Auflösung einer statischen Aufgabe.

Von

Dr. H. Eggers.

Es sind 3 feste Punkte gegeben A, B, C (Fig. 1). Um den Punkt A dreht sich in der Ebene ABC eine feste Stange von der Länge r. Am freien Ende derselben ist eine Rolle P, um welche ein Seil gelegt ist. Dieses Seil ist im Punkte B befestigt, geht von hier über die Rolle P und von dort wieder über eine Rolle im Punkte C und wird über dieselbe hinaus von einem Gewichte gespannt. Es soll derjenige Punkt P auf dem Kreise A gefunden werden, in welchem Gleichgewicht stattfindet.

Die Bedingung des Gleichgewichts ist, dass der Radius AP den Winkel CPB halbire, dass also $< \alpha = \beta$ sei. Man hat also den Ort der Punkte P zu finden von der Beschaffenheit, dass der Radius AP beständig den Winkel $BPC = \alpha$ halbirt.

Wenn der Radius AP beständig den veränderlichen Winkel α halbirt, so wird der Nebenwinkel von α durch diejenige Gerade halbirt, welche senkrecht auf AP im Punkte P steht. Durch dieses Linienpaar werden auf der Geraden BC, also für jeden Punkt P, zwei Punkte x_1 und y_1 gezeichnet, welche in ihrer Gesammtheit ein involutorisches Punktsystem bilden, dessen Doppelpunkte B und C sind. Da diese beiden Doppelpunkte von vorne herein gegeben sind, so ist damit auch das Punktsystem gegeben. Zugleich ist dadurch das Strahlsystem gegeben, dessen Mittelpunkt A ist, der Mittelpunkt des gegebenen Kreises. Dieses Strahlsystem, dessen Doppelstrahlen AB und AC sind, liegt zugleich perspectivisch mit dem Punktsystem $x_1 y_1$. Das Punktsystem $x_1 y_1$ inducirt zugleich ein Kreisbüschel, in welchem irgend ein Individuum die Strecke zwischen je 2 conjugirten Punkten $x_1 y_1$ des Punktsystems auf BC zum Durchmesser hat. Die gemeinsame Potenzlinie des Büschels ist das in der Mitte M von BC auf BC errichtete Perpendikel. Dieses Kreisbüschel K ist homographisch mit dem Punktsystem $x_1 y_1$ und daher auch homographisch mit dem Strahlsystem A, und liegt ausserdem perspectivisch mit dem letzteren. Jedem conjugirten Strahlenpaare des Strahlsystems A entspricht nämlich ein Kreis des Büschels, der sich mit dem entsprechenden Strahlenpaare auf der Geraden BC in einem conjugirten Punktenpaare $x_1 y_1$ schneidet. Ausserdem schneidet jedes Strahlenpaar den jedesmal entsprechenden Kreis noch in 2 Punkten uv. Die Gesammtheit dieser Punktenpaare bildet den gesuchten Ort für die Punkte P. Wenn das Curvenbüschel K und das Strahlsystem A sich in schiefer Lage befänden, so würden sie eine Curve der vierten Ordnung erzeugen. Im vorliegenden Falle bildet jedoch, wie oben bemerkt, der Träger BC des Punktsystems $x_1 y_1$ einen Theil des Ortes, mithin kann der andere Theil nur noch eine Curve dritter Ordnung sein. Dieselbe geht durch die Punkte B und C als Grenzpunkten des Kreisbüschels und hat in A einen Doppelpunkt. Für denjenigen Kreis des Büschels nämlich, welcher durch den Punkt A geht, fallen die beiden Punkte uv, welche der Curve angehören, in A zusammen. Für diejenigen Kreise, welche zwischen A und den Punkt M fallen, entfernen sich die Curvenpunkte der einen Reihe fortwährend, bis der Strahl AM den unendlich entfernten Punkt der Curve liefert. Der ∞ ferne Punkt liegt also in der Richtung MA. Er entspricht der Potenzlinie, als dem grössten Kreise des Büschels. Geht man mit der Construction über die Potenzlinie nach B hin weiter, so springt der Punkt auf der entgegengesetzten Seite in der Richtung AM ins Unendliche, bis er sich in B mit dem von A herkommenden vereinigt. Der Mittelpunkt des grössten Kreises (der Potenzlinie nämlich) liegt ∞ weit auf BC; derjenige Punkt also, welcher gleichzeitig mit dem ∞ fernen erzeugt wird, ist der Schnittpunkt O der Potenzlinie mit der zu BC Parallelen AO. Die Curve bildet eine Schleife, deren Knoten im Mittelpunkte A des gegebenen Kreises liegt. Der Kreis A trifft also im Allgemeinen das Auge der Schleife 2 Mal und jeden unendlichen Zweig 1 Mal. Es gibt also im Allgemeinen 4 reelle Lösungen. Die weiteren zwei Lösungen, welche von dem Schnitte der Geraden BC herrühren, sind im Allgemeinen der statischen Aufgabe fremd, ausser wenn BC den Kreis A gerade berührte, denn dann halbirt AP den gestreckten Winkel BC, und wenn BC Durchmesser wäre. Diese Schnittpunkte haben jedoch eine Bedeutung, wenn man die Aufgabe als eine Maximumsaufgabe auffasst, so nämlich, dass $BP+CP$ ein Maximum oder Minimum sein soll.

