Pargas	3,50 F	10,51 RO	4 SiO_2
Nordamerika	2,87 „	10,30 „	4 „
Humit I.	1,26 „	10,58 „	4 „
Humit III.	0,91 „	9,50 „	4 „

so ersieht man wohl ein annähernd gleiches Verhältniss zwischen SiO_2 und RO, welches man durch $5\,RO\,.\,2\,SiO_2$ oder mit Rammelsberg durch $8\,RO\,.\,3\,SiO_2$ ausdrücken könnte, aber man wird dabei doch zugeben müssen, dass man bei den Analysen eines Minerals, welches nur wenige Bestandtheile enthält, nicht geringere Ansprüche machen darf, als bei anderen, und wenn die Mehrzahl der Analysen Verluste bis zu 4 Procent hinauf aufweist, so muss man eine Erneuerung der Analysen für nothwendig erachten. Diese Nothwendigkeit darzulegen war der Zweck meiner Berechnung. Dass ich hierbei nicht auf diejenigen Analysen eingehen konnte, welche noch andere Bestandtheile ergaben, ist selbstverständlich, weil das dazu dienende Material weniger rein gewesen ist.

Der jetzige Standpunkt unserer Kenntnisse über die Schwere.

Von

Alb. Mousson.

---

1. Unterscheidung zweier Schwerkräfte.

Die Geschichte der Physik bietet einzelne Beispiele dar, dass eine Erscheinung zu der Zeit, da man sich speciell mit ihr beschäftigte, vollkommen klar und durchsichtig vorlag, später aber, eben weil man sie als erschöpft betrachtete, wieder in eine gewisse Unsicherheit zurücksank. So ist es auch mit der wichtigsten und bekanntesten aller Naturkräfte, der Schwere, ergangen. Zu der Zeit der Versuche von Benzenberg[1], da Laplace[2], Gauss[3] und Olbers[4] die Theorie des Falles der Körper auf der drehenden Erdkugel aufstellten, war darüber kein Zweifel, dass in den beiden wichtigsten und bekanntesten Erscheinungen der Schwere, in der Fall- und der Pendelbewegung, die Kraft mit einem verschiedenen Werthe eingehe, so dass man eine Fallschwere und eine Pendelschwere unterscheiden müsse. Später, da von diesen beiden Erscheinungen nur die eine, die Pendelbewegung, sich einer scharfen Bestimmung fähig erwies, während die andere, bis auf die neueste Zeit, wegen der Ungenauigkeit der Zeitmessungen, nur einer sehr wenig scharfen, wurde jene ausschliesslich zur Bestimmung der Schwerenbeschleunigung benutzt und der so gefundene Werth, uneingedenk des wesentlichen Unterschiedes beider, in die Fall- und alle andern Schwerenerscheinungen eingeführt. Ich wüsste kein einziges neueres physikalisches Werk, in welchem auf die keineswegs unerhebliche Abweichung der Pendel- und Fallschwere, die wir G und g nennen wollen, nach Stärke und Richtung gebührend Nachdruck gelegt würde.

---

[1]) Benzenberg, Versuche über die Umdrehung der Erde. Dortmund 1804.

[2]) Bull. de la Soc. philomat. Prairial. au XI. — Benzenberg, a. a. O. p. 388.

[3]) Benzenberg, a. a. O. p. 363.

[4]) Benzenberg, a. a. O. p. 372.

Der Unterschied der beiden Schweren G und g hat darin seinen Grund, dass die Pendelschwere G, wie sie bei allen mit der Erde verbundenen Körpern sich offenbart, eine Resultirende aus der Fliehkraft und der wahren Erdanziehung des Beobachtungsortes ist, während die Fallschwere g, da der fallende Stein mit der Erde nicht zusammenhängt, die reine Erdanziehung darstellt, die sich beim Fall allerdings mit einer von der Rotation herrührenden Anfangsgeschwindigkeit combinirt. Alle genauen Beobachtungen über die Schwere sind Pendelbeobachtungen und geben einzig den Werth und die Veränderungen von G; die wenigen Bestimmungen von g stammen dagegen aus einer ältern Zeit, und genügen meist den Anforderungen der heutigen Wissenschaft nicht. G allerdings ist die Kraft, welche für uns Erdbewohner die Hauptrolle spielt. Ihre Richtung bestimmt für jeden Ort die nach dem Zenith gehende Verticale und senkrecht dazu die Horizontale des Wasserspiegels; nach ihr also werden unsere sämmtlichen astronomischen und geodätischen Instrumente eingestellt, ihren Winkel mit der Aequatorebene heissen wir die geographische Breite, ihre Veränderungen, an der Erdoberfläche gemessen, führen auf die Gestalt und Grösse des Erdkörpers u. s. f. Allein in einer andern Reihe von Erscheinungen, bei der Fall- und Wurfbewegung, bei den cosmischen Wirkungen der Erde auf den Mond, die Planeten und die Sonne ist es nicht mehr G, sondern der von der Rotation unabhängige Werth von g, welcher zur Geltung gelangt und der also, was meist unbeachtet geblieben, in die Rechnungen eingeführt werden muss. Es wäre wohl eine der neuern Wissenschaft würdige Aufgabe, mit den vollkommenen Hülfsmitteln des heutigen Tages selbstständige und direkte Bestimmungen von g auszuführen, statt dass alle bisherigen Bestimmungen indirekte sind, das heisst von andern mit Unsicherheiten behafteten Grössen, namentlich von der Gestalt und Masse der Erde, abhängen. — Wir begnügen uns hier, den Standpunkt genau festzustellen, auf den unsere Kenntnisse von G und g gegenwärtig gelangt sind.

2. Richtung der Pendelschwere.

Unsere Kenntnisse über die Veränderungen von G an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche beziehen sich theils auf die Richtung, theils auf die Stärke der Kraft und beruhen auf zwei Reihen verschiedenartiger Beobachtungen.

Wie schon angedeutet fallen die Untersuchungen über die Richtung der Schwere an verschiedenen Orten mit denen über die Gestalt und Grösse des Erdkörpers zusammen, denn in jedem Punkte muss die Wasserfläche des letztern zu der Schwere G senkrecht stehen, daher die eine ihre Lage so ändert, wie die Richtung der andern es vorschreibt. Von der Kugelgestalt abgehend, bietet das elliptische Rotationssphäroid die erste Annäherung an die Wahrheit und wird einstweilen allen einfachen Rechnungen zu Grunde gelegt. Doch beweisen die bedeutenden Abweichungen, welche die Combination der verschiedenen Gradmessungen zur Bestimmung mung der Abplattung ergeben, dass, selbst abgesehen von beschränkten Localeinflüssen, die wirkliche Gestalt nicht unerheblich von jener theoretisch einfachen Form abweicht. Daraus erklären sich unter andern die neuern Versuche von Schubert[1]) und Ritter[2]), durch Annahme anderer, der Rechnung jedoch zugänglicher Formen zu einer zweiten Annäherung zu gelangen. Der erste dieser Gelehrten hielt sich, statt an ein Rotationssphäroid, an ein dreiaxiges Ellipsoid und bestimmte in der That den passendsten Werth der drei Axen, wobei die Abweichungen aus den verschiedenen Gradmessungen bedeutend kleiner ausfielen, als bei der frühern Annahme, Ritter dagegen blieb bei einer Rotationsgestalt, als der aus physikalischen Gründen wahrscheinlichsten, wählte dagegen statt einer Ellipse diejenige Curve, auf welche Legendre[3]) durch theoretische Untersuchungen über die Gestalt einer drehenden Flüssigkeitsmasse gekommen war, — eine Form, die keineswegs als die einzige Gleichgewichtsform zu betrachten ist, wohl aber die als einzige, die unmittelbar aus einer allerseits symmetrischen Kugel sich entwickeln kann. Während hiernach der eine den Grund der Abweichungen in einer verschiedenen Gestalt der verschiedenen Meridiane, alle elliptisch angenommen, sucht, findet sie der andere, mit nicht geringerem Erfolge, in der nicht elliptischen Gestalt der sämmtlich gleichen Meridiane.

Bis neue Daten hinzugekommen, welche ohne Zweifel von der in Ausführung stehenden grossen

---

[1]) Mém. de l'Acad. de St-Petersbourg, 1859, VII^e série, I. p. 32.

[2]) Mém. de la Soc. phys. de Genève. 1^e Mém. 1860, XV, p. 462. — 2^e Mém. 1861, XVI, p. 194.

[3]) Mém. de l'Acad. des sciences de Paris, 1789, p. 395—420.

europäischen Gradmessung zu erwarten sind, ist die heutige Wissenschaft nicht im Stande, über jene beiden Hypothesen und andere möglichen endgültig zu entscheiden und es bleibt einstweilen nichts übrig, als sich an dasjenige Rotationsellipsoid zu halten welches nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit den sämmtlichen Gradmessungen am nächsten kommt. Wir begnügen uns, hier einige der Bestimmungen anzuführen, denen von der einen oder andern Seite am meisten Vertrauen geschenkt wird. Die seit den ersten französischen Gradmessungen stets in Toisen ausgedrückten Grössen sind nach dem Verhältnisse 1 Toise = 1,949036591 Meter in das in der Physik jetzt gültige Metermaass umgewandelt worden. A ist die Rotationsaxe, B der Aequatorradius.[1])

1829	C. E. Schmidt[2])	A = 6355652,99 M.	B = 6376931,01 M.
1841	Bessel[3])	6356079,09	6377398,07
1853	Pouillet[4])	6356324	6376984
1861	Ritter[5])	6356701,34	6378590,85
1869	Matthieu[6])	6356558	6378233.

Die Mittelzahl der Bestimmungen von Bessel, welche in Deutschland als die zuverlässigsten ange-

[1]) Die Jahreszahl bezieht sich nicht auf das erste Erscheinen der bezüglichen Daten, sondern auf die Zeit, da der Verfasser zuletzt noch daran festhielt.

[2]) Lehrbuch der math. und phys. Geographie, 1829, 1, p. 202
A = 3260920,3, B = 3271837,5 To.

[3]) Astron. Nachr. 1837, Nr. 333, p. 344. — 1841, Nr. 438, p. 216
A = 3261139,33, B = 3272077,14 To.

[4]) Traité de Phys., 6[e] éd., p. 82.

