenheit des Zeichens im Coefficienten von 2ω rührt daher, dass für a_i' die Gleichung $b_i \xi - a_i \eta$, statt $a_i \xi + b_i \eta$ angenommen worden ist.

Man hat also:

$$S_{12} s_{12} = A_1 a_1 + A_2 a_2.$$

Hierin ist S_{12} eine Kraft wie A_1, s_{12} eine Normalform wie a_1; es kann demnach S_{12} mit einer 3. Kraft A_3 gerade so zusammengesetzt werden als wie A_2 mit A_1.

Es ist also:

$$S_{13}s_{13} = S_{12}s_{12} + A_3 a_3 = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3,$$

und ganz allgemein:

$$Ss = \Sigma Aa.$$

Die Gleichung der Mittelkraftslinie einer beliebigen Zahl in einer Ebene wirkenden Kräfte ist gleich der Summe der mit der Kraft als Coefficienten multiplicirten Normalformen dieser Kräfte.

Die Mittelkraft selbst ist der Nenner, durch welchen die als Summe erscheinende Gleichung der Mittelkraft auf die Normalform gebracht werden kann.

Bei der Anwendung obiger Summenformeln kann e_i als Wurzelgrösse positiv oder negativ genommen werden. Man wird hinsichtlich dieses Zeichens nie im Zweifel sein, wenn man bemerkt, dass in Folge unserer Zeichenannahmen in der Gleichung $b_i \xi - a_i \eta$ des unendlich fernen Punktes der Linie $a_i x + b_i y + c_i$ die Coefficienten dieser Gleichung nach II. die folgende Bedeutung haben:

$\frac{b_i}{e_i}$ ist die positive Abscisse des in der Richtung der Kraft vom Ursprung der Coordinaten aus aufgetragenen Halbstrahles 1.

$\frac{a_i}{e_i}$ ist die negative Ordinate desselben Punktes; diese Coordinaten müssen demnach auch dem Zeichen nach mit diesen Grössen übereinstimmen.

$\frac{c_i}{e_i} = 0$ ist die Gleichung der unendlich fernen Geraden, es muss also das Zeichen von $A_i \frac{c_i \omega}{e_i}$ (bei der unendlich fernen Seitenkraft kann die Kraft von ihrem Moment nicht mehr getrennt werden) mit dem Drehungssinn der Kraft A_i um den Ursprung der Coordinaten zusammenhängen. Vergleicht man die Lage der Linien $(-a_i x + b_i y + c_i)\frac{A_i \omega}{e_i}$ und $(-a_i x + b_i y - c_i)\frac{A_i \omega}{e_i}$ mit dem Drehungssinn von A_i, so findet man: $\frac{A_i c_i \omega}{e_i}$ ist positiv, wenn A_i im Sinn von $+x$ nach $+y$ dreht, und wir nennen daher diesen Drehungssinn den positiven. $\frac{A_i c_i \omega}{e_i}$ ist dagegen negativ, wenn A_i in entgegengesetztem Sinne dreht.

Hienach können also die Zeichen von $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{e}$ und $\frac{Ac}{e}$ bestimmt werden, wenn ein oder 2 Coefficienten fehlen, d. h. wenn A durch den Ursprung geht, oder mit einer der Axen parallel läuft, und wenn A mit einer der Axen zusammenfällt oder in der unendlich fernen Geraden liegt. Es lag in der Natur unserer Entwickelungen, das Zeichen von a, b, c von der Richtung der Kraft im Halbstrahlenbüschel abhängig zu machen, man kann aber diese Zeichen auch direkt wie folgt bestimmen: Werden die Zeichen der drei Coefficienten der Linie positiv angenommen, welche vom Fundamentaldreieck O, $+x\infty$, $+y\infty$ ausgeschlossen ist und im positiven Sinne um dasselbe herumdreht, so sind $\frac{c}{e}$, $\frac{a}{e}$ und $\frac{b}{e}$ positiv oder negativ, je nachdem die in der Linie $ax + by + c$ wirkende Kraft positiv oder negativ um die 3 Eckpunkte jenes Dreiecks dreht.