Um die Aufgabe auf analytischem Wege zu lösen, kann man die synthetische Auflösung in folgender

Weise nachahmen. Man hat die Gleichung des Strahlbüschels AP und des Kreisbüschels aufzustellen. Nimmt man (Fig. 2) die Potenzlinie als yAxe und BC als xAxe an, so gelangt man zu einfachen Ausdrücken für den veränderlichen Kreis. Wenn $MB = +c$, $MC = -c$ gesetzt wird, so ist die Gleichung der Punkte B und C respective

$$(x-c)^2 + y^2 = o\,;\; (x+c)^2 + y^2 = o \qquad (1.)$$

und wenn λ^2 einen veränderlichen Coëfficienten bedeutet, so ist die Gleichung des Kreisbüschels:

$$(x-c)^2 + y_2 - \lambda^2 \left[(x+c)^2 + y^2\right] = o \qquad (2.)$$

Die Ausdrücke links vom Gleichheitszeichen unter (1.) bedeuten die Quadrate der Entfernungen eines variabelen Punktes xy von den Punkten B und C respective. Bezeichnet man dieselben der Kürze wegen für einen Augenblick mit ϱ und ϱ_1 respective, so hat man wegen der Gleichheit der Winkel α und β die Beziehung

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = -\frac{CB_1}{BB_1}$$

Setzt man das veränderliche Verhältniss $\frac{CB_1}{BB_1} = \lambda$, so erhält man

$$\frac{\varrho^2}{\varrho_2^1} = \lambda^2,\text{ oder } \varrho^2 - \lambda^2\varrho_1^2 = o,$$

welche Gleichung identisch mit Gleichung (2.) ist.

Die Gleichung des Strahlsystems A findet man so:

Es seien $A = o$ und $B = o$ die Gleichungen der Doppelstrahlen BA und CA, so ist die Gleichung des veränderlichen Strahls AP diese

$$\left\{\begin{array}{l} A - \mu B = o,\text{ und des conjugirten} \\ A + \mu B = o\,; \end{array}\right. \qquad (3.)$$

wo die Veränderliche $\mu = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}$ bezeichnet. Dies Verhältniss kann nun durch λ ausgedrückt werden. Denn man hat

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_1} = \frac{\varrho}{p}$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\beta_1} = \frac{p_1}{\varrho_1}, \text{ also dass } < \beta = \alpha,$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{\varrho}{\varrho_1} \cdot \frac{p}{p_1} = \lambda \cdot \frac{p}{p_1}$$

Das Verhältniss $\frac{p}{p_1}$ ist aber constant; es sei durch m bezeichnet, so erhält man

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \mu = m\lambda.$$

Die Gleichung des conjugirten veränderlichen Linienpaares wird also

$$A^2 - \mu^2 B^2 = A^2 - m^2\lambda^2 B^2 = o \qquad (4.)$$

Da m constant ist, so kann man es in den Ausdruck B^2 werfen und man sieht, dass das Linienpaar (4.) homographisch ist mit dem Kreise (2.). Bezeichnet man der Kürze wegen die beiden Ausdrücke in x und y in der Gleichung des veränderlichen Kreises mit K und K_1, so erhält man die Gleichung der Curve, wenn man λ^2 aus den Gleichungen eliminirt:

$$\left.\begin{array}{l} K - \lambda^2 K_1 = o \\ A^2 - m^2\lambda^2 B^2 = o \end{array}\right\}, \text{ woraus}$$

$$\begin{vmatrix} K, & K_1 \\ A^2, & m^2 B^2 \end{vmatrix} = o \qquad (5.)$$

Um diese Gleichung in entwickelter Form aufzustellen, seien α und β die Coordinaten des Punktes A, so sind die Gleichungen von AB und AC respective

$$o = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ +c & o & 1 \end{vmatrix} \text{ und } o = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ -c & o & 1 \end{vmatrix}, \text{ oder}$$

$\beta x + (c - \alpha)\, y - c\beta = o$, und $\beta x - (c - \alpha)\, y + c\beta = o$.
Die Gleichung der Curve wird also schliesslich:

$$o = \begin{vmatrix} (x-c)^2 + y^2 & , & (x+c)^2 + y^2 \\ [\beta x + (c-\alpha)\, y - c\beta]^2 & , & [\beta x - (c+\alpha)\, y + c\beta]^2 \end{vmatrix} \qquad (6.)$$

Diese Gleichung ist vom vierten Grade, weil sie auch die Gleichung der Geraden BC enthält, nämlich:

$$y = o.$$

Denn setzt man y überall $= o$, so wird die Gleichung (6.) identisch erfüllt. Man erhält nämlich

$$\beta^2 \begin{vmatrix} (x-c)^2, & (x+c)^2 \\ (x-c)^2, & (x+c)^2 \end{vmatrix}$$

Ordnet man die Grössen der zweiten Horizontalreihe ein wenig anders, so erhält man:

$$o = \begin{vmatrix} (x-c)^2 + y^2 & , & (x+c)^2 + y^2 \\ [(\beta x - \alpha y) + c\,(y-\beta)]^2 & , & [(\beta x - \alpha y) - c\,(y-\beta)]^2 \end{vmatrix}, \qquad (7.)$$

eine mehr übersichtliche Form.