[5]) A. a. O., p. 194
A = 3261459,21, B = 3272689,12 To.

[6]) Ann. du bureau des Longit., 1869, p. 72.

sehen werden, ist 6366738,97, doch ist es angemessener, wenn es sich um Erscheinungen handelt, in welche die Erde als Ganzes eintritt, denjenigen Radius als **mittlern** zu betrachten, der einer Kugel von **gleichem Volumen** wie das Sphäroid zugehört. Dieser mittlere Radius wäre sodann:

$$R = (A B^2)^{1/3} = 6370258{,}47 \text{ Met.}$$

Bezeichnet man mit φ den Winkel der Normale eines Ortes a mit der Rotationsaxe A, d. h. die Zenithdistanz des Poles oder die Ergänzung der geographischen Breite, und mit φ' den entsprechenden Winkel des nach a gezogenen Radius r, so sind

$$r \cos \varphi', \qquad r \sin \varphi'$$

die Coordinaten von a parallel A und dem entsprechenden Radius B. Die Gleichung der Sphäroidalellipse wird sein

$$\frac{r^2 \cos^2 \varphi'}{A^2} + \frac{r^2 \sin^2 \varphi'}{B^2} = 1. \tag{1}$$

Daraus folgt, wenn die geographische Breite, somit φ, gegeben ist und man zur Abkürzung

$$k = \frac{B^2}{A^2} = 1{,}0067192$$

schreibt, der geocentrische Winkel

$$\operatorname{tg} \varphi' = k \operatorname{tg} \varphi = 1{,}0067192 \,.\, \operatorname{tg} \varphi \tag{2}$$

und der Radius

$$r = A \frac{\sqrt{(\cos^2 \varphi + k^2 \sin^2 \varphi)}}{\sqrt{(\cos^2 \varphi + k \sin^2 \varphi)}}$$

$$= 6356079{,}88 \,.\, \frac{\sqrt{(\cos^2 \varphi + 1{,}0134836 \sin^2 \varphi)}}{\sqrt{(\cos^2 \varphi + 1{,}0067192 \sin^2 \varphi)}}. \tag{3}$$

Der Radius des von a beschriebenen Kreises wird sein

$$r' = r \sin \varphi' = A \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{(\cos^2 \varphi + k \sin^2 \varphi)}}$$

$$= 6356079{,}88 \cdot \frac{1{,}0067192 \sin \varphi}{\sqrt{(\cos^2 \varphi + 1{,}0067192 \sin^2 \varphi}} . \quad (4)$$

Für $\varphi = 45°$ z. B. werden die drei Grössen

$$\operatorname{tg} \varphi' = 1{,}0067192, \quad \varphi = 45° \; 11' \; 30'',6$$

$$r = 6367046{,}3 \text{ M.}$$

$$r' = 4517044{,}7 \text{ M.}$$

3. Stärke der Pendelschwere.

Die direkte Bestimmung der Stärke von G oder der Beschleunigung der Schwere beruht ausschliesslich auf Pendelbeobachtungen, nämlich auf Bestimmung der Länge des Sekundenpendels an verschiedenen Orten, deren geographische Breite bekannt ist, unter Zurückführung auf unendlich kleine Schwinggungen, auf das Niveau des Meeres und auf das Vacuum. Man hat dann, wenn L die Länge des Sekundenpendels bezeichnet,

$$G = \pi^2 . L.$$

Die Anderungen von L und G, wie die Beobachtung sie liefert, zeigen wiederum Abweichungen, welche theils auf Lokalanziehungen hindeuten, theils von allgemeinern Ungleichheiten in der Massenvertheilung des Erdinnern herrühren müssen. Als erste Annäherung hält man sich auch hier an ein von der Theorie angegebenes einfaches Gesetz von etwa gleicher Ordnung der Genauigkeit, wie die Annahme der elliptisch-sphäroidalen Gestalt der Erde, nämlich an das Gesetz

$$G = G_{90} + a \cos^2 \varphi ,$$

welchem man auch die Gestalt

$$G = G_{90}(1 + \alpha \cos^2 \varphi) \text{ oder } G = G_{45}(1 + \beta \cos 2\varphi)$$

gegeben hat, wo G_{90} und G_{45} die Werthe am Aequator, für $\varphi = 90^\circ$, und bei $\varphi = 45$ bezeichnen, a, α, β aber Zahlcoëfficienten sind. Diese Grössen bestimmen sich aus den Bedingungen

$$\alpha = \frac{a}{G_{90}}; \quad G_{45} = G_{90} + \frac{a}{2} = G_{90}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$\beta = \frac{a}{2 G_{90} + a} = \frac{\alpha}{2 + \alpha}. \qquad (6)$$

In wie weit die Physiker über die genauen Werthe der beiden Constanten G_{45} und β, in dem dritten der obigen Ausdrücke, einig gehen, ersieht man aus der folgenden Zusammenstellung der wichtigsten selbstständig durchgeführten Rechnungsresultate, alle auf Meter reduzirt:

1816	Biot[1])	$G_{45} = 9{,}8088$	$\beta = 0{,}002837$
1825	Sabine[2])	9,805940	0,00258783

---

[1]) Traité de Phys. 1861, I, p. 390 u. 490. — Der Werth von β weicht von allen spätern Bestimmungen so sehr ab, dass man an einen Schreibfehler in dem ursprünglichen Rechnungsmanuscripte (0,002837 statt 0,0025871) glauben möchte. Später gelangte Biot selbst auf einen andern Werth. Dennoch beharrten mehrere französische Physiker, wie Régnault (Mém. de l'Acad. 1847, XXI, p. 150) und Jamin (Traité de Phys., 2e éd., 1858, I, p. 96) auf der ersten Bestimmung.

[2]) An account of experiments to determine the figure of the earth. — Sabine findet in engl. Zoll

$$L = 39{,}01520 + 0{,}20245 \cos^2\varphi,$$

was für 1 engl. Zoll = 0,02539954 Met. die übrigen Werthe liefert. Bessel (Untersuchungen über die Länge des einf. Sekunden-

1829	C. Schmidt[1])	$G_{45} = 9{,}805902$	$\beta = 0{,}00259350$
1833	Poisson[2])	9,80557	0,002588
1836	Muncke[3])	9,805792	0,00260434
1844	Biot[4])	9,806227	0,00254735
1853	Pouillet[5])	9,806057	0,00255237

Lässt man die Zahlen von Biot ausser Betracht, weil sie Mittel- und nicht wahrscheinliche Werthe sind, so weichen die Bestimmungen von G nur um 3 Einheiten von der 4. Dezimale, die von β um 5 der 5. Dezimale ab. Der Grund dieser auffallenden Uebereinstimmung liegt übrigens darin, dass bei den verschiedenen Berechnungen grossentheils die nämlichen Beobachtungen in Berücksichtigung kamen, denen nur wenige neue beigefügt wurden.

---

pendels, 1826, p. 62) schreibt Sabine's Formel in par. Linien

$$L = 439{,}2975 + 2{,}28174 \cos^2\varphi,$$

was für 1 par. Lin. = 0,00225583 Met. die fast gleichen Werthe gibt $G_{45} = 9{,}80598, \qquad \beta = 0{,}0025903.$

[1]) Lehrb. d. math. und phys. Geographie, 1829, I, p. 381. In engl. Zoll $L = 39{,}015233 + 0{,}202898 \cos^2\varphi$.

[2]) Traité de Mécan., 2e éd., 1833, I, p. 367.

[3]) Gehler's physik. Wörterbuch, Ed. 2, 1836, VIII, p. 613. In Millim. $L = 993{,}534239\,(1 + 0{,}00260434 \cos^2\varphi)$.

[4]) Astronomie phys., éd. 2, 1844, II, p. 487. — Biot ermittelt direkt die Werthe

$$L_{90} = 991{,}02705; \quad L_{45} = 993{,}520351; \quad L_{0} = 996{,}188963,$$

welche mit dem einfachen Gesetze nicht stimmen. Die obigen Zahlen sind die Mittelwerthe

$$G_{45} = \frac{\pi^2}{3}\,(L_{90} + L_{45} + L_{0}) \text{ und } \beta = \frac{\pi^2}{4}\,(L_{0} - L_{90}).$$

[5]) Traité de Phys., 1853, éd. 6, I, p. 86. In Metern

$$L = 0{,}99102557 + 0{,}00507188 \cos^2\varphi.$$

Was die Form des obigen Gesetzes der Schwerenänderung mit der geogr. Breite betrifft, so drückt sie die erste Annäherung aus, auf welche man durch Annahme eines elliptischen Rotationssphäroides, dessen Theilchen sich dem Newton'schen Gravitationsgesetze gemäss anziehen und in ihrer Dichte sich hydrostatisch nach ähnlichen Niveauflächen ordnen, geführt wird. Dem bekannten Clairant'schen Satze[1]) zufolge lässt sich der Coëfficient α theoretisch berechnen 1) aus dem Verhältniss γ der Fliehkraft F_{90} zur Schwere G_{90} unter dem Aequator und 2) aus der Abplattung ε. Man hat nämlich

$$\alpha = \frac{5}{2}\gamma - \varepsilon,$$

die Fliehkraft F_{90} aber ist

$$F_{90} = \frac{4\pi^2 B}{T^2}, \text{ so dass } \alpha = \frac{4\pi^2 B}{T^2 G_{90}} = \frac{4B}{T^2 L_{90}}, \qquad (7)$$

wenn $T = 86164{,}09$ die Länge des Sterntages in Sekunden mittlere Zeit bezeichnet.

Wendet man diese Formeln auf das System von Werthen, welche Schmidt[2]) und Pouillet für das Erdsphäroid und für die Schwere annehmen, so erhält man

C. Schmidt	$\alpha = 0{,}003466990$,	$\varepsilon = 0{,}003336718$,	$\beta = 0{,}002658320$,
Pouillet	$0{,}003466872$,	$0{,}003239776$,	$0{,}002706856$,

zwei Werthe, welche den experimentell ermittelten Coëfficienten bedeutend übersteigen. Es ist diess ein anderer Ausdruck der länger bekannten Thatsache,

[1]) Théorie de la figure de la terre. Paris 1743.

