Ueber das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation.

Von

Heinrich Schneebeli.

Die grosse Wichtigkeit der Elasticitätstheorie sowohl für die wissenschaftliche Physik, als auch für die technischen Anwendungen derselben, hat schon seit ihrem Entstehen die Aufmerksamkeit der bedeutendsten Mathematiker und der geübtesten Physiker auf sich gezogen. Die Elasticitätstheorie ist eine Schöpfung unsers Jahrhunderts; sie ist in dieser relativ kurzen Zeit zu einer solchen Vollkommenheit gelangt, dass sie jetzt als eine für sich vollständig abgeschlossene Disciplin gilt. Alle Fragen, die sich in derselben stellen lassen, sind sowohl auf theoretischem Wege, als auch durch experimentelle Untersuchungen entweder vollständig gelöst, oder doch wenigstens ihrer Lösung näher geführt worden.

Dem experimentellen Theil kommt in dieser Hinsicht in erster Linie zu, die Constanten, welche in die Formeln und Ausdrücke der Theorie eingehen, durch gut gewählte Methoden zu einer so grossen Genauigkeit, als es ihre Bedeutung erfordert, zu bestimmen.

Eine der wichtigsten Constanten in der Elasticitätstheorie ist wohl das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation; man ist daher auch schon seit lange bemüht gewesen, dasselbe numerisch festzustellen. Wenn man nämlich einen homogen elastischen Stab in seiner Längsrichtung ausdehnt, so erleiden zugleich seine Querdimensionen eine Contraction und zwar wird diese Quercontraction für jede Ausdehnung innerhalb der Elasticitätsgrenze in einem constanten Verhältniss zu derselben stehen. Dass wirklich eine Contraction der Querdimensionen bei einem Stabe, der einem Zug unterworfen wird, statt hat, ist wenigstens qualitativ durch directe Versuche von Cagniard-Latour und Werthheim festgestellt.

Bezeichnet man mit l die Länge eines cylindrischen Stabes, der nach allen Richtungen dieselbe Elasticität besitzt, mit r seinen Radius, so ist sein Volumen $$v = r^2 \pi l.$$

Nach der Dilatation sei seine Länge $l(1+\delta)$ und wenn wir mit α das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation bezeichnen, so ist nunmehr sein Radius $r' = r(1-\alpha\delta)$ und daher sein neues Volumen
$$v' = r^2 \pi l (1+\delta)(1-\alpha\delta)^2.$$
Da aber die Dilatationen immer innerhalb der Elasticitätsgrenze liegen sollen, muss δ eine sehr kleine Grösse sein, und wir dürfen daher ohne Weiteres höhere Potenzen von δ vernachlässigen und erhalten so $$v' = r^2 \pi l [1 + (1-2\alpha)\delta].$$
Durch die Dilatation ist also das Volumen geändert worden im Verhältniss von
$$1 : [1 + (1-2\alpha)\delta].$$

Es haben nun sowohl die Versuche Cagniard-Latour's, als auch diejenigen Werthheim's, das Resultat geliefert, dass bei einer Dilatation eine Vermehrung des Volumens des Stabes eintrete, d. h. dass

$$1 - 2\alpha > o \qquad \text{oder} \qquad \alpha < \frac{1}{2},$$

die beiden Grenzen, zwischen denen also α schwanken kann, sind $o < \alpha < \frac{1}{2}$.

Dieses Resultat war bereits vorhanden, bevor eine eigentliche Theorie der Elasticität bestand. Nachdem dieselbe durch die classischen Arbeiten von Poisson, Cauchy etc. geschaffen worden war, wurde auch dieser Constanten, die in die meisten Formeln der Theorie eingeht, mehr Beachtung geschenkt, und es eröffneten sich aus der Theorie neue Wege und Methoden, mit denen dieselbe numerisch bestimmt werden konnte.

Poisson[1]) fand durch theoretische Betrachtungen, dass das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation für alle elastischen Körper ein constantes sei und dass dieselbe betrage

$$\alpha = \frac{1}{4}\delta.$$

Dieser theorisch gefundene Werth stimmt wirklich ausgezeichnet mit dem schon erwähnten Versuche Cagnard-Latour's, den ich hier kurz beschreiben will. Er senkte einen 2,03 Meter langen Messingdraht bis auf den Boden einer mit Wasser gefüllten Röhre und zog denselben wieder um 6 Mm. heraus, das Wasser fiel um 5 Mm.; hierauf befestigte er den Draht am Boden und dehnte ihn um 6 Mm. aus, das Wasser fiel nun um 2,5 Mm.; hieraus berechnete Poisson[2]) den Werth der Quercontraction zur Län-

[1]) Mémoires de l'Institut de France, tome 8.

[2]) Annales de chimie et de physique, tome 26. — Es kann mir nicht besser gelingen, die Einwände gegen diese Bestimmung und

gendilatation zu $\alpha = \frac{1}{4}\delta$. Dieser Werth blieb nun eine geraume Zeit unangefochten bestehen, bis Werthheim in einer ganzen Reihe von Abhandlungen in dieser Hinsicht wesentlich neue Gesichtspunkte aufstellte. Durch theoretische Betrachtungen findet er den Werth dieses Verhältnisses zu $\alpha = \frac{1}{3}\delta$.

Die Resultate, die Werthheim aus seinen experimentellen Untersuchungen zieht, schliessen sich zum grössten Theile den theoretischen Berechnungen an, freilich lassen sich denselben auch bedeutende Einwände entgegenhalten, die ich am geeigneten Orte anführen werde.

Werthheim benutzte zur experimentellen Bestimmung dieses Verhältnisses wesentlich zwei Methoden, nämlich, wie ich früher schon erwähnte, eine directe und dann noch eine indirecte.

Die directe Methode besteht darin, dass er die Volumenveränderung eines gezogenen Körpers bestimmt. Eine cylindrische Röhre, die an einem Ende

---

vorzugsweise gegen die Consequenzen, die daraus gezogen worden sind, zusammenzufassen, als mit den Worten Werthheim's: „Ce procédé serait suffisamment exact, s'il ne s'agissait que de vérifier s'il y a réellement un changement de volume et dans quel sens il a lieu; mais il ne paraît pas l'être assez pour en donner une mesure précise. — En effet, le tube ayant un diamètre plus grand que le fil, les petits changements de volume qu'éprouve ce dernier se mesurent au moyen de changements de niveau plus petits encore. — Enfin il est impossible d'allonger un fil de laiton de 3 millimètres par mètre, sans que ce fil subisse des allongements permanents assez notables, tandis que la loi ne s'applique qu'aux allongements ou raccourcissements purement élastiques." (Ann. de chimie et de phys., tome 23, page 53.)

eine Capillarröhre trägt, wird mit einer Flüssigkeit gefüllt und dann einem Zug unterworfen. Die Aenderung des Volumens, die die Röhre durch die Dilatation erleidet, wird an dem Capillarrohre abgelesen und daraus das obige Verhältniss bestimmt.[1])