Eine andere analytische Lösung folgt weiter unten.

In dem besonderen Falle, dass der Punkt C nach einer gegebenen Richtung ins Unendliche rückt (Fig 3), bleibt Alles noch wie vorher, nur wird das Kreisbüschel ein einfacheres. In diesem Falle nämlich rückt der eine Doppelpunkt C des involutorischen Punktsystems in die Unendlichkeit. Dieser Umstand hat zur Folge, dass je 2 conjugirte Punkte gleichweit, auf verschiedenen Seiten des anderen Doppelpunktes B, von diesem entfernt liegen. Mithin geht das Kreisbüschel in ein System concentrischer Kreise K über mit dem gemeinsamen Mittelpunkte B (Fig. 3). Construirt man also eine beliebige Anzahl von diesen und zieht vom Mittelpunkt A des gegebenen Kreises jedesmal das Strahlenpaar nach den beiden Schnittpunkten irgend eines Kreises K mit der Senkrechten in B auf AB, so erhält man immer 2 Punkte P und P_1 durch die 2 anderen Schnittpunkte des Strahlenpaars mit K.

Um diesen Fall analytisch zu beantworten, möge der Träger BY der involutorischen Punktkreise die y Axe sein, B der Anfang und die in B auf BY Senkrechte die Axe der x. Ist dann λ der veränderliche Halbmesser der Individuen des Kreisbüschels, so ist die Gleichung des letzteren

$$x^2 + y^2 - \lambda^2 = o. \tag{8}$$

Wenn $\alpha\beta$ die Coordinaten des Kreismittelpunkts A sind, so sind die Gleichungen irgend eines Linienpaars des involutorischen Strahlsystems A folgende:

$$o = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ o & \lambda & 1 \end{vmatrix} \text{ und } o = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ o & \lambda & 1 \end{vmatrix}, \text{ oder ausgewerthet:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta x - \alpha y + \lambda(\alpha - x) = o \\ \beta x - \alpha y - \lambda(\alpha - x) = o, \end{array} \right.$$

woraus sich durch Multiplikation die Gleichung des Paars ergiebt:

$$(\beta x - \alpha y)^2 - \lambda^2 (\alpha - x)^2 = o \tag{9}$$

Wenn man jetzt λ^2 aus (8) und (9) eliminirt, so erhält man als Gleichung der Ortscurve:

$$o = \begin{vmatrix} (\beta x - \beta y)^2, & (\alpha - x)^2 \\ x^2 + y^2, & 1 \end{vmatrix}, \tag{10}$$

welche Gleichung eine Curve 3. Ordnung mit dem Doppelpunkte A und die Gerade BY darstellt. Denn für $x = o$ verschwindet der Ausdruck (10) identisch.

Eine weitere Specialisirung der Aufgabe erhält man, wenn man den Punkt C senkrecht zu der Geraden AB in's Unendliche rücken lässt. In diesem Falle bleibt das involutorische Punktsystem auf BY ein hyperbolisch gleichseitiges wie vorher, aber je 2 Punkte P und P_1 liegen jetzt symmetrisch zu dem Durchmesser BH, mithin auch die ganze Curve. Die Coordinaten des Mittelpunktes A sind jetzt $-\alpha$ und o; mithin hat man in Gleichung (10) bloss $\beta = o$ und $-\alpha$ für α zu setzen, um die Gleichung der Curve zu erhalten. Sie geht dann über in:

$$o = \begin{vmatrix} x^2 + y^2, & 1 \\ \alpha^2 y^2, & (\alpha + x)^2 \end{vmatrix}, \tag{11}$$

welche Gleichung den Factor x hat, denn für $x = o$ wird dieselbe identisch erfüllt. Werthet man die Determinante aus und dividirt durch x, so nimmt die Gleichung der Curve die Form an:

$$x(x+\alpha)^2 + (x + 2\alpha) y^2 = o; \tag{12}$$

sie hat zur Asymptote die Linie $x + 2\alpha = o$.

Die Gleichung des gegebenen Kreises mit dem Halbmesser r ist:

$$(x+\alpha)^2 + y^2 - r^2 = o \tag{13}$$

Berechnet man aus der letzten Gleichung y^2 und setzt diesen Werth ein in Gleichung (12), so erhält man eine quadratische Gleichung für die Abscissen der Schnittpunkte des Kreises A mit der Curve:

$$x(x+\alpha)^2 + (x + \alpha + \alpha)\left[r^2 - (x+\alpha)^2\right] = o;$$

verlegt man noch den Anfang der Zählung in den Mittelpunkt A durch die Substitution

$$x + \alpha = X,$$

so wird die Gleichung:

$$(X - \alpha) X^2 + (X + \alpha)(r^2 - X^2)\, o, \text{ oder}$$

$$X^2 - \frac{r^2}{2\alpha} X - \frac{\alpha r^2}{2\alpha} = o. \tag{14}$$

Für jedes gefundene X ergeben sich 2 Lösungen für y aus der Gleichung (13):

$$y^2 = r^2 - X^2.$$

Die Gleichung (14) zeigt, dass in diesem Falle die Aufgabe auf elementare Weise construirt werden kann, wie auch aus der symmetrischen Lage der Curve gegen den Durchmesser AB geschlossen werden durfte. Eine solche Construction soll hier gezeigt werden.