Der Inbegriff aller Linien, die man erhält, wenn in $s_{1\,..\,n}$, $n = 1, 2\,...\,n$ gesetzt wird, heisst das Seilpolygon. Es ist das wichtigste Hülfsmittel der Construction in der graphischen Statik.

IV. Anwendungen.

Wir schliessen mit einigen Andeutungen über die Verwerthung der obigen Summenformeln.

Wenn man in die Normalform $\frac{1}{e}(ax + by + c)$ einer Linie die Coordinaten x und y eines bestimmten Punktes substituirt, so ist das Resultat a der senkrechte Abstand dieses Punktes von der Richtungslinie i. Die Producte Aa, Ss sind daher nichts anderes als das, was man gewöhnlich die Momente der Kräfte bezüglich eines Punktes nennt.

Aus $Ss = \Sigma Aa$ geht demnach hervor, dass das Moment der Mittelkraft S gleich der Summe der Momente der sämmtlichen Seitenkräfte A bezüglich irgend eines Punktes der Ebene sei. Substituirt man insbesondere für $x, y, 1$ die Coordinaten der Eckpunkte des Coordinatendreiecks $1, 0, 0$; $0, 1, 0$ und $0, 0, 1$, so erhält man:

$$S_{1\,..\,n}\frac{a_{1\,..\,n}}{e_{1\,..\,n}} = -\,Y_{1\,..\,n} = \sum_1^n A_i\frac{a_i}{e_i},$$

$$S_{1\,..\,n}\frac{b_{1\,..\,n}}{e_{1\,..\,n}} = +\,X_{1\,..\,n} = \sum_1^n A_i\frac{b_i}{e_i},$$

$$S_{1\,..\,n}\frac{c_{1\,..\,n}\,\omega'}{e_{1\,..\,n}} = +\,S_{1\,..\,n}p_{1\,..\,n} = \sum_1^n A_i\frac{c_i\omega'}{e_i} = \sum_1^n A_i p_i,$$

wo p_i den Perpendikel vom Ursprung auf die Linie i bezeichnet. Die beiden ersten Formeln bedeuten, dass die mit den Axen parallelen Seitenkräfte der Mittelkraft gleich der Summe der entsprechenden Seitenkräfte aller zusammenzusetzenden Kräfte ist;

die letzte drückt die Momentengleichheit bezüglich des Ursprungs aus. Es sind dies die gewöhnlichen Gleichungen, welche zur Zusammensetzung der Kräfte dienen und man sieht, dass sie in der allgemeinen Summenformel enthalten sind und derselben durch Substitution besonderer Werthe für x und y entspringen.

Werden in Ss die Coefficienten von x und $y = 0$, so reducirt sich s auf $c = 0$ einer unendlich fernen Kraft (sogenanntes Kräftepaar); man sieht, das Moment derselben Ss bleibt constant für jeden Punkt der Endlichkeit.

Werden in Ss alle drei Coefficienten von $x, y, 1$ gleich 0, so ist das System im Gleichgewicht.

S_n kann wie folgt zerlegt werden:

$$S_{1..n}s_{1..n} = S_{1..i}s_{1..i} + S_{i+1..n}s_{i+1..n}.$$

Da nun die Gleichungen dreier Linien, welche durch eine Gleichung ersten Grades mit einander verbunden werden können, durch einen Punkt gehen, so folgt aus dieser Gleichung: Zwei beliebige Seilpolygonseiten $s_{1..i}$ und $s_{1..n}$ schneiden sich auf der Mittelkraft $s_{i+1..n}$ der zwischen ihnen wirkenden Kräfte. (Gr. St. Nr. 27, S. 81.)

Vertauscht man in einer Reihe von Kräften die Kraft A_i mit A_i' und bezeichnet man die auf A_i' folgenden Mittelkräfte mit S' so giebt die Subtraction:

$$S'_{1..n}s'_{1..n} - S_{1..n}s_{1..n} = A'_i a'_i - A_i a_i,$$

d. h. je zwei Polygonseiten $s'_{1..n}$ und $s_{1..n}$ schneiden sich auf der Mittelkraft von $+A_i'$ und $-A_i$, sie haben die Richtungslinie dieser Kraft entsprechend gemein, oder allgemeiner: Die zwei Seilpolygone, welche eine gleiche Folge von Kräften mit einander verbinden, haben eine Linie gemein (Gr. St. Nr. 29,

S. 83). Mittelst dieses Satzes ist man im Stande, Drucklinien durch bestimmte Punkte zu führen; er leistet bei den Stabilitätsconstructionen der Gewölbe ausgezeichnete Dienste.