Die zweite Methode, die Werthheim zur Bestimmung dieser Constanten anwandte, besteht kurz darin, dass er das Verhältniss der Schwingungszahlen des Longitudinal- und des Torsionstones des elastischen Stabes feststellte und hieraus nach den Formeln der Elasticitätstheorie das α berechnete. Da die Methode, die ich zu meinen Bestimmungen benutzt habe, auf demselben Principe beruht, habe ich diese Uebergangsrechnung dort ausgeführt. Das Verhältniss der Schwingungszahlen des Longitudinal- und des Torsionstones erhielt Werthheim vermittelst des Sonometers, d. h. er passte zwei Saiten so ab, dass sie genau denselben Ton gaben, wie die respectiven Töne des untersuchten Stabes.[2])

Mit dieser letzteren Methode haben auch schon früher Chladni und Savart Bestimmungen dieser Art ausgeführt und zwar fand Chladni einen wesentlich kleinern Werth, den er aber jedenfalls nur als approximativ hinstellt; hingegen fand Savart ein Resultat, das sich mehr den Bestimmungen Werthheim's nähert.

---

[1]) Annales de chimie et de physique, t. 50.

[2]) Annales de chimie et de physique, t. 50 und Mémoires de l'académie, t. 8. In Comptes-rendus, t. 28, gibt de Saint-Venant eine Uebersicht der numerischen Resultate der ältern Bestimmungen, wie sie Chladni und Savart fanden.

Allen diesen Bestimmungen lässt sich jedoch der Einwand entgegenhalten: Die eine Hauptbedingung, auf welche doch sämmtliche Versuche basiren, dass nämlich der untersuchte Stab ein elastisch-homogener Körper sei, ist bei allen Beobachtern entweder gar nicht oder nur theilweise erfüllt, denn ein gewöhnlicher Eisenstab, eine gezogene Messingröhre etc., erfüllen jedenfalls diese Bedingung nicht.

Ferner ist die indirecte Methode, wie sie Wertheim, Chladni und Savart benutzten, keine so präzise, als es hier gefordert werden muss. Das Sonometer ist nicht zu so genauen Messungen fähig, wie sie zu diesem Zwecke nöthig sind, denn, wie ich später zeigen werde, haben schon kleine Fehler in der Bestimmung des Verhältnisses der beiden Schwingungszahlen einen bedeutenden Einfluss auf den Werth des Verhältnisses der Quercontraction zur Längendilatation.

Schon frühe ist auch erkannt worden, dass die Annahme einer Constanz dieses Verhältnisses für alle elastischen Körper sich wohl durch genauere Versuche nicht bestätigen, sondern dass dasselbe bei verschiedenen Materien sich auch verschieden herausstellen werde. Schon Lamé [1]) spricht sich in dieser Hinsicht folgendermassen aus: Mais il peut se faire que le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ ne soit ni égal à l'unité ni égal à 2 et qu'il varie d'un corps à un autre. [2])

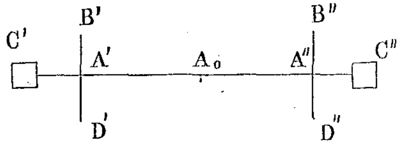
---

[1]) Lamé, théorie de l'elasticité des corps solides, p. 76.

[2]) Zum bessern Verständniss muss ich folgende Bemerkung beifügen: Lamé führte in seiner Elasticitätstheorie an Stelle von α

Eine definitive Erledigung fand diese Frage nicht, bis Kirchhoff in seiner ausgezeichneten Abhandlung (über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen Stabes; Crelle's Journ. f. Mathematik, Bd. 56) eine neue Methode begründete, die er in der Folge benutzte, das obige Verhältniss zu bestimmen.

Die Methode, welche Hr. Kirchhoff anwandte, ist kurz folgende: Es sei $A'A''$ der zu untersuchende homogene Stab, für den wir annehmen, dass er nach allen Richtungen dieselbe Elasticität besitze, wie



wir es z. B. für federharten Stahl wohl annehmen dürfen. In A_0 ist der Stab horizontal befestigt und trägt am freien Ende einen nahezu horizontalen Spiegel C'; in A' ist an dem Stabe ein Arm $B'D'$ senkrecht zu demselben angebracht. Ueber dem Spiegel befindet sich eine Scale, die aus zwei Systemen sich senkrecht schneidender Linien besteht, von denen das eine parallel der Längsrichtung des Stabes geht. In einem Fernrohr beobachtet man das Bild dieser Scala, das von dem Spiegel reflectirt wird.

---

zwei Constanten λ und μ ein, die folgendermassen mit der Grösse α zusammenhängen:

$$\alpha = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\alpha\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)}.$$

Nach Poisson wäre also $\frac{\lambda}{\mu} = 1$

und nach Wertheim $\frac{\lambda}{\mu} = 2.$

Wenn man nun in B den Querarm belastet, so wird der Stab sowohl gebogen, als auch tordirt werden; die Grösse dieser Biegung und Torsion kann vermittelst des Fernrohres an der Scala abgelesen werden und aus diesen beiden Grössen, der Belastung und den Längen A_0A_1 und $A'B'$, berechnet sich nach den Formeln, die Kirchhoff aufgestellt hat, sehr leicht das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation. Die Stäbe, die Hr. Kirchhoff einer Untersuchung unterworfen hat, sind Stäbe von federhartem Stahl von etwa 2,85 Millim. Durchmesser und etwa 300 Millim. Länge und annähernd kreisförmigem Querschnitt. Für die Stäbe findet er:

Nr. 1 $\alpha = 0{,}293$

Nr. 2 $\alpha = 0{,}295$

Nr. 3 $\alpha = 0{,}294$

Im Mittel $\alpha = 0{,}294$.

Hr. Kirchhoff hat auch noch einen Messingstab von ungefähr denselben Dimensionen untersucht und bei diesem für das gesuchte Verhältniss gefunden

$$\alpha = 0{,}387.$$

Er fügt aber selbst hier bei: „Diese Zahl hat sicher nicht die Bedeutung, die ich der entsprechenden bei den Stahlstäben geglaubt habe beilegen zu dürfen, weil die Elasticität des gezogenen Messingdrahtes sicher in der Richtung der Axen eine andere ist, als in andern Richtungen."

Einige Jahre später wurden diese Versuche mit wesentlich derselben Methode von Herrn Okatow[2])

[1]) Kirchhoff, Pogg. Ann., Bd. 108.