[2]) C. Schmidt, a. a. O. und p. 197 und 381.

dass die Abplattung der Erde, aus den Pendelbeobachtungen berechnet, bedeutend grösser ausfällt, als aus den Gradmessungen bestimmt. C. Schmidt[1]) z. B. findet die erste gleich $\frac{1}{288,20}$, die zweite gleich $\frac{1}{299,15}$. Die Abweichung beweist jedenfalls, dass jene beiden Voraussetzungen der elliptisch-sphäroidalen Gestalt und der Dichtenvertheilung nach ähnlichen Niveauschichten nicht ganz naturgemäss sein können.

4. Bestimmung der Fallschwere.

Die Pendelschwere G bekannt angenommen, berechnet sich die Fallschwere g wie folgt. In einem Punkte a (Fig. 1) der Erdoberfläche sei ab die bekannte Richtung der Pendelschwere oder der Verticalen; ac die Richtung der Fallschwere g, welche zwischen G und dem Radius a C $= r$ hineinfällt und mit der Drehaxe A den Winkel ψ bildet. G ist die Resultirende aus der Anziehung g und der Fliehkraft f; daher hat man die beiden Gleichungen

$$g \cos \psi = G \cos \varphi \qquad (8)$$
$$g \sin \psi = G \sin \varphi + f,$$

woraus sich bestimmt

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{G \sin \varphi + f}{G \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi + \frac{f}{G \cos \varphi} \qquad (9)$$

und für die Stärke der Kraft

$$g = (G^2 + 2fG \sin \varphi + f^2)^{1/2}$$
$$= G\left(1 + \frac{f}{G} \sin \varphi + \frac{1}{2} \frac{f^2}{G^2} \cos {}^2\varphi + \ldots\right) \qquad (10)$$

Will man den Winkel $\psi - \varphi = \alpha$ zwischen den beiden Richtungen g und G in Betracht ziehen, so

[1]) C. Schmidt a. a. O., p. 197 und 381.

geben vorerst die beiden Gleichungen durch successive Multiplikation mit sin φ und cos φ und Addition die Werthe von g sin α und g cos α, woraus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f \cos \varphi}{G + f \sin \varphi}, \tag{11}$$

dann ferner

$$g = G \cos \alpha + f \sin (\varphi + \alpha). \tag{12}$$

In diesen Gleichungen haben f und G die mit φ veränderlichen Werthe

$$f = \frac{4\pi^2 r'}{T^2} = \frac{4\pi^2 A}{T^2} \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{(\cos^2\varphi + k \sin^2\varphi)}} \tag{13}$$

und

$$G = G_{45} (1 + \beta \cos 2\varphi).$$

Am Pole, wo $\varphi = o$, $f = o$, erhält man, wie es sein soll

$$\psi = o, \; g = G_0.$$

Am Aequator, wo $\varphi = 90$, $f = F_{90}$, $G = G_{90}$,

$$\psi = 90, \; g = G_{90} - F_{90}.$$

Denkt man sich statt des Sphäroides eine Kugel, so dass $A = B = R$, $k = 1$, so erhält man

$$f = F_{90} \sin \varphi,$$

so dass

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{90} \sin \varphi \cos \varphi}{G + F_{90} \sin^2\varphi}. \tag{14}$$

Die Richtungsabweichung erreicht angenähert ihr Maximum für $\varphi = 45°$, also im mittlern Europa. Berechnet man für diesen Werth, Richtung und Stärke der Fallschwere, so erhält man nach den Bestimmungen von C. Schmidt

$$G = G_{45} = 6{,}805902 \text{ M},$$

$$f_{45} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{k\,A}{\sqrt{(1+k)}} = 0{,}02401936 \text{ M.}$$

Daraus dann

$$\operatorname{tg} \psi = 1 + \sqrt{2}\,\frac{f_{45}}{G_{45}} = 1{,}00346408$$

oder $\psi = 45^\circ\, 5'\, 56'',6.$

Ferner

$$g_{45} = \frac{G_{45} \cos\varphi}{\cos\psi} = 9{,}8239245 \text{ M.}$$

Aus diesen Werthen ergeben sich die Abweichungen

$$\alpha = \psi - \varphi = 0^\circ\, 5'\, 56'',6$$
$$g_{45} - G_{45} = 0{,}018022 \text{ M.}$$

Die Fallschwere weicht nun nahe $6'$ von der Pendelschwere nach Norden ab, und ihre Beschleunigung übertrifft diejenige der letztern nahe um 18 Mm. — Unterschiede, welche keineswegs als unerheblich betrachtet werden können.

Erhebt man sich auf der Vertikalen ab um eine Grösse h über der Wasserfläche, so ändern sowohl f als G und damit auch ψ und g.

Da $r' = r \sin\varphi'$ zu $r' + h \sin\varphi$ wird, so wird f zu

$$f_1 = \frac{4\pi^2}{T^2}(r \sin\varphi' + h \sin\varphi).$$

Die Zunahme ist

$$\delta f = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot h \sin\varphi. \tag{15}$$

g wird zu g_1 oder wenn man den mittlern Radius R in erster Annäherung als Entfernung des Mittelpunktes der Anziehung (auf der Richtung von g) annimmt,

$$g_1 = g \frac{R^2}{(R + \frac{h}{\cos \alpha})^2} = g \left(1 - \frac{2h}{R \cos \alpha}\right),$$

so dass

$$\delta g = - \frac{2gh}{R \cos \alpha}. \tag{16}$$

Die aus (8) sich ergebende Beziehung

$$\sin (\psi - \varphi) = \frac{f \cos \varphi}{g}$$

führt auf

$$\delta \psi = \frac{\cos \varphi}{g \cos \alpha} (\delta f - \frac{f}{g} \delta g) \tag{17}$$

oder eingeführt auf

$$\delta \psi = \frac{h \cos \varphi}{g \cos \alpha} \left(\frac{4 \pi^2 \sin \varphi}{T^2} + \frac{2f}{R \cos \alpha}\right). \tag{18}$$

Da der Ausdruck in seinen beiden Gliedern positiv ist, so weicht durch Erhebung von der Erde die Fallschwere mehr und mehr nach Norden von den Vertikalen ab. Im Grunde ist es die Vertikale, die ihre Richtung entgegengesetzt verändert, indem die Resultirende aus der vergrösserten Fliehkraft und verminderten Fallschwere, sich von letzteren entfernt, mit andern Worten einem mehr abgeplatteten Wassersphäroid zugehört.

Für die Breite $\varphi = 45^\circ$ hat man zu setzen $g = 9{,}8239245$ M, $f = 0{,}02401936$ M, $\alpha = 5' \, 56'',6$, woraus, wenn $R = 6370258{,}47$ M. angenommen wird, auf eine Höhe $h = 100$ M., die beiden Glieder zu 0,0000000429 und 0,0000000544 sich berechnen, so dass $\delta \psi = 0{,}0000000973$ oder $0'',02$ eine der Beobachtung entgehende Grösse.

Was die Aenderung der Pendelschwere betrifft, kann G aus (10) genähert geschrieben werden:

$$G = g - f \sin \varphi - \frac{1}{2} \frac{f^2}{g} \cos^2 \varphi,$$

folglich

$$\delta G = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{f^2}{g^2}\cos^2\varphi\right)\delta g - \left(\sin\varphi + \frac{f}{g}\cos^2\varphi\right)\delta f,$$

oder nach Einsetzen der Werthe von δg, δf

$$\delta G = -\frac{2\,g\,h}{R\cos\alpha}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{f^2}{g^2}\cos^2\varphi\right) - \frac{4\,\pi^2\,h\sin\varphi}{T^2}\left(\sin\varphi + \frac{f}{g}\cos^2\varphi\right). \quad (19)$$

Beide Glieder vermindern die Pendelschwere G der Höhe proportional und geben für $\varphi = 45°$ und $h = 100$ M. 0,00030836 und 0,00000027, zusammen

$$\delta G = -0{,}00030863 \text{ Mm.}$$

Auf 100 M. ändert sich die aus den Pendelschwingungen bestimmte Kraft um 0,3 Mm.

5. Der Fall bei variabler Schwere.

Da der Fall unter dem Einfluss der Kraft g, d. h. der einfachen Erdanziehung, vor sich geht, während das Loth die Richtung G am Fusspunkte der Vertikalen angibt, so weicht der Fall von den Vertikalen ab und trifft den Boden nicht an diesem Fusspunkte.

Der von a′ (Fig. 2) aus der Höhe h fallende Körper hat eine Bewegung, zusammengesetzt aus der Anfangsgeschwindigkeit des obern Punktes a′, gerichtet nach den Tangenten a′ c' und aus der beschleunigten Bewegung, welche g hervorbringt und die der Richtung g folgt. Während das Loth oder die Vertikale in a, auf welcher a′ liegt, einen Conus um die Axe A beschreibt, der zur Linie G gehört, bewegt sich der fallende Körper in einer Ebene, welche in a′ den zu g gehörenden, etwas stumpfern Conus tangirt. Es folgt daraus, dass Abweichungen sowohl im Sinne der Rotation, d. h. der Breitenkreise, als im Sinne des Meridians entstehen können, wobei sich einzig fragt, ob diese Abweichungen gross genug sind, um wahrgenommen zu werden.

Bei dieser Untersuchung muss man sich bescheiden, um allzu verwickelte Ausdrücke zu vermeiden, die Erde als Kugel zu betrachten, wobei wir als Radius R den früher bestimmten Radius einer Kugel von gleichem Volumen annehmen. g ist dann gegen den Mittelpunkt C und normal zur Oberfläche gerichtet, mit der Axe AC den Winkel $\psi = \varphi'$ bildend; G dagegen steht nicht mehr senkrecht zur Oberfläche, sondern weicht von der Normalen nach Süden ab. Die Fallebene wird hiernach zur Ebene eines grössten Kreises, die durch a′C senkrecht zur Meridianebene Aa″C gelegt wird. Der fallende Körper wird die Erde in einem Punkte b″ erreichen. Die erste Frage wird sein, inwiefern die Lage dieses Punktes b″ durch die Veränderlichkeit der Schwere g, nach Stärke und Richtung während des Falles, verändert wird, wobei wir den besondern Fall wo $\psi = 45°$ und $h = 100$ M. in der Berechnung durchführen wollen.