Ein Satz der analytischen Geometrie lautet: Irgend eine Gleichung a_i kann durch 3 andere Gleichungen a_1, a_2, a_3 so ausgedrückt werden, dass man hat: $A_i a_i = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3$, wo A_i, A_1, A_2, A_3 Determinanten der Coefficienten der Gleichungen a_i, a_1, a_2, a_3 sind. Um diesen Satz in das Statische zu übersetzen, hat man nur die Coefficienten A_i, A_1, A_2, A_3 als Kräfte zu betrachten, und er lautet dann: **Man kann jede Kraft nach 3 in derselben Ebene wirkenden und sich nicht in einem Punkt schneidenden Richtungen zerlegen.**

Die Formeln machen sich am symmetrischsten, wenn man die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts der 4 Kräfte ausdrückt:

$$\frac{A_1 a_1}{e_1} + \frac{A_2 a_2}{e_2} + \frac{A_3 a_3}{e_3} + \frac{A_4 a_4}{e_4} = 0,$$
$$\frac{A_1 b_1}{e_1} + \frac{A_2 b_2}{e_2} + \frac{A_3 b_3}{e_3} + \frac{A_4 b_4}{e_4} = 0,$$
$$\frac{A_1 c_1}{e_1} + \frac{A_2 c_2}{e_2} + \frac{A_3 c_3}{e_3} + \frac{A_4 c_4}{e_4} = 0.$$

Diese 4 Gleichungen geben dann unmittelbar das Verhältniss der 4 Kräfte:

$$\frac{A_1}{+e_1\begin{vmatrix} a_2 a_3 a_4 \\ b_2 b_3 b_4 \\ c_2 c_3 c_4 \end{vmatrix}} = \frac{A_2}{-e_2\begin{vmatrix} a_1 a_3 a_4 \\ b_1 b_3 b_4 \\ c_1 c_3 c_4 \end{vmatrix}} = \frac{A_3}{+e_3\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_4 \\ b_1 b_2 b_4 \\ c_1 c_2 c_4 \end{vmatrix}} = \frac{A_4}{-e_4\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}},$$

woraus, wenn eine Kraft und die 4 Richtungslinien gegeben sind, die Grösse der 3 andern bestimmt werden kann.

In diesen Formeln ist die ganze Fachwerktheorie (siehe Gr. St. Nr. 107, S. 363) enthalten, sie sind an und für sich nicht complicirt, und können noch vereinfacht werden, wenn die Axen mit den Kräften parallel gelegt werden können. Auch gelangt man mittelst einfacher Substitutionen zu den Fällen, wo 2 Kräfte mit einander parallel laufen.

Wenn man die Gleichung einer Seilpolygonseite:

$$\left(\Sigma A\frac{a\,\omega'}{e}\right)x+\left(\Sigma A\frac{b\,\omega'}{e}\right)y+\Sigma A\frac{c\,\omega'}{e}=0$$

und die Gleichung des entsprechenden Punktes des entsprechenden Kräftepolygons:

$$\left(\Sigma A\frac{b}{e}\right)\xi-\left(\Sigma A\frac{a}{e}\right)\eta+1=0$$

anschreibt, so sieht man, dass beide in einander übergehen, wenn man $x=-\eta$, $y=\xi$ setzt; und wenn $\Sigma A\frac{c}{e}$ als Coefficient der constanten Ordinate 1 auch constant bleibt, weil in der Gleichung des Punktes des Kräftepolygons 1 auch constant ist. Soll aber dieses Glied constant bleiben, so darf nur die Gleichung der ersten Seilpolygonseite a_1 ein c enthalten; alle folgenden dürfen kein c enthalten, sie müssen von der Form $ax+by$ sein, d. h. sie müssen durch den Ursprung gehen.

Wenn also alle Kräfte eines Seilpolygons durch einen Punkt gehen, so können das Kräfte- und das Seilpolygon reciprok auf einander bezogen werden (Gr. St. Nr. 30, S. 86).