[2]) Pogg. Ann., Bd. 119.

wieder aufgenommen und mit mehr Mannigfaltigkeit durchgeführt. Hr. Okatow untersuchte nicht nur Stäbe von federhartem Stahl, sondern auch von ganz gewöhnlichem und weichem ausgeglühtem Stahl; ferner variirte er auch mit dem Querschnitt, indem er nicht nur runde, sondern auch parallelepipedische Stäbe zu seinen Versuchen benutzte. Es sei mir erlaubt, einige numerische Resultate, zu denen er gelangt, hier mitzutheilen:

Resultate der Bestimmungen Okatow's:

Art und Zustand des Stabes.	Stricknadel-Stäbchen.	Englischer Stahl.	Hunstman'scher viereckiger Stahl.
Ursprünglicher, wie ihn die Fabrik liefert	$\alpha = 0{,}275$	$\alpha = 0{,}299$	$\alpha = 0{,}398$
In Oel gehärtet . .	$\alpha' = 0{,}294$	$\alpha' = 0{,}319$	$\alpha' = 0{,}398$
Ausgeglüht und allmählig abgekühlt .	$\alpha'' = 0{,}304$	$\alpha'' = 0{,}328$	$\alpha'' = 0{,}398$

Die Schlüsse, die Okatow aus seinen Versuchen zieht, sind im Wesentlichen folgende:

1) Die Werthe von α sind sowohl für verschiedene Stahlarten von demselben Zustand, wie auch für verschiedene Zustände einer und derselben Stahlart verschieden;

2) bei dem ausgeglühten weichen Stahl derselben Art ist der Werth von α unabhängig von den Dimensionen des Querschnittes des Stabes;

3) der Werth von α nach dem Durchziehen des Drahtes ist kleiner als vor demselben, worauf man auch durch leichte Betrachtungen geführt wird;

4) die plötzliche Abkühlung des rothglühenden

Stabes übt eine ähnliche Wirkung auf die Zahl α aus, wie das Durchziehen desselben durch einen Drahtzug, aber in einem schwächern Grade.

Durch diese neueren Versuche sind also die Vermuthungen, die schon früher gehegt worden sind, vollkommen bestätigt. Wir dürfen die Resultate derselben als massgebend ansehen, denn die Methode leidet nicht an den Uebelständen der frühern Methoden, dass nämlich die Formveränderungen aus den von der Theorie gesetzten Grenzen herausgehen, wie so zahlreiche Controllexperimente beweisen; ferner genügen auch die verwendeten Substanzen jedenfalls ziemlich nahe den theoretischen Anforderungen; wir dürfen daher auch die numerischen Resultate als annähernd richtig ansehen.

Dessenungeachtet ist es doch immer von Interesse, zu prüfen, ob auch durch eine andere, ganz fundamental verschiedene Methode dasselbe erhalten werde oder nicht, da ja dadurch das vorhandene nicht nur bestätigt, sondern auch die Grundlage, auf der diese neue Methode basirt, eine Bestätigung erhält.

Eingangs dieser Arbeit habe ich erwähnt, dass sich das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation bestimmen lasse, indem man nur experimentell feststellt das Verhältniss der Schwingungszahlen des Longitudinal- und des Transversaltones des zu untersuchenden Stabes. Ich will nun hier versuchen, den Zusammenhang dieser beiden Werthe darzuthun.

Bezeichnen wir mit

t_{11}, t_{22}, t_{33} die Normalkräfte, die per Flächeneinheit auf die Begrenzungsflächen eines Prisma's wirken und zwar resp. in der Richtung der u, v, w Kante;

ferner mit $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$ die Verschiebungen der Kanten in der Richtung der Axen, die durch diese Kräfte hervorgebracht werden;

mit ϑ die Summe der Verschiebungen in der Richtung der 3 Axen, also $\vartheta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$;

E den Elasticitätscoëfficienten;

α das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation,

so haben wir für das Gleichgewicht sowohl, als für die Bewegung folgende Gleichungen: [1])

$$1)\quad \begin{cases} t_{11} = \frac{E}{1+\alpha}\left(\frac{du}{dx} + \frac{\alpha}{1-2\alpha}\vartheta\right) \\ t_{22} = \frac{E}{1+\alpha}\left(\frac{dv}{dy} + \frac{\alpha}{1-2\alpha}\vartheta\right) \\ t_{33} = \frac{E}{1+\alpha}\left(\frac{dw}{dz} + \frac{\alpha}{1-2\alpha}\vartheta\right) \end{cases}$$

Lamé findet für diesen Fall ganz dieselben Gleichungen, nur hat er an Stelle von α andere Constanten, λ und μ, eingeführt; es lauten die entsprechenden Lamé'schen Gleichungen: [2])

$$2)\quad \begin{cases} N_1 = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{du}{dx} \\ N_2 = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{dv}{dy} \\ N_3 = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{dw}{dz} \end{cases}$$

Es hält nun nicht schwer, zwischen den Constanten λ und μ, wie sie Lamé braucht, und unserer Grösse α eine Relation herzuleiten.

---

[1]) Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper, p. 48.

[2]) Lamé, théorie de l'elasticité des corps solides, p. 157.

Damit nämlich die Gleichungen (1) und (2) identisch sind, müssen sowohl die Coëfficienten von ϑ, als auch diejenigen der Differentialgleichungen einander gleich sein, also:

$$2\mu = \frac{E}{1+\alpha}$$

$$\lambda = \frac{E}{1+\alpha} \cdot \frac{\alpha}{1-2\alpha}$$

Durch Division kommt:

$$\frac{2\mu}{\lambda} = \frac{1-2\alpha}{\alpha}$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\text{I.} \qquad \alpha = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{2\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)}$$

Diess ist nun die Relation, die zwischen den Grössen α, λ und μ stattfindet und es handelt sich nun nur noch darum, das Verhältniss $\frac{\lambda}{\mu}$ zu bestimmen.

Die Elasticitätstheorie liefert für die Schwingungszahlen des Longitudinal- und des Torsionstones von Stäben folgende Ausdrücke: [1])

$$n_l = \frac{1}{4l}\sqrt{\frac{Eg}{d}}$$

$$n_t = \frac{1}{4l}\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

worin bedeuten:

n_l die Schwingungszahl des Grundtones der Longitudinalschwingungen eines Stabes;

n_t diejenige des Torsionstones desselben schwingenden Systems;

---

1) Beer, Theorie der Elasticität, p. 89—103.

l die Länge des schwingenden Stabes;
E den Elasticitätscoëfficienten;
g die Acceleration der Schwere;
μ die Lamé'sche Constante;
d das specifische Gewicht des Stabes;
ϱ die Massendichtigkeit, also:

$$\varrho = \frac{d}{g}$$

Durch Division der beiden Gleichungen erhält man:

$$\frac{n_l}{n_t} = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

Nun ist aber der Elasticitätscoëfficient E durch folgende Gleichung durch die Constanten λ und μ definirt:

$$E = \frac{3\lambda + 2\mu}{1 + \frac{\lambda}{\mu}}$$

daher:

$$\frac{n_l}{n_t} = \sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{\mu + \lambda}} = k$$

und hieraus bestimmt sich nun das gesuchte Verhältniss

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{k^2 - 2}{3 - k^2}$$

Kennt man also k, d. h. das Verhältniss der Schwingungszahlen des Longitudinal- und des Torsionstones ein und desselben Stabes, so kann man sofort die Grösse $\frac{\lambda}{\mu}$ nach II. bestimmen und dann nach I. das gesuchte Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation. Der Bequemlichkeit wegen können wir noch I. und II. verbinden und erhalten so folgenden sehr einfachen Ausdruck für α:

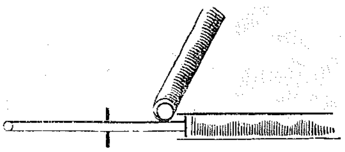
III. $$\alpha = \frac{k^2 - 2}{2}$$

Man ersieht schon aus diesem Ausdruck für die Grösse α, dass man auf diesem Wege nur durch eine wirklich genaue Methode auf gute Werthe von α gelangen kann; da nämlich die experimentell zu ermittelnde Grösse k im Quadrate vorkommt und also nur kleine Fehler in deren Bestimmung einen bedeutenden Einfluss auf das Resultat ausüben werden. Die folgenden Bestimmungen werden zeigen, in wie weit die angewandte Methode den Anforderungen genügt.

Um dieses Verhältniss k zu bestimmen, hat mir Hr. Prof. Kundt eine Methode angegeben, die auf seiner ausgezeichneten Entdeckung der Staubfiguren hervorgebracht durch tönende Luftsäulen basirt. Bringt man einen Stab durch Reiben in kräftige Schwingungen und hält man vor denselben eine Röhre, in der sich leichtes Pulver, wie Lycopodium oder Kieselsäure befindet, so wird die Luft in derselben in Mitschwingung versetzt und es ordnet sich das Pulver in der Röhre in regelmässige Figuren, wie sie sich in den betreffenden Abhandlungen Kundt's abgebildet finden.[1] An den Knotenstellen bleibt das Pulver liegen, während es an den Stellen der Bewegung in Rippen angeordnet wird. Misst man nun den Abstand zweier solcher Knotenstellen, so hat man direkte die halbe Wellenlänge des schwingenden Systems und damit auch die Schwingungszahl desselben. Zu unseren Bestimmungen genügt die Kenntniss der Wellenlängen der beiden Töne. Auf diese Weise bestimmen wir also die Wellenlänge des Longitudinaltones des Stabes und auf ähnliche Weise auch diejenige des Torsions-

---

[1]) Kundt, Pogg. Ann., Bd. 128, Taf. V, Fig. 2 und 3.



tones. Befestigt man nämlich den Stab z. B. in der Mitte und klebt auf dem einen Ende eine Scheibe auf, wie es schematisch in beistehender Figur aufgezeichnet ist, und tordirt nun den Stab so energisch, dass er einen kräftigen Torsionston gibt, so wird in dem vorgesetzten Wellenrohre das eingestreute Pulver in ebenso regelmässige Figuren angeordnet, wie beim Longitudinalton und es kann nun ganz, wie bei diesem, durch Messung der Abstände der Knoten die Wellenlänge λ_t des Torsionstones ermittelt werden. Kennen wir aber die Wellenlängen der beiden Töne, so erhalten wir die Grösse k

IV. $$k = \frac{n_l}{n_t} = \frac{\lambda_t}{\lambda_l}.$$

Ich will hier bemerken, dass es zu diesen Versuchen einer ziemlichen Uebung bedarf und dass es wohl nicht jedem Anfänger sogleich gelingen wird, gute Wellenfiguren zu erhalten. Es ist diess besonders der Fall beim Torsionston.

Ehe ich nun zur eigentlichen Beschreibung der Versuche übergehe, will ich noch den Apparat beschreiben, der bei den Bestimmungen benutzt wurde.

In Figur I. stellt BC den zu untersuchenden Stab vor, welcher in A festgehalten und durch die Schrauben S und S' mehr oder weniger stark gepresst werden kann. Die Auflagerungsstelle ist etwa 20^{mm} breit und ist ganz gleich beschaffen, wie es in Fig. II. angegeben ist. Dieselbe Wellenröhre W dient sowohl dazu, die Wellenlänge des Longitudinal-, als auch des

Torsionstones zu bestimmen; sie wird zu diesem Zwecke das eine Mal in die Stellung FF' gebracht und das andere Mal in die Lager LL' eingelegt. Der Stöpsel K in der Wellenröhre ist von Kork und mit Sammet umklebt und dient dazu, die Luftsäule in derselben abzupassen; denn die stehenden Wellen in derselben entstehen erst dann in ihrem Maximum, wenn die Länge der Luftsäule genau ein Vielfaches der halben Wellenlänge des Tones beträgt. Hr. Prof. Kundt[1]) hat zwar experimentell in umfassendster Weise gezeigt, dass auch dann die Staubfiguren entstehen und gemessen werden können, wenn die obige Bedingung nicht erfüllt ist, wenn sogar die Länge der Luftsäule um $^1/_4$ λ verschieden ist von einem Vielfachen der halben Wellenlänge; er hat aber auch zugleich darauf hingewiesen, dass in diesem Falle die Figuren nicht mehr scharf entstehen, was ich auch immer bestätigt gefunden habe.

Was nun die Art und Weise der Versuche betrifft, so geschahen sie in folgender Weise:

Den Longitudinalton der Stahlstäbe erhielt man durch Reiben nach der Längsrichtung des Stabes an dem Ende B. Zum Reiben benutzte ich einen weichen Lederlappen, der mit Collophonium bestreut wurde, um die Adhäsion zu vergrössern. War der Stab dick, sodass er beinahe das Wellenrohr ausfüllte, so liess man den Stab als solchen die Wellenfiguren erzeugen, war er hingegen dünner, so klebte man ein ganz dünnes Cartonblatt vor (ich benutzte zu diesem Zwecke stets Spielkarten), das beinahe den-

---

1) Kundt, Pogg. Ann., Bd. 135, p. 349.

selben Durchmesser hatte, wie das Wellenrohr. Die Wellenlänge des Torsionstones erhielt ich, wie schon bemerkt, indem ich gegen das Ende C hin, bei D, ein kreisförmiges Cartonblatt aufklebte und dieses vor der Wellenröhre, die sich nun in der Stellung LL' befindet, schwingen liess. Ich will an dieser Stelle noch den Apparat beschreiben, der dazu dient, einen kräftigen Torsionston hervorzubringen.