Es sei P eine Gleichgewichtslage, also AP halbirt den $\angle BPG$, und PA_1, Tangente in P, halbirt den Nebenwinkel. Der Punkt P bestimmt also auf der Geraden BA 2 Punkte $B_1 A_1$, indem die Richtung des Gewichtes PG den Punkt B_1 und die Tangente in P den Punkt A_1 liefert. Die 4 Punkte BB_1 und AA_1 sind harmonisch, so jedoch, dass von dem veränderlichen Punktenpaare $A_1 B_1$ je einer conjugirt ist zu einem des festen Paares AB, und zwar sind zugeordnet

(A und A_1) und (B und B_1).

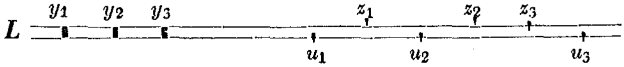
Wenn der Punkt P die Ortscurve durchläuft, so erzeugt das veränderliche Punktenpaar $A_1 B_1$ also keine Involution, sondern 2 homographische Punktreihen in allgemeinerer Lage, in welchem die festen Punkte $A B$ die Doppelpunkte sind.

Betrachtet man jezt den gegebenen Kreis und bemerkt, dass PB_1 die Polare des Punktes A_1 ist, weil PA_1 Tangente und $PB_1 \perp AB$, so sieht man, dass das Punktenpaar $A_1 B_1$ harmonisch ist zu den Punkten $A_2 B_2$, welche Endpunkte des Durchmessers AB sind. Irgend ein veränderliches Punktenpaar $A_1 B_1$, das harmonisch zu $A_2 B_2$ liegt, erzeugt ein involutorisches Punktsystem, dessen Doppelpunkte A_2 und B_2 sind.

Unsere Aufgabe kommt also darauf hinaus:

Es sind auf einer Geraden AB 2 homographische Punktreihen (mit den Doppelpunkten AB) und eine involutorische Punktreihe (mit den Doppelpunkten A_2 B_2) gegeben: Man soll ein Punktenpaar in dem einen Doppelsystem aufsuchen, welches mit einem Punktenpaare in dem anderen Doppelsystem zusammenfällt. Die Aufgabe in ihrer allgemeinsten Fassung würde sich beziehen auf 2 Paare von allgemeinen homographischen Punktreihen auf einem und demselben Träger. Sie lässt im Allgemeinen 2 Lösungen zu, d. h. es giebt im Allgemeinen 2 Punktenpaare auf dem Träger, welche gleichzeitig in beiden Doppelsystemen entsprechende Punkte sind.

Man kann die Construction in folgender Weise ausführen (vergl. Chasles Geom. Sup. Seite 226):



Wenn man 3 beliebige Punkte $y_1\, y_2\, y_3$ auf dem gemeinsamen Träger L annimmt, so entsprechen denselben in dem ersten System 3 bestimmte Punkte $z_1\, z_2\, z_3$, und in dem zweiten Systeme 3 andere bestimmte Punkte $u_1\, u_2\, u_3$. Fielen nun 2 Punkte z_k und u_k, welche einem und demselben y_k entsprechen, zusammen in einen einzigen Punkt x_k, so würde dieser und der ihm entsprechende Punkt y_k als ein Paar der Forderung genügen. Man hat also nur die 3 Punkte $z_1\, z_2\, z_3$ und die 3 Punkte $u_1\, u_2\, u_3$ als 2 homographische Punktreihen zu betrachten nud die Doppelpunkte $x_1\, x_2$ derselben zu construiren. Nach der Art ihrer Entstehung fallen die, jedem x entsprechenden, Punkte y in beiden

Systemen zusammen. Construirt man also zu x_1 in irgend einem System den entsprechenden v_1 und zu x_2 in irgend einem System den entsprechenden v_2, so sind die Paare

$$x_1 v_1 \text{ und } x_2 v_2$$

die gesuchten. Unsere Aufgabe ist hiermit gelöst. Hat man nämlich die Punktenpaare $x_1 v_1$ und $x_2 v_2$ auf AB gefunden, so hat man nur über jede der beiden Strecken $x_1 v_1$ und $x_2 v_2$ als Durchmesser einen Kreis zu beschreiben. Diese beiden Kreise schneiden den gegebenen Kreis um A in den 4 Punkten P der Gleichgewichtslage.

Für den Fall, dass beide Punktsysteme 2 Involutionen sind, giebt es nur 1 Punktenpaar, worüber vergl. Schröter, Theorie der Kegelschnitte, S. 61.