Der Körper, anfangs in der Höhe h oder in der Centralentfernung $R + h$, beginnt seine Bewegung mit der Rotationsgeschwindigkeit U des Punktes a′ oder mit

$$U = \frac{2\pi (R + h) \sin\psi}{T} \qquad (20)$$

Während des Falles ändert sich die Schwere g hinsichtlich der Richtung und Stärke; will man beide Aenderungen in Betracht ziehen, so heisst das so viel als die Bewegung bestimmen, welche ein freier Körper unter Einfluss der Newton'schen Centralkraft annimmt und den Ort suchen, wo dieselbe die Erdoberfläche schneidet.

Der Körper (Fig. 3), anfänglich in der Entfernung a C $= R + h$, erhalte die Tangentialgeschwindigkeit U. Nach einer Zeit z befinde er sich in b, in der Centralentfernung b c $= R + g$, um den Winkel φ geändert. Der Abkürzung willen schreibe man für $R + h$ und $R + y$ einfach h und y. Die ersten Integrale der beiden Bewegungsgleichungen sind, nach Poisson [1]), wenn die Anziehung durch $g\,\frac{R^2}{y^2}$ ausgedrückt wird, wo g die Schwere an der Erde bezeichnet

$$y^2\,\frac{d\varphi}{dz} = c,$$

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + y^2\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = b + 2g\,\frac{R^2}{y}.$$

Die Constanten c, b bestimmen sich aus der Bedingung $z = o$, $y = h$, $\varphi = o$, $\frac{dy}{dz} = o$, $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{U}{h}$ und haben die Werthe

$$c = Uh,\ b = U^2 - 2g\,\frac{R^2}{h},$$

so dass die beiden Gleichungen sein werden

$$y^2\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = hU,$$

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + y^2\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = U^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{h}\right) \quad (20)$$

Man eliminire nun zuerst z, um die Curvengleichung zwischen y und φ zu erhalten, deren Durchschnittspunkt d mit der Erde die Fallweite cd liefert.

[1]) Poisson Méc. 2. Ed. I, p. 446 et 453.

Aus der ersten Gleichung folgt

$$dz^2 = \frac{y^4}{h^2 U^2} \cdot d\varphi^2,$$

was die zweite umwandelt in

$$dy^2 = \left\{ \left[U^2 + 2gR^2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{h} \right) \right] \frac{y^4}{U^2 h^2} - y^2 \right\} d\varphi^2$$

oder nach Division mit y^4 und Multiplikation mit $U^2 h^2$ in

$$d\varphi^2 = \frac{U^2 h^2 \left(\frac{dy}{y^2}\right)^2}{U^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{h}\right) - U^2 h^2 \cdot \frac{1}{y^2}}.$$

Schreibt man $\varrho = \frac{1}{y}$, $d\varrho = -\frac{dy}{y^2}$, so wird sie

$$d\varphi = -\frac{U h \, d\varrho}{\sqrt{\left(U^2 - 2g\frac{R^2}{h} + 2gR^2\varrho - U^2 h^2 \varrho^2\right)}} \tag{21}$$

ein Ausdruck, der die Form hat

$$d\varphi = -\frac{\sqrt{a} \cdot d\varrho}{\sqrt{(-c + b\varrho - a\varrho^2)}},$$

wenn man die positiven Grössen

$$a = U^2 h^2, \quad b = 2gR^2, \quad c = 2g\frac{R^2}{h} - U^2$$

einführt.

Diese Gleichung integrirt sich durch $\varrho = s + \frac{b}{2a}$, denn $d\varrho = ds$, $b\varrho - a\varrho^2 = -as^2 + \frac{b^2}{4a}$, und wird

$$d\varphi = -\frac{\sqrt{a} \cdot ds}{\sqrt{\left(-c + \frac{b^2}{4a} - as^2\right)}},$$

welche gibt

$$\varphi = \omega - arc\left(\sin = \frac{2as}{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}\right), \tag{22}$$

Beachtet man nun, dass

$$b^2 - 4\,a\,c = 2\,g\,(R^2 - \frac{U^2}{g}\,.\,h)^2,$$

führt wieder $s = \varrho - \frac{b}{2\,a}$ ein und dann $U^2 = 2\,g\,H$, wo H die zu U, bei constantem g, gehörende Fallhöhe ist, so wird

$$\varphi = \omega - \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{2\,H\,h\frac{h}{y} - R^2}{R^2 - 2\,H\,h}\right) \tag{23}$$

ω bezeichnet die Constante der Integration. Da für $z = o$, sein muss $y = h$, $\varphi = o$, so ist $\omega = -\frac{\pi}{2}$. Für $y = R$ aber, entsprechend der Fallweite

$$X = R\,.\,\varphi$$

wird dagegen

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{R^2 - 2\,H\,h\frac{h}{R}}{R^2 - 2\,H\,h}\right).$$

Schreibt man wieder für h den wahren Werth $R + h$, so erkennt man, dass der Sinusausdruck

$$\frac{R^3 - 2\,H\,(R + h)\,(R + h)}{R^3 - 2\,H\,(R + h)\,R}$$

die Form $1 - \gamma$ erhält, wo

$$\gamma = \frac{2\,H\,h\,(R + h)}{R^3 - 2\,H\,R^2 - 2\,H\,h\,R}$$

eine sehr kleine Grösse ist, so lange H und h, wie es hier der Fall ist, neben R sehr klein bleiben. Der Winkel zur obigen Sinusgrösse wird sodann

$$\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc}\,(\sin = \sqrt{2\gamma}$$

so dass mit hinlänglicher Annäherung

$$\varphi = \sqrt{2\gamma}$$

oder nach Einführung von H im ersten Gliede

$$x = R\,\varphi = U\sqrt{\frac{2\,h}{g}}\,.\,\sqrt{\frac{1 + \frac{h}{R}}{1 - 2\,\frac{H}{R} - 2\,\frac{H\,h}{R^2}}} \tag{24}$$

Entwickelt man und vernachlässigt H^3, H^2h gegen R^3 und h^2 gegen R^2, so hat man

$$X' = U\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

als erste Annäherung, entsprechend einem unveränderlichen Werthe der Schwere. Dann folgt

$$X - X' = X'\left(\frac{H}{R} + \frac{1}{2}\frac{h}{R} + \frac{3}{2}\frac{H^2}{R^2} + \frac{3}{2}\frac{Hh}{R^2}\right) \quad (25)$$

als Correction für die Veränderlichkeit der Schwere. Für unsern speziellen Fall, $\psi = 45°$, $h = 100$ M., die Schwere $g = 9{,}8239245$ gesetzt, findet man

$$U = 328{,}4507 \text{ M.}, \qquad H = 5491{,}4838 \text{ M.},$$

daraus dann $X' = 1482{,}09104$ M.

$$X - X' = 1{,}29095$$

folglich $X = 1483{,}38199$.

Nun bestimme man zweitens die Dauer des Falles T, indem man aus den beiden ersten Integralen φ statt z eliminirt. Aus der ersten folgt

$$y\frac{d\varphi}{dz} = \frac{h}{y}U,$$

was die zweite umändert in

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = -U^2\left(\frac{h^2}{y^2} - 1\right) + 2gR^2\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{h}\right)$$

oder nach Multiplikation mit y^2, unter Einführung der frühern Hülfsgrössen a, b, c

$$a = U^2h^2, \quad b = 2gR^2, \quad c = 2g\frac{R^2}{h} - U^2$$

$$dz = -\frac{y\,dy}{\sqrt{(-a + by - cy^2)}}.$$

Zur Integration setze man $y = h - x$, die rechtseitige Grösse wird

$$\frac{(h-x)\,dx}{\sqrt{c}\cdot\sqrt{x\left(2h - \frac{b}{c} - x\right)}},$$

da im Nenner die Grösse

$$-a + b\,h - c\,h^2 = o$$

wegfällt. Man setze ferner

$$x\left(2\,h - \frac{b}{c} - x\right) = s^2,$$

also $$(h - x)\,d\,x = \frac{b}{2\,c}\,d\,x + s\,d\,s,$$

so hat man zu integriren

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\left[d\,s + \frac{b}{2\,c}\,\frac{d\,x}{\sqrt{x\left(2\,h - \frac{b}{c} - x\right)}}\right] = d\,z,$$

welche nach Wiedereinführung des Werthes von s gibt

$$z = \frac{1}{\sqrt{c}}\left[\sqrt{x\left(2h - \frac{b}{c} + 2\right)} + \frac{b}{c}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \sqrt{\frac{x}{2h - \frac{b}{c} - x}}\right)\right] + \mathrm{Const.}$$

da für $z = o$, $y = 0$, $x = o$, so ist die Constante $= o$.

Die ganze Fallzeit entspricht $x = h - R$, sie sei Z, so hat man

$$Z = \frac{1}{\sqrt{c}}\left[\sqrt{(h - R)\left(R + h - \frac{b}{c}\right)} + \frac{b}{c}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \sqrt{\frac{h - R}{R + h - \frac{b}{c}}}\right)\right] \quad (26)$$

Da $h - R$ gegen $h + R$ sehr klein ist, so kann man schreiben $\quad \mathrm{arc} = \mathrm{tg} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}^3$,

wodurch

$$Z = \sqrt{\frac{h - R}{(R + h)\,c - b}} \cdot \left[R + \mathrm{h} - \frac{1}{3}\,\frac{b\,(h - R)}{(R + h)\,c - b}\right].$$

Führt man endlich für h wieder $R + h$ und für b und c die Werthe, so wird

$$\frac{h - R}{(R + h)\,c - b} \text{ zu } \frac{h\,(R + h)}{2\,g\,[R^3 - H\,(R + h)\,(2\,R + h)]}$$

oder wenn man bei den frühern Annäherungen stehen bleibt

$$\frac{h}{2\,g\,R^2}\left(1 + 2\,\frac{H}{R} + \frac{h}{R} + 4\,\frac{H^2}{R^2} + 5\,\frac{H\,h}{R^2}\right)$$

Das erste Glied im Ausdruck wird dadurch

$$\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1+\frac{H}{R}+\frac{h}{R}+\frac{3}{2}\frac{H^2}{R^2}+\frac{5}{2}\frac{Hh}{R}\right)$$

das zweite Glied

$$\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1}{6}\frac{h}{R}+\frac{1}{2}\frac{Hh}{R^2}\right)$$

so dass schliesslich

$$Z=\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\left(1+\frac{H}{R}+\frac{5}{6}\frac{h}{R}+\frac{3}{2}\frac{H^2}{R^2}+2\frac{Hh}{R^2}\right)$$

Hier ist wieder

$$Z'=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

die Fallzeit ohne Aenderung der Schwere und

$$Z-Z'=Z'\left(\frac{H}{R}+\frac{5}{6}\frac{h}{R}+\frac{3}{2}\frac{H^2}{R^2}+2\frac{Hh}{R^2}\right) \quad (28)$$

die Korrektion, deren sie für diese Veränderung bedarf.