Dieser Apparat ist eigentlich nichts anderes, als ein Prony'scher Zaum en miniature; er ist in Fig. II. in der Vorderansicht gezeichnet. Die beiden Backen B und B' sind von Buchenholz; in denselben sind zwei viereckige Ausschnitte A und A' in die zwei Korkstücke eingepasst; die cylinderförmige Aushöhlung an denselben ist mit Leder gefüttert, das bei jedem Versuch mit Collophoniumstaub bestreut wurde. Dieser Apparat wird bei B an den zu untersuchenden Stab angesetzt und vermittelst der Schrauben C und C' werden die Backen je nach Bedürfniss schwächer oder stärker angepresst. Wenn man nun diese Vorrichtung im richtigen Takt vor- und rückwärts dreht, so erhält man bei günstigen Bedingungen und einiger Uebung einen eben so klaren und distincten Ton, wie man ihn beim Reiben nach der Längsrichtung erhielt. Zum Schlusse dieser allgemeinen Betrachtungen über die Methode will ich noch anführen, dass vor dem Versuche sowohl das Blatt bei D als auch bei C aufgeklebt wurde und man so immer den Torsionston und den Longitudinalton des ganzen schwingenden Systems erhielt.

Es handelt sich nun zunächst darum, den Einfluss, den die Belastungen bei D und C auf die eigentlichen

Töne des Stabes ausüben, zu untersuchen, d. h. von den Tönen des Systems auf diejenigen des Stabes zurückzuschliessen.

Betrachten wir vorerst den Einfluss, den die Belastungen auf den Longitudinalton ausüben. Um einen allfälligen Unterschied des Longitudinaltones des Stabes von demjenigen des Systems ganz evident nachzuweisen, klebte ich nicht das Cartonblatt auf (das beiläufig sammt dem verwendeten Siegellack nie über ein halb Gramm wog), sondern ein kleines Stück Holz von etwa 2 Gramm Gewicht und erhielt damit die erste Reihe. Ich entfernte nun jede Belastung von dem Stabe und erhielt folgende zweite Reihe für den Longitudinalton des Stabes:

Tabelle I.

Reihe für die halbe Wellenlänge des Longitudinaltones.

	II. des Stabes.		II. des Systems.
	780,6		781,9
	723,0		724,5
	667,0		667,9
	609,0		610,8
	553,3		554,1
	495,6		497,1
	438,3		440,0
	381,2		383,0
	325,2		326,2
Wahr. Werth	57,00	Wahr. Werth	56,96.

Aus zwei andern solchen Reihen erhielt man:

	56,98		57,04
	56,94		57,06
Im Mittel	56,97	Im Mittel	57,02.

(NB. Diese Reihen erhielt man mit dem Stahlstab Nr. I. im federharten Zustand.)

Man ersieht aus diesen Reihen genügend, dass die Longitudinalwelle des Systems von derjenigen des Stabes sehr wenig abweicht und dass die Abweichung für solche kleine Belastungen, wie wir sie anwenden, gar nicht aus der Fehlergrenze der Beobachtung herausgeht.

Was nun aber den Torsionston betrifft, so fehlt uns leider für denselben dieses Controllexperiment; es ist aber jedenfalls erlaubt anzunehmen, dass durch das kleine Cartonblatt, das, wie schon bemerkt, sammt Siegellack nie über $^1/_2$ Gramm wog, der Torsionston des Stabes nicht so geändert wird, dass die Abweichung die Fehlergrenze der Einstellung überschreitet. Um aber wenigstens theilweise ein Controllexperiment zu haben, klebte man zwei solcher Cartonstücke auf einander und erhielt so folgende Reihen:

Tabelle II.

Reihe für die halbe Wellenlänge des Torsionstones bei

I. einfachem Blatt.		II. doppeltem Blatt.	
I. Ablesung	729,1	I. Ablesung	352,3
	622,7		458,7
	516		566,2
	408,5		672,3
	301,7		780,3
II. Ablesung	729,2	II. Ablesung	352,0
	623,3		458,3
	515,5		566,1
	409,2		672,3
	301,8		779,8
	106,87		106,96

Aus zwei andern Reihen erhielt man:

	I.		II.
	bei einfachem Blatt.		bei doppeltem Blatt.
	107,12		107,05
	107,09		106,90
Im Mittel	107,03	Im Mittel	106,97

Man ersieht aus diesen mitgetheilten Zahlen, dass der Einfluss des zweiten aufgeklebten Cartonblattes ein ganz verschwindender ist und man ist daher berechtigt, anzunehmen, dass wenigstens annähernd der Torsionston des Systems auch als solcher des Stabes gelten kann. Ich habe in vorstehender Tabelle I. von denselben Figuren zwei Messungen angegeben, um ein Mass für die Genauigkeit der Ablesungen zu geben; man ersieht aus diesen Zahlen, dass zwei Ablesungen desselben Knoten nie einen ganzen Millimeter von einander abweichen, obschon diese Wellenlängen die grössten sind, die ich bei meinen Versuchen erhielt. Bei kleinern Wellenlängen sind die Abweichungen der Einstellungen noch geringer.

Der zweite Punkt, den ich nun noch näher zu erörtern hätte, wäre die Messung der Wellenlängen; es genüge aber, indem ich einfach angebe, dass die Messungen auf ganz dieselbe Weise vorgenommen wurden, wie sie Hr. Prof. Kundt[1]) in seiner ausführlichen Abhandlung beschreibt.

Ebenso geschahen auch die Berechnungen der Wellenlängen genau nach der Kundt'schen Formel:

$$x\left(\frac{n\cdot(n+1)\,(n+\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3}\right) = n\,(A_n - A_0) + (n-2)(A_{n-1} - A_1) + \dots$$
$$+ (n - 2\,m)\,(A_{n-m} - A_m) + \dots$$

d. h. nach folgender Regel:

[1]) Pogg. Ann., Bd. 135, p. 356.

Man subtrahire die gleichweit von den Enden abstehenden Ablesungen von einander, multiplizire jede dieser Differenzen mit der Anzahl der zwischen liegenden Wellen, addire alle Producte und dividire durch

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

wo n die Anzahl der gemessenen Wellen bedeutet.

Zum Schlusse der Besprechung der Methode muss ich noch erwähnen, dass ich als Wellenrohr eine Glasröhre von 33 Mm. innerm Durchmesser benutzte, um den Einfluss derselben auf die Wellenlänge zu einem sehr geringen zu machen; denn es haben ja die Untersuchungen Kundt's und ebenso die meinigen [1]) und diejenigen A. Seebeck's [2]) vollkommen nachgewiesen, dass auf verschiedene Wellenlängen der Einfluss der Röhrenweite ein verschiedener ist. Wenn er also, wie es bei engern Röhren der Fall ist, sehr bedeutend würde, so hätte man hier in der Bestimmung einen constanten Fehler, was nun aber durch eine solche weite Röhre, bei so kleinen Wellenlängen, vermieden ist. Wenn wir aber dennoch annehmen, dass die Wellenlänge in der Röhre vermindert würde, wenn auch nur sehr wenig, so ist noch zu bemerken, dass sich dieser jedenfalls minime Einfluss durch die Division noch theilweise weghebt.

Ein anderer Umstand, der die Wellenlängen beeinflusst, ist die Temperatur und der hygrometrische Zustand der Luft. Es ist aber sofort einleuchtend, dass dieser Einfluss durch die Division sich vollkom-

---

[1]) Pogg. Ann., Bd. 136, p. 296.