Durch obige Construction ist zugleich die graphische Auflösung des Systems Gleichungen gegeben:

$$\left\{\begin{array}{l} xy + ax + by + C = o \\ xy + a_1 x + b_1 y + C_1 = o \end{array}\right\}$$

denn jede Gleichung stellt zwei homographische Punktreihen auf ein und derselben Geraden dar, wenn man die Abscissen aller Punkte von einem festen Zählpunkte an respective mit x und y bezeichnet, wobei x und y immer entsprechende Punkte bedeuten. Durch Elimination von y etwa erhält man eine quadratische Gleichung in x, und da zu jedem x nur ein entsprechendes y existirt, so giebt es also auch hiernach 2 Punktenpaare, welche der Forderung genügen.

In dem eben behandelten Falle, wenn also die Lösung auf elementare Weise construirbar ist, bedarf man zur Erzeugung der Ortscurve nicht nothwendig des Kreisbüschels, sondern kann die einzelnen

Curvenpunkte mittelst zweier Strahlbüschel construiren; wie folgt:

Es sei A wieder Mittelpunkt des gegebenen Kreises und P ein beliebiger Punkt der Curve. Macht man jetzt $Pz = PB_1$, so ist wegen Congruenz der beiden Dreiecke

$$\Delta\, APB_1 \text{ und } APz$$

der Winkel bei z ein rechter; also liegen die Punkte z auf dem Kreise, dessen Durchmesser AB ist. Errichtet man noch auf PA in A eine Senkrechte AP_1, so ist P_1 gleichfalls ein Punkt der Curve, weil, wenn $P_1B_2 \parallel PB_1$, dann AP_1 den Nebenwinkel von B_2P_1B halbirt. Die beiden Strahlen AP und AP_1, welche immer rechtwinklig auf einander sind, bilden ein involutorisches Strahlbüschel (mit dem Centrum A), welches sich mit dem Strahlbüschel BP (mit dem Centrum B) auf der Curve schneidet. Um also irgend einen Punkt der Curve zu construiren, ziehe man einen beliebigen Strahl Bz, ziehe die Sehne Az und halbire die beiden Winkel, welche die Sehne Az mit dem Durchmesser BA macht. Die beiden Halbirenden AP und AP_1 schneiden den Strahl Bz in 2 Punkten der Curve P und P_1. Wenn z auf A fällt, so fallen P und P_1 in A zusammen. Wenn z mit B zusammenfällt, so ist Bz Tangente in B, also auch $AP \perp AB$, d. h. die Tangente in A an den Kreis M ist nach dem ∞ fernen Punkte der Curve gerichtet.

Wenn der Punkt z sich ändert, so beschreiben die beiden Strahlen Az und Bz 2 congruente Strahlbüschel, welche den Kreis M erzeugen. Vergleicht man den veränderlichen Strahl AP mit dem entsprechenden Az, so sieht man, dass Az mit dem festen

Strahl AB immer den doppelten Winkel macht von demjenigen, welchen AP mit AB macht. Die beiden Strahlbüschel AP und Az hängen also genau so zusammen, wie ein Büschel im Mittelpunkte M des Kreises um M mit einem Büschel im Peripheriepunkte B, deren Strahlen sich beständig auf dem Kreisumfange schneiden (Fig. 6b.).

Es entspricht also das Büschel Az in Fig. a. dem Büschel Mz in Fig. b. und Büschel AP in Fig. a. dem Büschel Bz in Fig. b. Die Büschel M und B in Fig. b. sind homographisch im weiteren Sinne und liegen perspectivisch, weil sie die Gerade MB und den Kreis erzeugen. Da nun das Büschel Az congruent mit Bz (in Fig. a.) ist, so ist auch Büschel AP homographisch mit Büschel Bz (in Fig. a.) oder, was dasselbe ist, mit Büschel BP. Die 2 homographischen Büschel AP und BP liegen aber in schiefer Lage, weil sie die Gerade AB nicht entsprechend gemein haben, mithin erzeugen sie durch die Durchschnitte entsprechender Strahlenpaare eine Curve dritter Ordnung.

Diese Art synthetischer Betrachtung führt zu einer andern Methode analytischer Behandlung. Nämlich die Gleichungen des Strahls BP und AP respective können dargestellt werden in der Form:

$$\begin{cases} (x-r) - \lambda y = o \\ (x+r) - \mu y = o, \end{cases}$$

wo $\lambda = \text{tang.}\, 2\varphi$ und $\mu = \frac{1}{\text{tang.}\, \varphi}$, so dass man nach einer leichten trigonometrischen Betrachtung erhält:

$$\lambda = \frac{2\mu}{\mu^2 - 1}.$$

Wenn man in der ersten Gleichung die Veränderliche λ mittelst dieser Gleichung durch μ ausdrückt, so erhält man die Gleichungen zweier Geraden, in denen die Coëfficienten der einen eine Veränderliche μ im zweiten Grade enthält, und die Coëfficienten der andern Linie dieselbe Veränderliche μ im ersten Grade. Sucht man jetzt die Coordinaten des Schnittpunktes beider Geraden, so verhalten sich die homogenen Coordinaten desselben wie 3 Functionen von μ vom dritten Grade. Mithin ist der Ort des Schnittpunktes eine Curve der dritten Ordnung. Denn allgemein liegt der Punkt xyz auf einer Curve n^{ter} Ordnung, wenn seine homogenen Coordinaten sich verhalten wie 3 Functionen n^{ten} Grades einer Veränderlichen μ. Unser Beispiel liefert als Gleichung der Curve:

$$x : y : z = -r(\mu^3 - \mu) : 2r(\mu^2 - 1) : (\mu^3 + \mu).$$

Besonders einfach wird die Lösung, wenn die beiden festen Punkte B und C auf einem Durchmesser des Kreises A liegen.