In unserm Beispiele erhält man

$$Z' = 4{,}5120352 \text{ Sekunden},$$
$$Z-Z' = 0{,}0039538,$$

also die wahre Fallzeit

$$Z = 4{,}5159890 \text{ Sekunden}.$$

6. Die Abweichungen des Falles vom Lothe.

Nun vergleiche man den Ort b'', wo der fallende Körper hingelangt, mit demjenigen b, wohin der Fusspunkt a des Lothes in derselben Fallzeit Z durch die Drehung geführt wird. Dadurch bestimmen sich die wirklich statthabenden Abweichungen, sei es im Sinne des Meridians, sei es in dem der Breitenkreise.

Das Dreieck a'' A b'' ist ein sphärisches Dreieck von Bogen grösster Kreise gebildet und rechtwinklicht in a'. Gegeben sind die Seite A a'', dem Winkel ψ entsprechend, und die Seite a''b'' $= X$, welchen ein Winkel x entspricht, dessen Bogen $\frac{X}{R}$ ist. Daraus folgt als Winkel ψ' des Meridianbogens Ab''

$$\cos \psi' = \cos \psi \cos \chi .$$

Da x ein ungemein kleiner Winkel ist, so hat man

$$\sin (\psi' - \psi) = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \psi \sin {}^2\chi .$$

Die auf dem Meridian gemessene Abweichung des Punktes b'' vom Parallelkreise des Punktes a'' wird sehr nahe sein

$$R(\psi' - \psi) = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \psi \cdot \frac{X^2}{R} ,$$

oder berechnet für $\psi = 45^\circ$, $h = 100$, $X = 1483{,}38199$

$$R(\psi' - \psi) = 0{,}1727105 .$$

Andererseits ist der Fusspunkt des Lothes oder a von a'' entfernt um

$$h \operatorname{tg} \alpha = \frac{h f \cos \psi}{g - f \sin \psi} ; \qquad (29)$$

f aber hat in a'' den Werth

$$f = \frac{4 \pi^2 R \sin \psi}{T^2} ,$$

oder im gegenwärtigen Fall $f = 0{,}02395241$ Met. und

$$h \operatorname{tg} \alpha = 0{,}1727025 .$$

Die Abweichung des Punktes b'' den der fallende Körper erreicht, im *Sinne des Meridians*, von demjenigen b, wohin der Fusspunkt des Pendels gelangt, beträgt hiernach auf 100 Met. bei 45° mehr nicht als 0,0000080 Met.,
oder die verschwindende Grösse von 0,008 Mm.

Um die Abweichung im *Sinne der Breitenkreise* zu bestimmen, bemerke man vorerst, dass

der Fusspunkt a des Pendels, dessen Radius der Drehung $R \sin \psi + h \operatorname{tg} \alpha \cos \psi$
in der Zeit des Falles Z einen Bogen beschreibt, der

$$\mathrm{ab} = Z \frac{2\pi (R \sin \psi + h \operatorname{tg} \alpha \cos \psi)}{T} \tag{30}$$

ist und für unsern besondern Fall gibt

$$\mathrm{ab} = 1483{,}36652 \text{ Met.}$$

Der fallende Körper erreicht dagegen den Boden in dem Meridian von ψ oder nach einem aus dem sphärischen Dreieck a″ A b″ zu bestimmenden Winkel A. Man hat aber, wegen des rechten Winkels in a″

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin \psi} = \frac{X}{R \sin \psi}.$$

Der entsprechende Bogen auf dem Parallelkreise des Punktes a wird daher sein,

$$\mathrm{ab}_{,} = (R \sin \psi + h \operatorname{tg} \alpha \cos \psi) \frac{X}{R \sin \psi}$$

oder $$\mathrm{ab}_{,} = X + h \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \psi \cdot \frac{X}{R}, \tag{31}$$

was in unserm besondern Fall gibt

$$\mathrm{ab}_{,} = 1483{,}38199 + 0{,}00004 = 1483{,}38203.$$

Die Abweichung des Falles nach Osten wird die Differenz sein

$$\mathrm{ab}_{,} - \mathrm{ab} = 0{,}01551 \text{ Met.},$$

also auf 100 Meter Höhe 15,51 Millimeter.

Bekanntlich hat diess Fallen nach Osten, das schon von Newton angekündigt und später durch Versuche mehrfach nachgewiesen worden, lange als einziger direkter Beweis für die Rotation der Erde gegolten, bis seit Foucault's Pendelversuch[1] (1850) eine ganze Zahl anderer auf die Inertie der Materie gegründeter neuer Beweise an's Licht trat.

[1]) Compte rendu 1850, XXXII, 135.

7. Der Luftwiderstand beim Fall.

Der Fall der Körper und daher die Fallweite werden wesentlich durch den Luftwiderstand modifizirt. Die Erfahrung lehrt, dass langsame Bewegungen von der Luft ein Hinderniss erleiden, das angenähert der ersten, schnellere hingegen ein solches, das der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist. Abgesehen von den ersten Momenten der Bewegung wird beim freien Falle das zweite Gesetz zur Anwendung kommen. Beim schiefen Wurf einer fortgeschleuderten Kugel wirkt der Widerstand sowol auf den horizontalen als den vertikalen Theil der Bewegung und vermindert die Wurfweite in Folge beider Einflüsse. Man darf aber nicht ausser Acht lassen, dass es sich an der drehenden Erde etwas anders verhält. Zwar stellt die Rotationsgeschwindigkeit des obern Punktes oder U die Anfangsgeschwindigkeit eines horizontalen Wurfes dar, allein, da die Luft selbst mit der gleichen Geschwindigkeit rotirt, so hat der Körper horizontal keine relative Bewegung, erleidet daher kein Hinderniss von Seite der Luft, oder höchstens ein solches zweiter Ordnung, herrührend von der Ungleichheit der Rotationsgeschwindigkeit der höhern und tiefern Luftschichten. Die einzige Wirkung des Luftwiderstandes besteht somit in einer Verlängerung der vertikalen Fallzeit, die sich dann unverändert auf die Fallweite überträgt und dieselbe vergrössert.

Was nun den vertikalen Fall betrifft, hat bekanntermassen die Luft einen doppelten Einfluss: 1) einen statischen, wodurch der wirksame Theil der Schwere von g, im Vacuo, auf

$$g' = g\left(1 - \frac{s}{S}\right) \tag{32}$$

vermindert wird, wo s, S die spezifischen Gewichte der Luft und des fallenden Körpers bezeichnen, und 2) einen dynamischen, welcher den eigentlichen Widerstand ausmacht.

Hinsichtlich der letztern können wir uns einfach an die bezügliche Untersuchung von Poisson[1]) halten. Die beschleunigende Kraft des Widerstandes wird durch

$$-\frac{g'}{k^2}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$$

ausgedrückt werden, so dass die Bewegungsgleichung sein wird

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -g'\left[1 - \frac{1}{k^2}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]. \tag{33}$$

Wenn die Bewegung durch das Wachsen der Geschwindigkeit zur Gleichförmigkeit gelangt, muss

$$1 - \frac{1}{k^2}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 0. \tag{34}$$

Der Coëfficient k bezeichnet also die maximale Endgeschwindigkeit, bei welcher zuletzt Schwere und Widerstand einander gleich werden.

Nach zweimaliger Integration mit Beachtung der Anfangsbedingungen gelangt man auf

$$y = h - \frac{k}{g'}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(e^{\frac{g'z}{k}} + e^{-\frac{g'z}{k}}\right)$$

oder für die ganze Fallzeit Z, entsprechend $y = o$ auf

$$h = \frac{k^2}{g'}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(e^{\frac{g'}{k}Z} + e^{-\frac{g'}{k}Z}\right). \tag{35}$$

---

[1]) Traité de Mécanique, 1833, 2^e éd., p. 242.

Umgekehrt folgt daraus

$$Z' = \frac{k}{g'} \lg \left[e^{\frac{g'h}{k^2}} + \sqrt{\left(e^{\frac{g'h}{k^2}} - 1\right)} \right]$$

für die der Höhe h zugehörende Fallzeit.

Wenn man die Endgeschwindigkeit k neben g' und h als gross betrachtet, so lässt sich der Ausdruck entwickeln und reduzirt sich schliesslich auf

$$Z' = \sqrt{\frac{2h}{g'}} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{g'h}{k^2} - \frac{1}{120} \frac{g'^2 h^2}{k^4}\right) \tag{36}$$

Die beiden letzten Glieder drücken die Zunahme der Fallzeit aus und dieses Z wird für $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ in den Ausdruck der Fallweite X einzuführen sein.

Ist der fallende Körper, wie es fast bei allen Versuchen der Fall war, eine Kugel vom Radius ϱ, so nimmt man gewöhnlich zur Bestimmung von k den Ausdruck an[1])

$$\frac{g'}{k^2} = \gamma \cdot \frac{s}{\varrho S} \tag{37}$$

wo γ einen mit der Kugelgestalt in Verbindung stehenden Coëfficienten, s, S aber die spez. Gewichte der Luft und Kugelsubstanz bezeichnen. Newton[2]) hatte dem Coëfficienten aus unzureichenden Gründen den Werth $^3/_8 = 0{,}3750$ beigelegt, während die Versuche von Borda und Lombard[3]), denen Poisson beistimmt, den geringern Werth $^9/_{40} = 0{,}2250$ ergaben.

Um von dem Einfluss des Luftwiderstandes nach diesen Voraussetzungen eine Vorstellung zu erhalten,

---

[1]) Poisson, Mécan., I, 229.

[2]) Newton, Princ. phil. nat., L. II., p. 40.