[2]) A. Seebeck, Inaugural-Dissertation. Göttingen 1869.

men weghebt; indem ja Zähler und Nenner dadurch nur mit einem und demselben Factor versehen würde, wenn man nämlich annimmt, dass während der Zeit des Versuches weder Temperatur, noch der Feuchtigkeitsgrad der Luft ändert, welche Annahme für eine so kurze Zeit jedenfalls gerechtfertigt ist. Ich habe daher bei meinen Versuchen weder Temperatur- noch Feuchtigkeitsmessungen angestellt, sondern nur die Versuche für Longitudinal- und Torsionstöne so schnell wie möglich auf einander folgen lassen.

Die Materialien, die zu den Versuchen benutzt wurden, sind Stahlstäbe in ihren verschiedenen Zuständen, da dies Material am geeignetsten für diese Bestimmungen schien. Bevor die Methode so ausgebaut war und bis ich die nöthige Fertigkeit besass, benutzte ich nur Glasstäbe und Glasröhren; leider fehlte mir aber dann die Zeit, um mit der verbesserten Methode auch dies Material einer eingehenden Prüfung zu unterziehen. Ich hoffe aber, doch bald auch hierüber einige Notizen zu bringen.

Die Stahlstäbe, von denen das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation bestimmt wurde, sind Stäbe von dem gewöhnlichen Stahl, wie er im Handel als runder englischer Gussstahl vorkommt.

Ich hatte die Absicht, mit den Dimensionen der Stäbe stark zu variiren, leider gestattet aber die Methode dies nicht in dem Masse, als es zu wünschen wäre. Bei den sehr dünnen Stäben hielt es nämlich sehr schwer, einen klaren distincten Torsionston hervorzubringen und wenn dies auch noch der Fall ist, so ist jedenfalls die Vermuthung gerechtfertigt, dass durch das aufgeklebte Cartonblatt der Torsionston stark verändert werde, was eben bei dickern Stäben weniger anzunehmen; bei sehr dicken Stäben hielte es hingegen schwer, den Longitudinalton so kräftig zu erhalten, dass er Wellenfiguren erzeugt, wenn man nämlich nicht mit der Länge der Stäbe in zu bedeutende Grösse gehen will.

Am geeignetsten zu diesen Bestimmungen scheinen mir Stäbe von etwa 15^{mm} Durchmesser und etwa 900^{mm} Länge. Bei diesen Dimensionen gelingt es dann sehr leicht, sowohl einen guten Torsions- als auch Longitudinalton zu erhalten.

Stahlstab Nr. I.

$$l = 859^{mm}; \quad d = 14{,}6^{mm}.$$

Der Stab wurde in dem Zustande, wie ihn die Fabrik liefert, tüchtig ausgeglüht und dann rasch abgekühlt; nachher wurde er über einem ziemlich starken Holzfeuer erwärmt und mit Fett bestrichen. Die Erwärmung wurde so lange fortgesetzt, bis das Fett abbrannte; das Abbrennen wurde je nach den Dimensionen des Stabes zwei bis drei Mal wiederholt, so dass sich erwarten liess, dass die äusserste glasharte Rinde, die durch die plötzliche Abkühlung entsteht, den innern Theilen gleich und der Stab also homogen-elastisch sei. Diesen Zustand bezeichne ich in der Folge kurzweg als „federhart“. Den so präparirten Stab untersuchte ich nun nach der oben beschriebenen Methode und erhielt folgende Werthe für die respectiven Wellenlängen:

Tabelle III.

Halbe Wellenlänge für den Torsionston des Stabes Nr. I.

I. Ablesung	328,3
	423,8
	511,9
	604,2
	697,2
	788,3
II. Ablesung	328,9
	423,2
	512,2
	603,4
	697,3
	788,1
Wahrscheinl. Werth	91,75

Es ergibt nämlich die erste Ablesung . $\lambda_t = 91,79$
und die zweite . . . . $\lambda_t = 91,70$
im Mittel also . . . . $\lambda_t = 91,75.$

Die zugehörige halbe Wellenlänge des Longitudinaltones berechnet sich aus folgender Reihe zu:

Tabelle IV.

Halbe Wellenlänge des Longitudinaltones des Stabes Nr. I.

	384,1
	441,6
	499,0
	555,9
	613,0
	669,2
	726,8
	783,0
Wahrscheinl. Werth	56,98.

Wir erhalten also für die halben Wellenlängen der beiden Töne:

$$\lambda_t = 91,75$$
$$\lambda_l = 56,98$$

hieraus berechnet sich k zu:

$$k = \frac{\lambda_t}{\lambda_l} = 1,6102$$

und daraus endlich:

$$\alpha = \frac{k^2 - 2}{2} = 0,296.$$

Aus vier andern solcher Versuchsreihen ergeben sich folgende Werthe für das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation:

Aus Versuch Nr. 2: $\alpha = 0,297$,
„ „ „ 3: $\alpha = 0,299$,
„ „ „ 4: $\alpha = 0,295$,
„ „ „ 5: $\alpha = 0,297$.

Im Mittel erhalten wir also für den Werth des gesuchten Verhältnisses aus fünf Versuchsreihen:

$$\alpha = 0,297.$$

Der Stab wurde nun noch einmal einer vollständigen Ausglühung unterworfen und nachher zum Erkalten in die Asche gesteckt, sodass er ganz weich wurde. Derselbe ergab nun für das Verhältniss folgende Werthe:

$$\alpha = 0,300,$$
$$\alpha = 0,305,$$
$$\alpha = 0,300,$$

Im Mittel $\alpha = 0,302$.

Derselbe Stahlstab wurde hierauf noch einmal sorgfältig ausgeglüht und nach der vorhin beschriebenen Methode federhart gemacht; er lieferte alsdann folgende Resultate:

$$\alpha = 0{,}295,$$
$$\alpha = 0{,}292,$$
$$\alpha = 0{,}297.$$
$$\text{Im Mittel}\quad \alpha = 0{,}295.$$

Durch diesen letzten Versuch glaube ich dargethan zu haben, dass das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation nach mehrmaligen Ausglühungen im federharten Zustand dennoch nur geringe oder vielleicht gar keine Veränderungen erleidet; ich habe daher in der Folge die Stäbe nur im ersten federharten Zustand untersucht.