Die Fig. 7. möge die Gleichgewichtslage bezeichnen. Dann ist der Strahl PA^1 Tangente an P, wenn er der vierte harmonische zu PA conjugirte Strahl ist. Man hat also nur zu den 3 Punkten BAC den vierten zu A conjugirten harmonischen Punkt A^1 zu construiren, und über AA^1 als Durchmesser einen Kreis zu beschreiben. Die Schnittpunkte desselben mit dem Kreise A liefern die beiden Gleichgewichtslagen.

Schliesslich möge noch eine andere analytische Lösung der allgemeinen Aufgabe hier Platz finden.

Man kann B und C als die Brennpunkte einer Ellipse auffassen und diejenige Ellipse suchen, welche B und C zu Brennpunkten hat und den gegebenen Kreis A berührt. Wenn die Ellipse auf ihre Hauptaxen bezogen wird, so ist ihre Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o \tag{15}$$

und die Gleichung des gegebenen Kreises ist

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = o.$$

Die Bedingung der Berührung beider Curven ist

$$o = \begin{vmatrix} x - \alpha, & y - \beta \\ \frac{x}{a^2}, & \frac{y}{b^2} \end{vmatrix} \text{ oder} \tag{16}$$

$$\frac{y\,(x - \alpha)}{x\,(y - \beta)} = \frac{b^2}{a^2}, \tag{17}$$

oder wenn λ einen noch unbestimmten Factor bezeichnet:

$$\left.\begin{array}{l} yx - \alpha y = \lambda b^2 \\ yx - \beta x = \lambda a^2 \end{array}\right|,$$

woraus durch Subtraction

$$\alpha y - \beta x = \lambda\,(a^2 - b^2) = \lambda c^2,$$

wenn c die gegebene Excentricität bezeichnet; also

$$\lambda = \frac{\alpha y - \beta x}{c^2}; \tag{18}$$

bestimmt man mit Hülfe des für λ gefundenen Ausdrucks a^2 und b^2 und setzt ihre Werthe in die Gleichung (15) der Ellipse ein, so erhält man nach einiger Reduction die Gleichung der Curve dritten Grades:

$$[x\,(x-\alpha) + y\,(y-\beta)]\,[\alpha y-\beta x] = c^2\,(x-\alpha)\,(y-\beta); \tag{19}$$

diese Curve schneidet einen beliebigen Kreis in höchstens 4 Punkten. Denn man kann in dem einen Factor der linken Seite die Grösse $x^2 + y^2$ durch einen linearen Ausdruck aus der Kreisgleichung ersetzen. Dann wird die Gleichung (19) vom zweiten Grade und bedeutet also einen Kegelschnitt, welcher durch die Schnittpunkte des Kreises mit der Curve (19) geht. Dieser Kegelschnitt ist eine Hyperbel, weil die Determinante aus den Coëfficienten des Gliedes zweiter Ordnung negativ ist, nämlich

$$-\alpha^2\beta^2-\left(\frac{-c^2+\alpha^2-\beta^2}{2}\right)^2<o.$$

Für den besondern Fall, auf welchen sich die Gleichungen (12) und (13) beziehen, erhält man statt der Hyperbel die Gleichung einer Parabel

$$y^2+\frac{r^2}{2\alpha}x=o,$$

wenn man nämlich den Werth für $(x+\alpha)^2$ aus (13) in (12) einsetzt. Diese Parabel hat zur Axe den Durchmesser AB und zum Scheitel den Punkt B. Der Kreis A liegt also symmetrisch zu der Axe der Parabel.

Wenn man die ursprüngliche Aufgabe dahin verallgemeinert, dass statt des Kreises A eine beliebige Curve $f(xy)=o$ gegeben ist und man soll die berührende Ellipse suchen, deren Brennpunkte B und C gegeben sind, so erhält man als Bedingung der Berührung

$$\begin{vmatrix} f'(x), & f'(y) \\ \frac{x}{a^2}, & \frac{y}{b^2} \end{vmatrix} = o, \text{ oder}$$

$$\frac{pf'(x)}{b^2}-\frac{xf'(y)}{a^2}=, \text{ oder}$$

$$\left.\begin{aligned} yf'(x) &= \lambda b^2 \\ xf'(y) &= \lambda a^2 \end{aligned}\right\}, \text{ woraus durch Subtraction}$$

$$xf'(y)-yf'(x)=\lambda c^2, \text{ also:}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a^2} &= \frac{xf'(y)-yf'(x)}{c^2xf'(y)} \\ \frac{1}{b^2} &= \frac{xf'(y)-yf'(x)}{c^2yf'(x)} \end{aligned}\right| \begin{aligned} x^2 \\ y^2 \end{aligned}$$

woraus durch Multplication mit den zur Seite stehenden Factoren und Addition folgt:

$$1=\frac{xf'y-yf'x}{c^2}\left(\frac{x}{f'(y)}+\frac{y}{f'(y)}\right), \text{ oder}$$

$$c^2f'(x)f'(y)=[xf'(y)-yf'(x)]\,[xf'(x)+yf'(y)]. \quad (20)$$

Die Schnittpunkte dieser Curve mit der Curve $f(xy) = o$ ergeben die Berührungspunkte der gesuchten Ellipse.