[3]) Gehler Phys., X., p. 734.

denke man sich in unserm Beispiele eine Eisenkugel vom Radius $\varrho = 0{,}04$ M., deren spezifisches Gewicht $S = 7{,}790$, während die Luft im Normalzustand, nämlich bei 0° und 760 M., das spezifische Gewicht $s = 0{,}00129277$ besitzt. Man erhält dadurch

$$g' = 9{,}8239245 - 0{,}0016303 = 9{,}8222942 \text{ Met.}$$

$$\frac{g'}{k^2} = 0{,}00000373395, \quad k = 512{,}88895 \text{ Met.}$$

Die einfache Fallzeit mit constanter Schwere, wenn g' in Rechnung gebracht wird, ist

$$Z'' = \sqrt{\frac{2\,h}{g'}} = 4{,}5124094 \text{ Sec.}$$

Aus der Veränderung der Schwere geht (28) eine Verlängerung derselben hervor

$$Z' - Z'' = 0{,}00395475 \text{ Sec.},$$

so dass

$$Z' = 4{,}5163641 \text{ Sec.}$$

Aus dem Luftwiderstand folgt die zweite Verlängerung (36)

$$Z - Z' = 0{,}00280809 \text{ Sec.}$$

und gibt als wirkliche Fallzeit

$$Z = 4{,}5191728 \text{ Sec.}$$

Diese Aenderung der Fallzeit übt ihren Einfluss sowohl auf den durch die Drehung beschriebenen Bogen ab aus, als auf die eigentliche Fallweite ab'' im Sinne des Breitenkreises gemessen. Der in der Zeit Z vom Fusspunkt a des Pendels beschriebene Bogen ist

$$ab = U \cdot Z = 1484{,}41240 \text{ Met.}$$

Zur Berechnung von ab'' hat man, da

$$U = 328{,}47507 \text{ Met.}, \quad Z'' = 4{,}5124094 \text{ Sec.},$$

für die einfache Fallweite

$$X'' = 1482{,}21410 \text{ Met.}$$

Durch Aenderung der Schwere vergrössert sie sich laut um

$$X' - X'' = 1{,}291272,$$

so dass $$X' = 1483{,}50537.$$

Der Widerstand der Luft, die Fallzeit um 0,00280869 Sec. vergrössernd, vergrössert die Fallweite um

$$X - X' = U(Z - Z') = 0{,}92258 \text{ Met.}$$

und sie wird dadurch

$$X = 1483{,}42795 \text{ Met.}$$

Der Bogen ab″ ergibt sich

$$ab'' = 1483{,}42795 + 0{,}00004 = 1483{,}42799$$

Demnach beträgt die östliche Abweichung des Falles

$$ab'' - ab = 0{,}01550 \text{ Met.}$$

oder 15,50 Mm., genau wie ohne Luftwiderstand. Der Luftwiderstand affizirt die beiden Grössen, aus deren Differenz die östliche Abweichung hervorgeht, auf gleiche Weise, so dass die letztere Grösse unverändert bleibt.

Diese Berechnung des Lufteinflusses aus einem Widerstandsgesetz und einem Coëfficienten, welche beide andern Erscheinungen, nämlich der Pendelbewegung und Wurfbewegung enthoben wurden, verdienen kein grosses Vertrauen. Mehrere Gründe, in der That, lassen diesen Einfluss als das unsicherste, veränderlichste und störendste Moment bei den Fallversuchen erscheinen. Vorerst kann das obenbenutzte Widerstandsgesetz keineswegs als erwiesen betrachtet werden. Ist nämlich festgestellt, dass bei geringen Geschwindigkeiten der Widerstand nahe der ersten, bei grossen der zweiten Potenz der Geschwindigkeit folgt, so fordert das Gesetz der Stetigkeit, dass bei zwischenliegenden Werthen beider Potenzen und bei sehr grossem Werthe derselben vermuthlich noch der dritten Rechnung getragen werde. Der Ausdruck wäre eine Reihe

$$a u + b u^2 + c u^3 + \dots$$

deren Coëfficienten bekannt sein sollten, was nicht der Fall ist, und von denen man gleichfalls nicht weiss, wann die Vernachlässigung des einen oder andern Gliedes gestattet ist.

Man bemerke zweitens, dass der Widerstand an sich nichts anderes ist, als die Resultirende, entgegen der Bewegungsrichtung, der sämmtlichen Kräfte, mit welchen die vorwärtsgedrängten, seitlings abfliessenden und hinter dem Körper sich wieder vereinigenden Lufttheilchen auf denselben drücken. Die Theorie der Flüssigkeitsbewegungen hat sich noch nicht an den nähern Vorgang dieses Abflusses gewagt; sie vermag daher jetzt noch, so wenig wie die Versuche zu entscheiden, ob die Form des Widerstandsgesetzes von der Gestalt des Körpers unabhängig ist oder nicht, selbst nicht, ob bei gleicher Gestalt aber sehr abweichender Grösse die Coëfficienten wirklich einen konstanten Werth bewahren.

Ein dritter Umstand endlich, der die Fallversuche trübt, liegt in dem grossen Einflusse, den die Temperatur auf jede höhere eingeschlossene Luftsäule, wie sie hier zur Vermeidung anderer Uebelstände nothwendig zur Anwendung kommen, ausübt. Sobald zwischen der innern und äussern Luft, — gewiss ein sehr häufiger Fall, — im einen oder andern Sinne ein Temperaturunterschied besteht, bilden sich auf- und niedersteigende Strömungen, welche den Widerstand vermehren oder vermindern. Es können selbst ablenkende Seitenkräfte entstehen, wenn die Luftbewegungen an beiden Seiten des Schlotes verschiedene sind, Bewegungen, die man weder kennt, noch vermeiden kann. Diese Ungleichheiten des Widerstandes, neben der Schwierigkeit der Ablösung der fallenden Kugeln, erklären die grossen Abweichungen, welche bisher hinsichtlich der Stelle des untern Aufschlagens der Kugeln beobachtet wurden.

8. Die Versuche von Reich.

Mit Recht betrachtet man die Fallversuche von Reich[1]), 1832 im Dreibrüderschacht in Freiburg ausgeführt, als die genauesten, die man besitzt. Die Fallhöhe betrug nicht weniger als h = 158,5407 Met., die Zahl der vergleichbaren Versuche stieg auf 109; es wurde die grösste Sorgfalt auf die Zeitmessung, auf die Ablösung der Kugeln, auf die Bestimmung der Fallhöhe, die Stelle des Aufschlages und auf alle einwirkenden Nebenumstände gelegt. Dennoch zeigen einzelne Versuche Abweichungen, die auf 120 und 130 Millim. von der Mittelstellung abweichen. Das Mittelresultat, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit berechnet, war eine

sichere östliche Abweichung von 28,397 Mm.,
eine sehr unsichere südliche von 4,374 Mm.

Um die östliche Abweichung an der Theorie zu prüfen, haben Olbers[2]) und Reich[3]) die ganze Frage des Widerstandes umgangen und statt der berechneten

[1]) Fallversuche über die Umdrehung der Erde. Freiburg 1832.
[2]) Benzenberg, Versuche u. s. f., p. 372.
[3]) A. a. O., p. 47.

die wirklich beobachtete Fallzeit in Rechnung gebracht. Dass dann eine befriedigende Uebereinstimmung mit der oben angegebenen östlichen Abweichung herauskommen musste, lässt sich leicht begreifen. Sehen wir aber zu, wie diese Versuche mit der obigen Widerstandstheorie harmoniren.

Der Ausgangspunkt der Kugeln im Dreibrüderschacht lag unter der geographischen Breite von 50° 53′ 22″,81, der Länge von 31° 0′ 8″,55 und in der Höhe L = 475 Meter über dem Meere. Daraus ergeben sich, mit den schon oben benutzten Rechnungselementen für die Grösse der Erde und die Stärke der Pendelschwere

$$\varphi = 90 - 50^\circ\ 31'\ 22'',81 = 39^\circ\ 6'\ 37'',09.$$

Die Pendelschwere wird sein,

$$G = G_{45}(1 + \beta \cos 2\varphi) \frac{R^2}{(R+L)^2} = 9{,}809635 \text{ Met.}$$

Der Rotationsradius ist

$$r' = (R + L) \cos \varphi = 4018758 \text{ Met.}$$

Daraus folgt die Rotationsgeschwindigkeit

$$U = \frac{2\pi r'}{T} = 293{,}05247 \text{ Met.},$$

und die Fliehkraft

$$f = \frac{4\pi^2 r'}{T} = 0{,}021374 \text{ Met.},$$

woraus sich hinwieder berechnet: die Ablenkung der beiden Schweren

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi + \frac{f}{G \cos \varphi}, \quad \psi = 39^\circ\ 12'\ 21'',84,$$

$$\alpha = \psi - \varphi = 0^\circ\ 5'\ 44'',65,$$

und die Fallschwere

$$g = \frac{G \cos \varphi}{\cos \psi} = 9{,}819237 \text{ Met.}$$

Der Ueberschuss über die Pendelschwere wäre so

$$g - G = 9{,}602 \text{ Mm.}$$

Die fallenden Kugeln bestanden meist aus reinem Zinn oder aus Zinn mit 10 % Wismuth. Der Radius derselben im Mittel war $\varrho = 18{,}9825$ Mm. und ihr spec. Gewicht $S = 7{,}9530$. Die mittleren, atmosphärischen Umstände waren: Luftdruck $b = 317{,}58$ par. Linien, Temperatur $t = 13^\circ{,}2$ C., Dampfdruck $e = 10{,}79$ par. Linien. Nennt man $s_0 = 0{,}00129277$ des spec. Gew. der Luft bei 45° im Normalzustand, so war es bei den Versuchen

$$s = s_0 \frac{g}{g_{45}} \cdot \frac{b - 0{,}3779 \cdot e}{336} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}00366 \cdot t} = 0{,}00114666.$$

Die in der Luft noch wirkende Schwere wird dadurch

$$g' = g\left(1 - \frac{s}{S}\right) = 9{,}817820 \text{ M.}$$

Daraus hinwieder folgen die einfache Fallzeit und Fallweite

$$Z'' = \sqrt{\frac{2h}{g'}} = 5{,}683001 \text{ Sec.}$$

$$X'' = U \cdot Z'' = 1665{,}4162 \text{ M.}$$

Um die Aenderungen zu bestimmen, welche diese Grössen durch die Variation der Schwere nach Richtung und Grösse erleiden, lassen sich die früheren Ausdrücke nicht zur Anwendung bringen, indem der Fall nicht ausserhalb, sondern innerhalb der Erde erfolgt. Wenn die Schwere bei einer vollständigen Kugel ausserhalb nach dem verkehrt quadratischen Verhältniss der Entfernung vom Centrum zunimmt, nimmt sie beim Fall im Innern, bei homogener Kugel, mit dieser Entfernung ab. Im vorliegenden Falle ist weder das eine noch das andere Verhalten vollständig realisirt, daher kaum etwas anderes übrig bleibt, als g' der Stärke nach als constant, der Richtung nach dagegen wie früher als veränderlich zu betrachten.