Stahlstab Nr. II.

$$l = 886^{\text{mm}};\quad d = 20{,}0^{\text{mm}}.$$

Dieser Stab, der etwas grössere Dimensionen hat als der Stab Nr. I, wurde ganz ebenso behandelt, wie ich früher angegeben habe. Hingegen wurde die erste Ausglühung zweimal wiederholt, um sicher zu sein, dass bei diesem grösseren Querschnitt der Stab soviel wie möglich homogen-elastisch werde. Er ergab im federharten Zustand untersucht folgende Werthe:

$$\alpha = 0{,}290,$$
$$\alpha = 0{,}293,$$
$$\alpha = 0{,}298,$$
$$\alpha = 0{,}303.$$
$$\text{Im Mittel}\quad \alpha = 0{,}296.$$

Die erhaltenen Zahlen schwanken in ziemlich bedeutenden Grenzen. Es rührt diess daher, dass es bei einer solchen Dicke des Stabes ziemlich schwer hält, schnell einen guten Ton zu erhalten und daher oft einige Minuten verstreichen, ehe man die zugehörige Wellenlänge des zweiten Tones bestimmen kann; die in dieser Zwischenzeit mögliche Temperaturveränderung kann nun einigen Einfluss haben. Um diesen Einfluss wenigstens theilweise zu compensiren, habe ich das eine Mal zuerst die Länge der Welle des Torsionstones, das andere Mal diejenige des Longitudinaltones bestimmt.

Nach einer dritten Ausglühung und nachheriger allmähliger Abkühlung ergab der Stab im weichen Zustande folgende Werthe:

$$\alpha = 0{,}300,$$
$$\alpha = 0{,}306,$$
$$\alpha = 0{,}299.$$

$$\text{Im Mittel} \quad \alpha = 0{,}302.$$

Stahlstab Nr. III.

$$l = 1000^{\text{mm}}; \quad d = 14{,}9^{\text{mm}}.$$

Den Stab Nr. III habe ich auch im gewöhnlichen Zustand, wie ihn die Fabrik liefert, untersucht, gelangte aber dabei auf eine sehr grosse Abweichung. Diese Abweichung erklärt sich übrigens sehr leicht; vor allem aus sind die Bedingungen der Theorie bei den Stäben im gewöhnlichen Zustand nicht erfüllt, indem sie durchaus nicht homogen-elastisch sind; es haben daher die Zahlen für diesen Zustand auch wenig Bedeutung. Der Stab lieferte in diesem Zustande folgende Werthe:

$$\alpha = 0{,}253,$$
$$\alpha = 0{,}257,$$
$$\alpha = 0{,}256,$$
$$\alpha = 0{,}253.$$

$$\text{Im Mittel} \quad \alpha = 0{,}255.$$

Dieser Werth für α ist bedeutend kleiner als für die andern Zustände der Stahlstäbe, doch kann man sich diesen zu kleinen Werth so erklären: Der Stab, wie er von der Fabrik geliefert wird, ist mit einer glasharten Rinde überzogen und diese wird bei einer Dilatation eine Contraction theilweise verhindern; der Einfluss dieser Rinde ist sogar bei einer einmaligen Ausglühung noch bemerklich, wie aus folgenden Werthen hervorgeht:

$$\begin{array}{l} \alpha = 0{,}279 \\ \alpha = 0{,}278 \\ \underline{\alpha = 0{,}282} \\ \alpha = 0{,}280. \end{array}$$

Hingegen ist der Einfluss der Rinde ganz beseitigt durch eine zweimalige Ausglühung, wie es aus den Werthen, die der Stab im federharten Zustand liefert, hervorgeht:

$$\begin{array}{rl} & \alpha = 0{,}297 \\ & \alpha = 0{,}295 \\ & \alpha = 0{,}296 \\ & \alpha = 0{,}293 \\ & \underline{\alpha = 0{,}298} \\ \text{Im Mittel} & \alpha = 0{,}296. \end{array}$$

Leider konnte ich diesen Stab nicht noch einmal im weichen Zustand behandeln, indem derselbe beim Erwärmen durch Unvorsichtigkeit entzwei gebrannt wurde.

Neben diesen drei Stahlstäben in ihren verschiedenen Zuständen untersuchte ich noch einige einzelne Stäbe in irgend einem der beiden Zustände. Von diesen will ich nur noch einen einzigen anführen, da er in seiner Länge etwas von den schon untersuchten abweicht. Es ist diess ein Stahlstab mit folgenden Dimensionen:

$$l = 640^{mm}; \quad d = 17,6^{mm}.$$

Er lieferte im weichen Zustande die folgenden Werthe für das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation:

$$\alpha = 0,305$$
$$\alpha = 0,310$$
$$\alpha = 0,304$$

Im Mittel $\alpha = 0,306$

Es wurde endlich noch ein Stahlstab untersucht, aber eigentlich mehr dazu, eine andere principielle Frage zu lösen, als einen numerischen Werth für das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation zu erhalten. Es ist diess ein Stab, wie er von der Fabrik geliefert wird; er war aber durch Abdrehen und Schleifen von seiner harten Kruste befreit und lieferte, nach der gewöhnlichen Methode untersucht, folgende Zahlen:

Stahlstab Nr. V.

$$l = 980^{mm}; \quad d = 17,7^{mm}.$$

$$\alpha = 0,293$$
$$\alpha = 0,295$$
$$\alpha = 0,290$$
$$\alpha = 0,288$$

Im Mittel $\alpha = 0,292.$

Diese Zahl wurde also erhalten, indem man den Stab in der Mitte befestigte und so in zwei Abtheilungen schwingen liess. Da der Stab zu solchen Schwingungen ganz ausserordentlich geeignet schien, versuchte ich nun den Longitudinal- und Torsionston noch zu erhalten, indem ich denselben in vier Abtheilungen schwingen liess.

Der Stab wurde im ersten Viertel seiner Länge eingeklemmt, am dritten Viertel mit der Hand festgehalten und auf diese Weise wieder die Wellenlänge des Longitudinal- und des Torsionstones festgestellt; man musste so die Octave der frühern Töne erhalten. Es gelang mir wirklich, auf diese Weise ganz gute Wellen zu erzeugen, wie aus folgender Tabelle ersichtlich ist:

Tabelle V.

Halbe Wellenlänge für den II. Ton des Stahlstabes Nr. V.

λ_t	λ_l
392,2	785,5
443,0	753,3
496,7	721,9
549,2	689,6
602,0	657,0
653,0	624,4
705,0	592,3
756,8	559,8
708,3	527,2
52,10	495,1
	463,2
	430,5
	32,30

Hieraus ergibt sich:

$$k = 1,6130,$$

und daraus endlich:

$$\alpha = 0,301.$$

Zwei andere solche Reihen ergaben:

$$\alpha = 0{,}293$$
$$\alpha = 0{,}295$$

Im Mittel $\alpha = 0{,}296.$

Die gefundenen Resultate für den Grundton und die Octave stimmen ziemlich gut mit einander überein: es ist daher der Schluss gerechtfertigt, dass es bei diesen Bestimmungen ganz gleichgültig ist, welchen Ton des Stabes man für die Versuche benutzte. Es ist dies jedenfalls von Bedeutung für das Experiment, indem man, da die Wellenröhre immer von einer bequemen Länge gewählt werden wird, bei längeren Stäben oft nur wenige Wellen in derselben erhält. Da man nun bei der Messung der Wellenlängen, um gute Resultate zu erhalten, stets die beiden äussersten Wellen nicht mit in Berücksichtigung ziehen darf, so erhielte man zur schliesslichen Berechnung nur eine sehr kleine Anzahl von bestimmenden Stücken. Die Anzahl der Wellen kann nun durch Benutzung des zweiten Tones verdoppelt werden und damit wird die Genauigkeit der Bestimmung ganz bedeutend erhöht.