Der Linie: $ax+by+c=0$

entspricht dann der Punkt:

$$-a\eta+b\xi+c=0.$$

Der Perpendikel p vom Ursprung auf die Linie ist gleich $\frac{c\,\omega'}{e}$. Die Entfernung r des Punktes vom Ursprung ist $= \frac{e}{c}$. Also $pr = \omega'$ oder constant.

Das Product der Entfernung entsprechender Elemente vom Ursprung ist also constant. Es ist dies eine allgemeinere Fassung des Satzes auf Seite 87.

Da x und η, y und ξ gleichzeitig $= 0$ und gleichzeitig $= \infty$ werden, so entspricht die unendlich entfernte Gerade des einen Polygons dem Ursprung des andern.

Liegen die Punkte xy auf der Curve 2. Ordnung:

$$S = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

so umhüllen die Linien ξ, η die Curve 2. Classe:

$$\Sigma = a_{11}\eta^2 - 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\xi^2 - 2a_{13}\eta + 2a_{23}\xi + a_{33} = 0.$$

Man braucht nur die Discriminante Δ der beiden Gleichungen anzuschreiben, um sich zu überzeugen, dass sie und der Coefficient A_{33} von a_{33} in ihr gleich sind und gleiche Zeichen haben.

Nun ist aber S eine Hyperbel, eine Parabel oder eine Ellipse, je nachdem A_{33}: $-$, 0 oder $+$ ist. Diese Zeichen bedeuten aber, dass der Ursprung von Σ von der Curve ausgeschlossen sei, auf der Curve liege oder eingeschlossen sei.

Das Umgekehrte gilt ebenso, denn der Ursprung von S ist von der Curve ausgeschlossen, liegt auf ihr oder ist eingeschlossen, je nachdem $a_{33}\Delta$: $-$, 0 oder $+$ ist. Bei Σ aber bedeutet es, dass die $\xi, \eta, 1$ eine Hyperbel, eine Parabel oder eine Ellipse umhüllen.

Alle weitern auf Nr. 31, Seite 90 zusammengestellten Sätze ergeben sich einfach, indem man die Gleichungen der treffenden Gebilde links in S oder Σ ausdrückt und dann durch Vertauschung von x und y mit $-\eta$ und ξ die Gleichungen der rechts stehenden Gebilde in Σ oder S erhält. Auf diese Weise lassen sich beinahe alle Gebilde der analytischen Geometrie in das Reciproke verwandeln, und die Zahl der auf Seite 90 aufgezählten Sätze beliebig vermehren.

Fällt der Pol des einen Kegelschnitts mit dem Mittelpunkt zusammen, so sind in demselben die Coefficienten a_{13}, a_{23} der ungeraden Potenzen von x und $y = 0$; die ungeraden Potenzen fallen dann auch im andern Kegelschnitt aus. **Fällt also der Pol der einen Curve mit ihrem Mittelpunkt zusammen, so ist auch der Mittelpunkt der andern Curve der Pol des Polygons** (Gr. St. Nr. 32, S. 91).

Die Gleichung des Strahlenbüschels 2. Ordnung, welcher S umhüllt, ist dann:

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \xi \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \eta \\ 0 & 0 & a_{33} & 1 \\ \xi & \eta & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \xi \\ a_{21} & a_{22} & \eta \\ \xi & \eta & -\frac{1}{a_{33}} \end{vmatrix} =$$

$$a_{33}\left[-a_{11}\eta^2 + 2a_{12}\xi\eta - a_{22}\xi^2 - \frac{A_{33}}{a_{33}}\right] = 0.$$

Die Coefficienten dieser letztern Gleichung stimmen bis auf das constante Glied mit denen von Σ überein, mithin **sind in diesem Fall die beiden Kegelschnitte ähnlich und ähnlich gelegen** (Gr. St. S. 92). Setzt man jetzt noch $a_{11} = a_{22}$ und bei rechtwinkeligen Coordinaten $a_{12} = 0$, so erhält man die Grösse der Spannungen in kreisförmigen Röhren.