Die Curve (20) kann jedoch allgemein durch eine andere ersetzt werden, deren Grad um eine Einheit niedriger ist. Nach einem Satze über homogene Functionen ist nämlich

$$xf'(x) + yf'(y) + f_{n-1} = nf(xy),$$

wo f_{n-1} eine bestimmte leicht zu bildende Function vom Grade $n-1$ ist. Da nun $f = o$ die Gleichung der gegebenen Curve ist, so kann der Ausdruck $xf'(x) + yf'(y)$ in Gleichung (20) ersetzt werden durch $-f_{n-1}$. Dadurch erhält man aus (20) eine Gleichung vom Grade $2n-1$. Der Schnitt dieser Curve mit der Curve $f = o$ liefert also im Allgemeinen $n(2n-1) = 2n^2-n$ Berührungspunkte auf der Curve $f = o$. Es giebt also im Allgemeinen $2n^2-n$ Ellipsen, welche der Forderung genügen.

Nimmt man beispielsweise für die Curve f eine Gerade

$$y - \alpha x = b, \tag{21}$$

so erhält man als Curve, auf welcher die Berührungspunkte liegen, eine gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung ist:

$$(x + \alpha y)\ (-\alpha x + y) + c^2\alpha = o \tag{22}$$

Führt man für $y-\alpha x$ den Werth b aus (21) ein, so erhält man die Gleichung einer Geraden:

$$x + \alpha y + \alpha\,\frac{c^2}{b} = o$$

$$\text{oder } y = -\frac{1}{\alpha}\,x - \frac{c^2}{b} = o,$$

eine leicht zu construirende Gerade, welche die gegebene Gerade (21) in dem gesuchten Berührungspunkte schneidet.

Fig. 7. Die synthetische Construction der gleichseitigen Hyperbel ergiebt sich, wenn man den Mittelpunkt A des in der ursprünglichen Aufgabe gegebenen Kreises nach irgend einer Richtung ins Unendliche rücken lässt. Dann geht das involutorische Strahlsystem mit dem Mittelpunkte A in ein System paralleler involutorischer Geraden über, welche also sämmtlich senkrecht stehen auf der Geraden L, deren Gleichung (21) ist. Irgend ein Paar dieses Parallelbüschels schneidet den zugehörigen Kreis K des homographischen Kreisbüschels in 2 Punkten P und Q, welche mit dem Mittelpunkte von K auf einer Geraden liegen, oder anders ausgesprochen, in den Endpunkten eines Durchmessers.

Nimmt man irgend 2 Kreise der Schaar mit den Mittelpunkten O und O_1, so folgt aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke $\Delta\, OPR \backsim O_1P_1R_1$, dass die Sehnen PQ der Curve alle einander parallel sind. Sie werden sämmtlich von der gegebenen Geraden BC halbirt, also ist BC ein Durchmesser der Curve und mithin ist M, der Mittelpunkt des involutorischen Punktsystems (BC), auch Mittelpunkt der Curve. In den Punkten B und C fallen je 2 Punkte PQ zusammen, also ist die in C oder in B Parallele zu PQ Tangente der Curve, also B und C die Endpunkte des Durchmessers. Die Potenzlinie MY ist die eine Grenze des Kreisbüschels, mithin geht das von M auf L gefällte Perpendikel nach dem einen unendlich fernen Punkte der Curve, und die in M mit L Parallele nach dem anderen. Die beiden letzteren Geraden sind also die zu einander rechtwinkligen Asymptoten.

Dass die Curve eine gleichseitige Hyperbel ist zeigt Figur 8 b.

Es seien B, C (Fig. 8 b) dieselben Curvenpunkte wie vorher, P und P_1 2 beliebige andere Punkte und $PR \parallel P_1R_1$ die halbirenden der Winkel der Leitstrahlen von B und C aus, dann erhält man an $\Delta\ PB_1P$

$$\angle\, \alpha + \varepsilon = \varphi_1 + \alpha_1 + \varepsilon\,, \quad \text{und an } \Delta\ CP_1P$$