Die beiden Bewegungsgleichungen, nach erster Integration, werden unter diesen Voraussetzungen folgende sein:

$$(R + y)^2 \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = U\,(R + h);$$

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + (R + y)^2 \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = 2g'\,(H + h - y), \qquad (38)$$

wo wieder $U = \sqrt{2gH}$ gesetzt ist. Eliminirt man $\frac{d\varphi}{dz}$ mittelst der ersten aus der zweiten, so erhält man

$$\frac{1}{2g'}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = (h - y)\left[1 + H\,\frac{2R + h + y}{(R + y)^2}\right].$$

Entwickelt man und vernachlässigt h^2 und y^2 gegen R^2, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$dz = \frac{1}{\sqrt{2g'}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(h-y)\left[1 - 2\frac{H}{R} + 2\frac{Hh}{R^2} - 3\frac{H}{R^2}(h-y)\right]}}$$

oder, wenn man $h - y = x$, $dy = -\,dx$ einführt, ferner

$$b = 1 - 2\frac{H}{R} + 2\frac{Hh}{R^2}, \qquad c = 3\frac{H}{R^2}$$

setzt, in

$$-\,dz = \frac{1}{\sqrt{2g'}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x\,(b - c\,x)}},$$

deren Integral ist

$$-\,z = \frac{1}{\sqrt{2g'}}\left[C + \frac{1}{\sqrt{c}}\,arc\left(\mathrm{tg} = \frac{2\,c\,x - b}{2\sqrt{c\,x\,(b - c\,x)}}\right)\right].$$

Führt man wiederum die Werthe für b und c ein, und integrirt von $z = o$, $y = h$, $x = o$ bis $z = Z'$,

$y = o$, $x = h$, so erhält man schliesslich mit gleicher Annäherung

(39)

$$Z' = \frac{1}{\sqrt{2g'}} \cdot \frac{R}{\sqrt{3H}} \cdot \left[arc \left(tg = 2\sqrt{\frac{3Hh}{R^2}} \cdot \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2H}{R} - \frac{Hh}{R^2}\right)}}{1 - 2\frac{H}{R} - 2\frac{Hh}{R^2}} \right) \right]$$

oder nach Entwicklung, da der Bogen sehr klein ist,

$$arc = tg \left(1 - \frac{tg^2}{3}\right),$$

$$Z' = \sqrt{\frac{2h}{g'}} \left(1 + \frac{H}{R} + \frac{1}{2}\frac{Hh}{R^2} + \frac{3}{2}\frac{H^2}{R^2}\right). \quad (40)$$

Der Faktor ist das früher bestimmte Z''.

Die Zunahme durch Richtungsänderung der Schwere wird daher sein

$$Z' - Z'' = 0{,}003942 \text{ Sec.}$$

Also $$Z' = 5{,}686943 \text{ Sec.}$$

Statt dessen wurde in Folge des Widerstandes der Luft wirklich die Fallzeit beobachtet

$$Z = 6{,}009833 \text{ Sec.}$$

Man kann diesen Werth benutzen, um das früher angenommene Widerstandsgesetz zu prüfen, denn eine erste Annäherung gibt

$$\frac{g'}{k^2} = \frac{6(Z - Z')}{h \cdot Z'} = 0{,}00214875, \quad (41)$$

folglich als constante Endgeschwindigkeit der Kugeln

$$k = 67{,}59498 \text{ Met.}$$

Der Widerstandscoëfficient γ erhält den Werth

$$\gamma = \frac{\varrho \cdot S \cdot g'}{s \cdot k^2} = 0{,}28290,$$

während ihn Newton zu $\frac{3}{8} = 0{,}37500$ annahm,

Poisson dagegen zu $\frac{9}{40} = 0{,}22500$.

Der aus den Reich'schen Versuchen abgeleitete Werth weicht vom Mittel 0,29750 um wenig mehr als $\frac{1}{100}$ ab.

Aus dieser Untersuchung folgt wohl, dass der Luftwiderstand immer noch ein sehr unsicheres Moment in den Fallversuchen bildet, wodurch jeder Rückschluss von den beobachteten Fallzeiten und Fallweiten auf den wahren Werth der Fallschwere illusorisch wird. Zur direkten Bestimmung der Fallschwere oder wahren Erdanziehung bleibt daher kein anderer Weg als Versuche über den Fall im Vacuo, eine Aufgabe, welche der Aufmerksamkeit einer grössern wissenschaftlichen Akademie wohl werth wäre. Mit Hülfe der heutigen Mittel der Experimentation dürfte eine Fallröhre von 10 Meter Länge und 0,1 Meter Weite wohl genügen. Wenn dann 1) die Röhre durch Verbindung mit einer hohen Wassersäule nach dem Princip der Quecksilberluftpumpe entleert, 2) die Fallzeit chronoscopisch gemessen und 3) die Ablösung durch galvanische Mittel bewerkstelligt würde, so dürften wohl Resultate von wirklich wissenschaftlicher Genauigkeit über den wahren Werth von g gewärtigt werden.

9. Ablenkung des Lothes durch die Sonne.

Man denke sich ein in Ruhe hängendes Pendel. Die Sonne wird auf dasselbe, wie auf alle Körper, nach dem Gravitationsgesetz und daher ablenkend wirken, aber je nach ihrer Stellung nach verschiedener Richtung und mit verschiedener Stärke. Es fragt sich, ob diese Ablenkung, im Vergleich mit der Anziehung der Erde oder der Schwere, einen wahrnehmbaren Werth erreicht.

Die Wirkung der Sonne muss an jedem Orte beim Aufgang und Niedergang, da sie horizontal erfolgt, am stärksten und in beiden Fällen entgegengesetzt sein. Bezeichnet M die Masse der Sonne aus der Entfernung R auf die Erde wirkend, m die Masse der Erde, deren Radius r, so wird für diese Stellung die Abweichung von g (abgesehen von der Axendrehung der Erde) bestimmt aus

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{M}{m} \cdot \frac{r^2}{R^2}, \qquad (42)$$

Setzt man mit Mädler[1])

$$\frac{M}{m} = 355499, \quad \frac{R}{r} = 24043,$$

so folgt $\gamma = 0^\circ\ 2'\ 6'',85.$

Eine Ablenkung von 2′, oder zwischen der Morgen- und Abendstellung von 4′, hätte von jedem Astronomen oder Geodäten tausendmal wahrgenommen werden müssen, während diess nicht der Fall ist und selbst das genaue Mittel der Spiegelablesung keine Spur einer Ablenkung verräth.

Eine richtigere Beurtheilung des Falles beweist in der That, dass dem nicht anders sein kann, und erkennt in dem thatsächlichen Ausbleiben einer jeden Ablenkung einen direkten Beweis für die Umlaufsbewegung der Erde um die Sonne. Be-

---

[1]) Populäre Astronomie. Berlin 1849, p. 116 u. 147.

trachtet man einfach die Erdbahn als einen Kreis, so beruht die Erhaltung der Kreisbewegung einzig auf der beständig erfolgenden Aufhebung der Fliehkraft durch die Gravitation, welche beide am Kreise einander entgegengesetzt wirken. Da alle Gegenstände der kreisenden Erde, bis auf die kleinsten Massentheilchen hinab, den beiden Kräften unterworfen sind, gilt die Aufhebung auch für alle Theile, so dass ebenfalls der Pendel bei allen Stellungen der Sonne gleichen sich aufhebenden Kräften unterworfen ist.

Nicht für den Kreis, selbst für eine elliptische Bahn, wie die Ekliptik, bleibt die Anziehung der Sonne zur Ablenkung des Pendels wirkungslos. Zwar dient nur ein Theil der Anziehung, da sie eine andere Richtung als die normalgerichtete Fliehkraft hat, zur Aufhebung der letztern und fällt unter die vorige Erklärung; allein die andere Theilkraft, welche tangential gerichtet ist und die Geschwindigkeit der Erde vermehrt oder vermindert, bleibt ebenso wirkungslos. Indem sie nämlich wiederum auf alle Massentheilchen in gleicher Weise beschleunigend oder verzögernd einwirkt, kann sie keine relative Stellungsänderung derselben, also keine Ablenkung des Pendels neben den umgebenden Gegenständen hervorbringen.

Es folgt hieraus, dass eine Ablenkung durch die Sonne nur von zweiter Ordnung, d. h. nur aus dem Unterschied der Kräfte an den einen oder andern Punkten der Erde hervorgehen kann. Die genaue Gleichheit von Anziehung und Fliehkraft findet in der That nur für den Schwerpunkt, d. h. für den Mittelpunkt der Erde, statt und für die Punkte der Oberfläche, welche dem grossen Kreise, der zum Radius vector senkrecht steht, zugehören. Der Sonne nähere Punkte erleiden eine stärkere Anziehung, der Sonne entferntere eine schwächere Anziehung. Es fragt sich, welche Ablenkung diese Ungleichheit der Kraft zur Folge hat.