Werden in den Polargleichungen der Kegelschnitte x_1 und y_1 einerseits und ξ_1, η_1 anderseits gleich ∞ gesetzt, so reduciren sie sich auf:

$$P = S_x x_1 + S_y y_1 \text{ und } \Pi = \Sigma_\xi \xi_1 - \Sigma_\eta \eta_1,$$

worin $S_x = \frac{dS}{2dx}$; $S_y = \frac{dS}{2dy}$; $\Sigma_\xi = \frac{d\Sigma}{2d\xi}$ und $\Sigma_\eta = \frac{d\Sigma}{2d\eta}$ sind. P und Π gehen in einander über, wenn x und $x_1 = -\eta$ und η_1, und y und $y_1 = \xi$ und ξ_1 gesetzt werden; die beiden Polargebilde entsprechen sich demnach. Der Gleichung P genügen die Coordinaten des Mittelpunktes $x = \frac{A_{13}}{A_{33}}$ und $y = \frac{A_{23}}{A_{33}}$, wo A_{ik} die Unterdeterminanten der Discriminaten bezeichnen, indem sie die Werthe S_x und S_y gleichzeitig gleich 0 machen. P ist demnach die Gleichung eines Durchmessers. Ebenso genügen Π die Coordinaten $-\eta = \frac{A_{13}}{A_{33}}$ und $\xi = \frac{A_{23}}{A_{33}}$ der Polaren des Ursprungs, welche gleichzeitig Σ_ξ und $\Sigma_\eta = 0$ machen. Durchmessern des einen Polygons entsprechen Punkte der Polaren des andern Polygons. Demnach auch conjugirten Durchmessern des einen Polygons parallel laufende conjugirte Strahlen des andern Polygons.

Diese beiden involutorischen Strahlenbüschel werden von Linien, die mit conjugirten Elementen parallel laufen, in ähnlichen Gebilden geschnitten (Gr. St. Nr. 31, S. 91). Es geht das unmittelbar daraus hervor, dass in diesen projectivischen Gebilden sich die unendlich fernen Punkte entsprechen. Des späteren Gebrauches wegen müssen wir jedoch noch das treffende Verhältniss ausdrücken.

Da $x = \frac{A_{13}}{A_{33}} = -\eta$; und $y = \frac{A_{23}}{A_{33}} = \xi$ den Gleichungen P und Π genügen, so lässt sich P also darstellen:

$$P = a_{11}\left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)x_1 + a_{12}\left[\left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)y_1 + \left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)x_1\right] + \\ + a_{22}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)y_1 = 0,$$

und ebenso auch Π. Um nun beide Büschel durch Linien von conjugirter Richtung zu schneiden, nehmen wir an, die Richtungen der Coordinatenaxen seien conjugirt, und setzen $a_{12} = 0$. Das giebt dann, wenn die entsprechenden Operationen auch mit Π vorgenommen werden:

$$\lambda = \frac{y_1}{x_1} = -\frac{a_{11}\left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)}{a_{22}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)} = -\frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\xi_1}{\eta_1}\,\frac{a_{11}\left(\eta + \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)}{a_{12}\left(\xi - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)}.$$

Für ein bestimmtes Verhältniss λ giebt nun:

$\lambda = \frac{y_1}{x_1}$ einen unendlich fernen Punkt des ersten Polygons.

$\lambda = -\frac{\xi_1}{\eta_1}$ einen durch diesen unendlich fernen Punkt und den Ursprung gehenden Strahl des zweiten Polygons.

$\lambda = -\frac{a_{11}\left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)}{a_{22}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)}$ die Gleichung des der Richtung λ conjugirten Durchmessers des ersten Polygons. x und y können hierin beliebige Punkte des Durchmessers, also auch die in ihm liegenden Curvenpunkte sein.

$\lambda = \frac{a_{11}\left(\eta + \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)}{a_{22}\left(\xi - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)}$ die Gleichung eines Punktes der Polaren des Ursprungs des zweiten Polygons, denn die Coordinaten $\eta = -\frac{A_{13}}{A_{33}}$ und $\xi = \frac{A_{23}}{A_{33}}$ der Polaren genügen ihr. Der Strahl der diesen Punkt vom Ursprung aus projicirt, läuft parallel mit dem entsprechenden Durchmesser, denn für x, y, η, ξ ist: $\frac{a_{22}}{a_{11}} = -\frac{x}{y} = \frac{\eta}{\xi}$.