$$\angle\, \alpha - \varepsilon = \varphi + \alpha^1 - \varepsilon$$

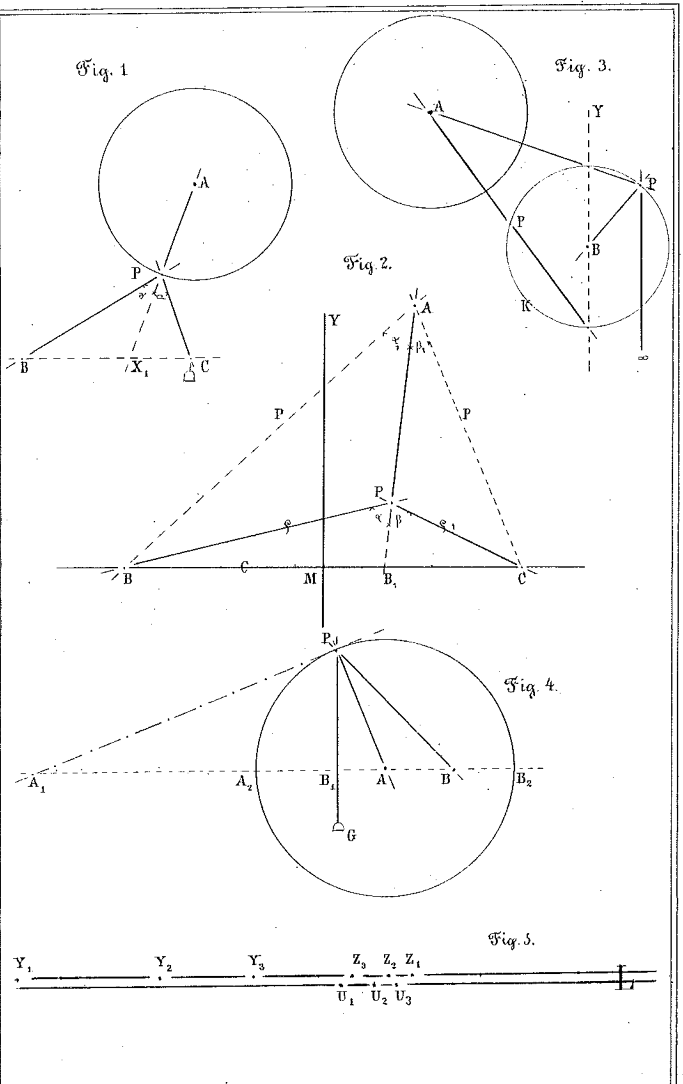
woraus $\alpha = \varphi + \alpha_1$

$$\alpha = \varphi + \alpha_1\,,$$

also $\varphi = \varphi_1$

d. h. die veränderlichen Strahlen CP und BP bilden 2 Strahlbüschel mit den Centren B und C, welche congruent und ungleichdrehend sind, also ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine gleichseitige Hyperbel. Aus den obigen Bemerkungen geht noch der Satz hervor:

Bewegt sich der Scheitel eines rechten Winkels auf einem gleichseitigen Hyperbel so, dass seine Schenkel immer dem Asymptotenpaar parallel sind, so zeichnen die beiden Schenkel auf jedem Durchmesser im Allgemeinen ein hyperbolisches Punktsystem. Und ferner: Wenn man die Schenkel des rechten Winkels in irgend einer Lage festhält, und sie als die Halbirenden irgend eines Winkels mit dem gleichen Scheitel betrachtet, so schneiden die Schenkel des letzteren die gleichseitige Hyperbel immer in den Endpunkten eines Durchmessers.



Eggers stat. Aufgb.

Fig. 6.

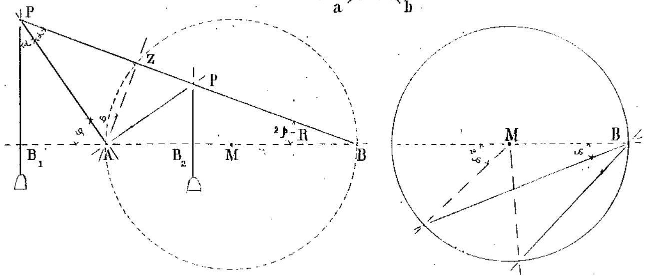


Fig. 7.

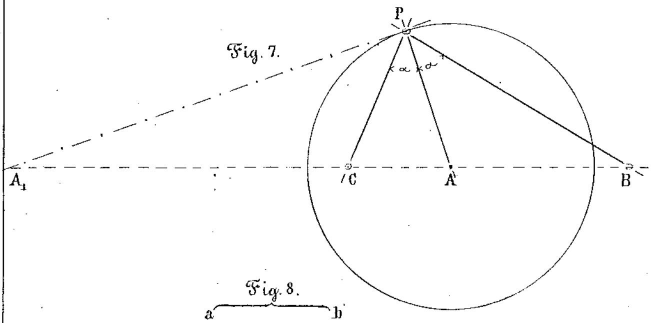
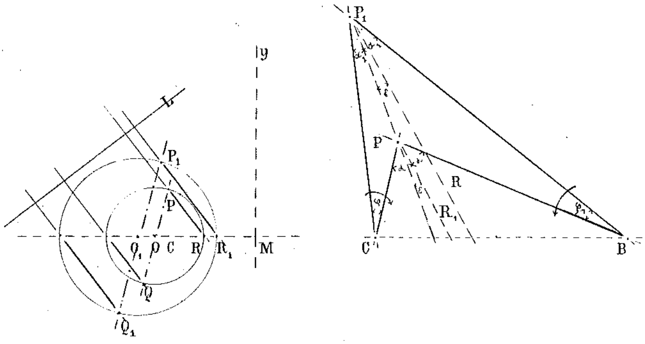


Fig. 8.



Eggers stat. Aufgb.