Die numerischen Resultate meiner Beobachtungen stelle ich in folgender Tabelle zusammen:

Tabelle VI.

Zusammenstellung der Resultate.

Nro.	Dimensionen d. Stabes.		Zustand des Stabes.	
	Länge.	Durchm.	Federhart.	Weich.
I.	859^{mm}	$14{,}6^{mm}$	$\alpha_1' = \begin{cases}0{,}297\\0{,}295\end{cases}$	$\alpha_1'' = 0{,}302$
II.	886	20,0	$\alpha_2' = 0{,}296$	$\alpha_2'' = 0{,}302$
III.	1000	14,9	$\alpha_3' = 0{,}296$	—
IV.	640	17,6	—	$\alpha_4'' = 0{,}306$
		Im Mittel	$\alpha' = 0{,}296$	$\alpha'' = 0{,}303$
			$\alpha'' - \alpha' = 0{,}007.$	

Die erhaltenen Zahlen stimmen sehr gut mit den von den HH. Kirchhoff und Okatow gefundenen Zahlen für Stricknadelstäbchen, hingegen sind sie wesentlich kleiner als die Zahlen, die Hr. Okatow für den englischen runden Stahl angibt. Was hingegen den Unterschied zwischen den Zuständen des Stahles anbetrifft, so tritt ganz evident hervor, dass für den federharten Zustand die Zahlen etwas kleiner sind, als für den weichen Zustand; hierin stimmen die Resultate wenigstens qualitativ mit denjenigen Okatow's. Ein wesentlicher Unterschied der Werthe des Verhältnisses der Quercontraction zur Längendilatation ist bei den hier untersuchten Stäben bei verschiedenen Dimensionen nicht ersichtlich; Herr Okatow findet ebenfalls so kleine Differenzen für die verschiedenen Dimensionen, dass sie bei meinen Beobachtungen vollständig in die Fehlergrenze fallen würden.

Es ist immerhin sehr bemerkenswerth, dass so viel grössere Dimensionen der Stäbe, wie die hier benutzten gegenüber denjenigen Kirchhoff's und Okatow's sind, doch noch annähernd dieselben Resultate liefern und zwar auf eine ganz verschiedene Methode.

Die hier beschriebene Methode ist überhaupt zu Messungen in dieser Hinsicht sehr geeignet und liefert bei einiger Uebung so genaue Resultate, wie man kaum a priori vermuthet.

Die Resultate der vorliegenden Arbeit lassen sich kurz in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1) Das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation ist bei Stahlstäben im federharten und

weichen Zustand in den Grenzen der Beobachtungsfehler unabhängig von den Dimensionen der Stäbe; wenigstens bei den hier untersuchten Dimensionen.

2) Der Werth von α ist für weichen Stahl etwas grösser, als für federharten. (Ich habe die Stäbe gewöhnlich noch im glasharten Zustand und wie sie von der Fabrik geliefert werden, untersucht; ich gebe hiefür keine Zahlen an, da die beiden Zustände durchaus nicht den theoretischen Bedingungen entsprechen. Nur möchte ich erwähnen, dass beim glasharten Zustand ungefähr dieselben Werthe erhalten wurden, wie beim federharten; hingegen variiren die Resultate für den gewöhnlichen Zustand in sehr weiten Grenzen.)

3) Es ist ohne Einfluss auf das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation, ob man den ersten oder zweiten Ton des Stabes zu dessen Bestimmung benutzt.

Die vorliegende Arbeit wurde im physikalischen Laboratorium des eidgenössischen Polytechnikums ausgeführt. Es sei mir erlaubt, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. A. Kundt, hier öffentlich meinen innigsten Dank auszusprechen für die Theilnahme, die er stets meinen Arbeiten bewiesen hat, und für die Freundlichkeit, mit der er mir immer mit Rath zur Seite stand.

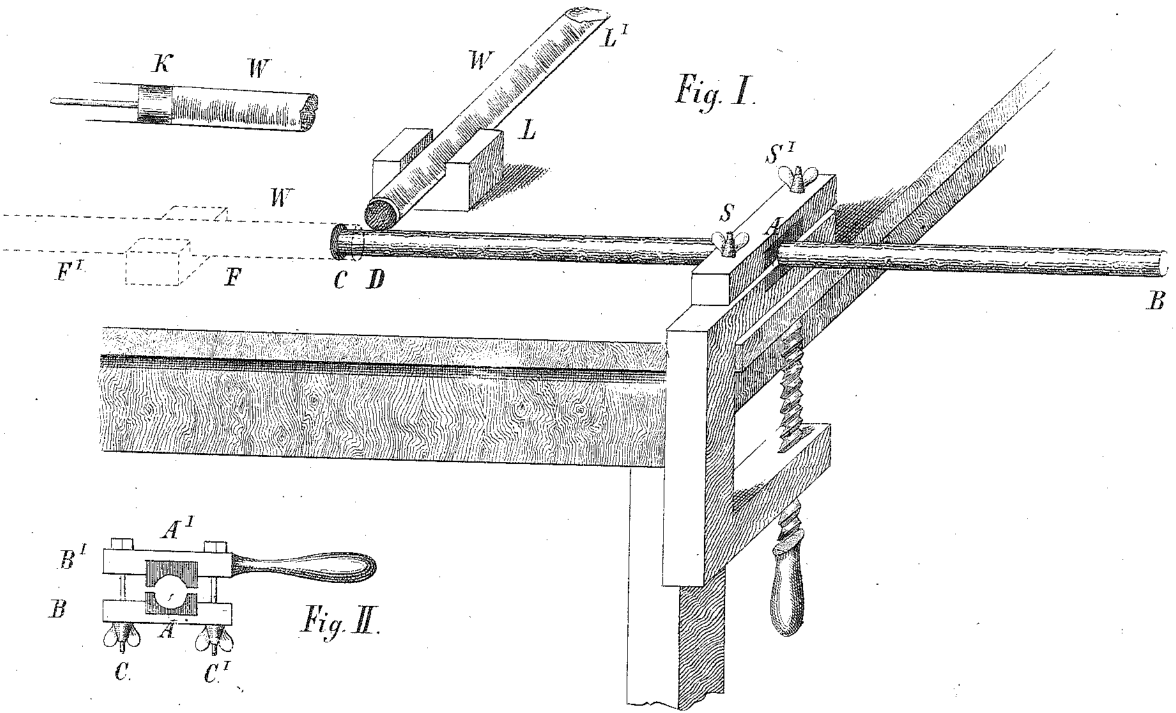


Fig. I.

Fig. II.