Sei A (Fig. 4) der Mittelpunkt der Sonne, deren Masse M, a der Mittelpunkt der Erde, in der Entfernung R von A abstehend. Da die Kräfte so wirken, als wären die ganzen Massen M und m in ihren Centren A und a concentrirt, so führt die Gleichheit der Anziehung und Fliehkraft in a auf die Beziehung

$$\mu \frac{M m}{R^2} = \frac{4 \pi^2 m R}{T^2}, \tag{43}$$

wo T die Umlaufszeit der Erde um die Sonne und μ die Gravitationseinheit darstellt. Da die Schwere lediglich die Gravitation an der Erdoberfläche ist, so hat man

$$\mu \frac{m}{r^2} = g, \text{ also } \mu = g \frac{r^2}{m}$$

und in die obere Gleichung eingeführt, liefert sie den aus der Sonnenwirkung bestimmten Werth der Schwere

$$g = \frac{4 \pi^2}{T^2} \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{R^3}{r^2}. \tag{44}$$

Benutzt man die oben gegebenen Werthe für das Verhältniss der Massen und Radien, so ergibt sich, da $T = 365^t\, 5^h\, 48'\, 47'',57 = 31556927$ Sec. ist

$$g = 9{,}8731422 \text{ Met.}$$

Dieser Werth weicht von der mittlern Fallschwere $g_{45} = 9{,}823945$ um nicht weniger als 0,0492177 Met. ab, was sich kaum anders erklären lässt, als dass das Produkt $\frac{m R^3}{M r^3}$ den Werth 39095580 statt 38900699 erhalten hat oder um $\frac{1}{170}$ zu gross ist, was von einem unrichtigen Verhältnisse der Massen oder der Entfernungen oder beider zusammen herrühren kann. Trägt man den Fehler auf die Entfernungen über (beispielweise), so kommt das darauf zurück, dem Verhältniss $R : r$ den Werth 24003 statt 24042 beizulegen.

Ein Punkt b der Erdkugel, durch den Radius r und den Winkel α mit R definirt, wird nun folgenden Kräften ausgesetzt sein: 1) der Fallschwere g, oder bei Annahme einer Kugel g_{45}, längs b a wirkend; 2) der Sonnenanziehung P auf der Richtung b A wirkend; diese Kraft hat zum Ausdruck

$$P = \mu \frac{M}{R'^2} = g \frac{r^2}{R'^2} \cdot \frac{M}{m},$$

wo R' die Entfernung b A bezeichnet; 3) der Fliehkraft F die (abgesehen von der Rotation der Erde) gleich und parallel der in a entwickelten Fliehkraft ist, da bei einer Translationsbewegung alle Punkte gleiche parallele Bahnen durchlaufen, also

$$F = \frac{4 \pi^2 R}{T^2}.$$

Sei g' die Resultirende der 3 Kräfte, mit R den Winkel α' bildend, so gelten für die Theilkräfte senkrecht und parallel zu R die Bedingungen

$$g' \sin \alpha' = g \sin \alpha + P \frac{r}{R'} \sin \alpha, \qquad (45)$$

$$g' \cos \alpha' = g \cos \alpha + F - P \frac{R - r \cos \alpha}{R'}.$$

Da, wie früher erläutert,

$$F = g \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{M}{m}$$

und angenähert $R' = R \left(1 - \frac{r}{R} \cos \alpha\right)$, also

$$P = g \frac{r^2}{R^2} \frac{M}{m} \left(1 + 2 \frac{r}{R} \cos \alpha\right)$$

so reduziren sich die beiden Gleichungen unter Vernachlässigung von $\frac{M}{m} \cdot \frac{r^4}{R^4}$ auf

$$\begin{aligned} g' \sin \alpha' &= g \sin \alpha \left(1 + \frac{r^3}{R^3} \cdot \frac{M}{m}\right) \\ g' \cos \alpha' &= g \cos \alpha \left(1 - 2 \frac{r^3}{R^3} \cdot \frac{M}{m}\right) \end{aligned} \qquad (46)$$

woraus

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha \left(1 + 3 \frac{r^3}{R^3} \cdot \frac{M}{m}\right).$$

α' ist grösser als α, der grösste Werth der Abweichung beider tritt bei $\alpha = 45^\circ$ ein und beträgt nicht mehr als

$$\alpha' - \alpha = 0^\circ\ 0'\ 0'',006,$$

eine Grösse, die zu klein ist, um irgendwie wahrgenommen zu werden.

10. Ablenkung des Lothes durch den Mond.

In ähnlicher Weise kann man sich fragen, ob die Anziehung des Mondes beim Auf- und Niedergang eine Ablenkung des Pendels hervorbringt, welche in die Grenzen der zu beobachtenden Grössen fällt. Hier spielt die Erde die Rolle des Zentralkörpers, darf aber, da von Fliehkraft die Rede ist, nicht als ruhend betrachtet werden.

Man muss davon ausgehen, dass Mond und Erde in gleichem Sinne und mit gleicher Winkelgeschwindigkeit den gemeinsamen Schwerpunkt umkreisen.

Sei der Mond, dessen Masse m in a (Fig. 5), die Erde, deren Masse M in A, wobei die Entfernung aA $= L$ sei. Der gemeinsame Schwerpunkt C liegt so, dass, wenn AC $= L'$ genannt wird

$$M L_1 = m(L - L_1) \text{ woraus } L_1 = L \frac{m}{M+m}.$$

Madler[1]) gibt folgende Werthe, wenn R den Erdradius bezeichnet,

$$\frac{L}{M} = 60{,}108, \quad \frac{M}{m} = 87{,}74.$$

Daraus folgt $\quad L_1 = 0{,}677349\, R.$

Der Schwerpunkt C befindet sich also in C' im Innern der Erde, ungefähr um $\frac{1}{3}$ des Radius unter der Oberfläche.

Die Gleichheit der Mondanziehung (auf die Erdmasse im Schwerpunkte A konzentrirt gedacht) mit der Fliehkraft, führt auf die Gleichung

$$\frac{4\pi \cdot L_1}{T^2} \cdot M = \mu \frac{m M}{L^2} = g \frac{R^2}{L^2} m,$$

da $\mu = g R^2 : M$ ist. Hieraus leitet sich für g ein Werth ab, der ist

$$g = \frac{4\pi}{T^2} \frac{L^3}{R^3} \cdot \frac{M}{M+m} \cdot R. \tag{47}$$

Setzt man die Umlaufszeit des Mondes

$$T = 27^t\, 7^h\, 43'\, 11'',5 = 2360591{,}5 \text{ Sec.},$$

so findet man $\quad g = 9{,}818619$ Met.,

ein Werth, der von $g_{45} = 9{,}823945$ nur um $+0{,}005326$ oder um 5 Mm. abweicht. Zur Concordanz beider Werthe müsste die Grösse

$$\frac{L^3}{M^3} \cdot \frac{M}{M+m} \text{ von } 214721{,}30 \text{ auf } 217675{,}66$$

erhöht werden.

---

[1]) Astronomie, p. 152.

Die Berechnung der Ablenkung folgt auch hier wie bei der Sonne aus der Betrachtung der Stärke g' und Richtung α' der Resultirenden dreier Kräfte 1) der Anziehung der Erde längs bA gleich g_{45}; 2) der Anziehung des Mondes p, längs ba, Entfernung ab $= L'$

$$p = \mu \frac{m}{L'^2} = g \frac{R^2}{L^2} \cdot \frac{m}{M},$$

3) der Fliehkraft in b, gleich und parallel mit derjenigen in A, da die Bewegung der Erde um C′ eine Translations- und nicht eine Rotationsbewegung ist. Die Gleichungen für die Theilkräfte sind

$$g' \sin \alpha' = g \sin \alpha + p \frac{R \sin \alpha}{L'} \qquad (48)$$

$$g' \cos \alpha' = g \cos \alpha - p \frac{L - R \cos \alpha}{L'} + f$$

wobei $L'^2 = L^2 + R^2 - 2LR \cos \alpha$ ist.

Berechnet man für $\alpha = 45°$, die Grössen genau, da die Unterschiede der Massen und Entfernungen geringere sind als bei der Sonne, so folgt

$$L' = 59{,}405110\, R.,$$

und
$$g' \sin \alpha' = 6{,}9465641 \text{ Met.}$$
$$g' \cos \alpha' = 6{,}9465629 \text{ „}$$

woraus sich eine Ablenkung für $\alpha = 45°$ ergibt, die nicht mehr beträgt als

$$\alpha' - \alpha = 0° \; 0' \; 0'',018,$$

eine Grösse, die der Beobachtung leicht entgehen konnte, obgleich sie das Dreifache der Sonnenwirkung beträgt.

Wenn Sonne und Mond in Conjunction auf- oder untergehen, beträgt ihre gemeinsame Ablenkung

$$\alpha' - \alpha = 0° \; 0' \; 0'',024,$$

wenn es in Opposition geschieht

$$\alpha' - \alpha = 0° \; 0' \; 0'',012,$$

so weit gehen die von dieser Ursache herrührenden Abweichungen. Wir gelangen hier auf die nämliche dreimal grössere Wirkung des Mondes, im Vergleich mit der Sonne, wie sie sich bei der Ebbe und Fluth kund gibt[1]), welche Erscheinung aus ganz ähnlichen Anziehungsverhältnissen hervorgeht.

Notizen.

Miloschin. — Herr Joh. Bademlic aus Belgrad, welcher am hiesigen Polytechnikum Chemie studirt, übergab mir vor einiger Zeit eine Probe des Miloschins (Serbian) von Rudnjak in Serbien mit der Bitte, denselben einer Untersuchung zu unterwerfen, um die spezifische Selbstständigkeit desselben festzustellen. Das derbe, unkrystallinische, dichte Mineral hat unvollkommen muschligen bis unebenen, glatten bis feinerdigen Bruch, ist graulichblau in das Seladongrüne neigend gefärbt, stellenweise heller und dunkler, undurchsichtig bis schwach an den Kanten durchscheinend, wachsartig schimmernd, auf den Schnittflächen wachsartig glänzend, hat blaulichweissen Strich, die Härte um 1 herum, ist milde, fühlt sich fein, aber nicht seifenartig an und haftet ziemlich stark an der feuchten Lippe. Im Glaskolben erhitzt gibt das Mineral reichlich Wasser, ohne wesentlich die Farbe zu verändern, dieselbe wird nur etwas unreiner. Vor dem Löthrohre ist es unschmelzbar, behält die Farbe, die nur wie vorhin unreiner wird; mit Phosphorsalz verschmilzt es langsam zu einer halbklaren glasigen Perle, dabei deutlich Chromreaction zeigend. Kleine Stücke in Wasser gelegt, saugen

---

[1]) Laplace, Syst. du Monde. An VII, p. 253.