Wir schneiden jetzt den 1. und 3. Büschel durch eine Parallele zur Abscissenaxe, indem wir $x_1 = -\frac{1}{\xi_1} = H$ setzen und erhalten die jedem λ entsprechenden Ordinaten des Schnittpunktes.

$$y_1 = \frac{1}{\eta_1} = H\lambda.$$

Den 2. Büschel schneiden wir durch eine Parallele zur y Axe, in der Entfernung h vom Mittelpunkt, und erhalten:

$$x - \frac{A_{13}}{A_{33}} = -\frac{a_{22}}{a_{11}} h\lambda.$$

Um den Schnitt des Strahlenbüschels, welcher das 4. Punktgebilde vom Ursprung aus projicirt mit einer Parallelen zur x Axe in der Entfernung h vom Ursprung, zu erhalten, muss man zuerst ξ und $\eta = \infty$, und dann $\frac{1}{\eta} = h$ setzen, was:

$$\frac{1}{\xi} = \frac{a_{22}}{a_{11}} h\lambda$$

giebt.

Die eben erörterten Beziehungen bestehen fort, auch wenn der Pol des einen Polygons, der des

Kräftepolygons z. B. in das unendliche rückt, d. h. wenn alle an dem Kegelschnitte wirkenden Kräfte parallel laufen. Man hat sich dann das ganze Polygon im Unendlichen zu denken, und der Schnitt der Parallelen zur y Axe mit dem 3. Büschel der ξ_1, η_1 kann als ein verjüngter Theil des unendlich grossen Polygons, als das wirkliche Kräftepolygon betrachtet werden.

Die Beziehung zwischen diesem Kräftepolygon und den entsprechenden Curvenpunkten ist demnach gegeben durch die Gleichung:

$$\lambda = \frac{y_1}{H} = \frac{1}{H\eta_1} = -\frac{a_{11}\left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)}{a_{22}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)}.$$

Jetzt bezeichnet in dieser Gleichung: H die in der Richtung der x Axe gemessene Spannung im Seilpolygon, den Horizontalschub oder die Horizontalspannung bei Gewölben und Ketten; also den horizontalen Abstand des Pols des Kräftepolygons, von der Linie auf der die Kräfte selbst aufgetragen werden. y_1 bezeichnet die vom Endpunkt von H ab gemessene Ordinate des Punktes des Kräftepolygons, welche den Curvenpunkten x und y des Seilpolygons entspricht. Die Gleichung selbst übersetzt sich wie folgt in Worte: Das Kräftepolygon ist jedem Schnitt des Strahlenbüschels ähnlich, welcher aus dem Mittelpunkt der Curve ihre einzelnen Punkte auf eine Linie projicirt, deren Richtung der Richtung der Kräfte conjugirt ist (Gr. St. Nr. 34, S. 96). Die auf die Strecke Δx treffende Belastung wird durch das entsprechende Δy_1 gegeben. Die Belastung pro Längeneinheit ist demnach $= \frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ der Belastungshöhe, wir bezeichnen sie mit y_{11} und erhalten, indem wir zu den Grenzen übergehen:

$$y_{11} = \frac{dy_1}{dx} = \frac{a_{11} H \Delta}{a_{22}\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)^3}.$$

Werden diese Höhen über den Curven aufgetragen, so erhält man die Belastungscurven (Gr. St. Fig. 65, S. 96 und Taf. 20).

Bei Ellipsen nimmt $y - \frac{A_{23}}{A_{33}}$ ab bis zu 0, die Höhe der Belastungscurven nimmt daher in's Unendliche zu bei elliptischen Gewölben. Bei der Hyperbel wächst $y - \frac{A_{23}}{A_{33}}$ in's Unendliche. Die Belastungshöhen der hyperbolischen Ketten convergiren gegen 0.

Bei Parabeln ist $\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)$ constant und unendlich gross. Die Parabel ist das Seilpolygon der gleichförmigen Belastung.

Hiemit schliessen wir die Anwendungen, welche die Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene betreffen und am meisten von den gewöhnlichen Entwickelungen abweichen; wir behalten uns vor, später einmal dieselben Methoden auf die Zusammensetzung der Kräfte im Raum anzuwenden.