Ueber eine besondere Art cyclischer Curven.

Von

Prof. Dr. H. Durège.

Unter den Curven, welche durch das Rollen eines Kreises auf oder in einem andern Kreise erzeugt werden, und die man im Allgemeinen unter dem Namen Cycloiden im weitern Sinne begreift, verdient eine besondere Art, nämlich die, bei welcher die Entfernung des erzeugenden Punktes vom Mittelpunkte des rollenden Kreises gleich der Entfernung der Mittelpunkte der beiden Kreise ist, in mancher Hinsicht Beachtung. Da diese Curven, so viel mir bekannt ist, nirgend näher untersucht worden sind, und da sie in mehrfacher Weise beim Unterrichte zu Beispielen benutzt werden können, so sollen die folgenden Zeilen ihrer Betrachtung gewidmet sein.

Ich werde die verschiedenen hier vorkommenden Benennungen in demselben Sinne anwenden, wie sie Weissenborn*) gebraucht, nämlich: berühren sich die Kreise von aussen, so heisse die erzeugte Curve Epicycloide; findet aber innere Berührung statt, so werde die Curve Hypocycloide oder Pericycloide genannt, je nachdem der feste oder der rollende Kreis der grössere ist. Liegt ferner der erzeugende Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises,

*) Weissenborn. Die cyclischen Curven. Eisenach 1856.

so heisse die Cycloide eine gemeine; sie werde dagegen verlängert genannt, wenn der erzeugende Punkt ausserhalb des rollenden Kreises liegt, und verkürzt, wenn er innerhalb liegt.*)

1. Da die Natur der hier zu betrachtenden besonderen Art von Cycloiden bei den Hypocycloiden am einfachsten hervortritt, so wollen wir an diese anknüpfen.

Bezeichnen R und r die Radien des festen und des rollenden Kreises, und b die Entfernung des erzeugenden Punktes vom Mittelpunkte des rollenden Kreises, so sind die Gleichungen der Hypocycloide bekanntlich:

$$x = (R-r) \cos \varphi + b \cos \frac{R-r}{r} \varphi$$

$$y = (R-r) \sin \varphi - b \sin \frac{R-r}{r} \varphi.$$

Dabei ist der Anfangspunkt der Coordinaten der Mittelpunkt C des festen Kreises, und die positive Abscissenaxe diejenige Richtung der Verbindungslinie der Mittelpunkte C des festen und c des rollenden Kreises, bei welcher der erzeugende Punkt auf diese Verbindungslinie fällt. Da dies in zwei verschiedenen Fällen eintreten kann, so soll ferner festgesetzt werden, dass die positive Abscissenaxe diejenige Richtung sei, bei welcher der erzeugende Punkt, von c aus gerechnet, auf der entgegengesetzten Seite liegt, wie C.

*) Magnus (Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. Berlin 1833) begreift die Pericycloiden mit unter dem Namen der Hypocycloiden und nennt die Cycloide, wenn der erzeugende Punkt ausserhalb des rollenden Kreises liegt, verkürzt oder verschlungen, wenn er dagegen innerhalb liegt, gedehnt oder geschweift.

Der Winkel φ ist dann die Neigung der Geraden Cc gegen die positive Abscissenaxe. In den Lehrbüchern findet man bei der Epicycloide und Pericycloide gewöhnlich die andere der beiden möglichen Lagen von Cc als positive Abscissenaxe angenommen, indem festgesetzt wird, dass der erzeugende Punct, von c aus gerechnet, auf derselben Seite liegen soll, wie der Berührungspunct der beiden Kreise, was bei der Hypocycloide mit unserer Annahme übereinstimmt, bei den anderen aber nicht; hier erscheint es zweckmässiger, die positive Abscissenaxe so zu wählen, wie es angegeben worden ist, um alle Fälle unter eine gemeinsame Gleichung zusammenfassen zu können.

Der zu betrachtende besondere Fall tritt nun ein, wenn man

$$b = R - r$$

setzt, dann gehen die obigen Gleichungen in folgende über

$$x = 2(R-r)\cos\frac{R}{2r}\varphi\cos\frac{2r-R}{2r}\varphi$$

$$y = 2(R-r)\cos\frac{R}{2r}\varphi\sin\frac{2r-R}{2r}\varphi.$$

Führt man ferner Polarcoordinaten ϱ und ϑ ein, indem man

$$\frac{2r-R}{2r}\varphi = \vartheta \quad , \quad x^2 + y^2 = \varrho^2$$

und ausserdem zur Abkürzung

$$\frac{R}{2r-R} = m \quad , \quad 2(R-r) = a$$

setzt, so erhält man für die in Rede stehenden speciellen Hypocycloiden die einfache Polargleichung:

(I) $$\varrho = a\cos m\vartheta$$

2. Es soll nun besonders der Fall in's Auge gefasst werden, dass die Radien R und r ein rationales Verhältniss haben, wodurch auch m eine rationale Zahl wird. Dann weiss man, dass die Cycloiden stets geschlossene Curven sind. Da nun in unserem Falle der beschreibende Kreis (d. h. der mit dem Radius $b=R-r$ um c beschriebene Kreis) sets durch den Mittelpunct C des festen Kreises geht, und da ferner jedes Mal, wenn der rollende Kreis eine ganze Umdrehung vollendet hat, der erzeugende Punct seinen grössten Abstand von C erreicht, also $\varrho=\pm a$ wird, so sieht man, dass die Curve einen Stern bildet, der aus einer gewissen Anzahl von congruenten Strahlen oder Blättern besteht, die im Puncte C zusammenstossen. Wegen dieser Gestalt wollen wir die besondere Art von Cycloiden, die wir hier betrachten, kurz sternförmige Cycloiden nennen. Freilich geht in vielen Fällen, wenn die Blätter sich sehr ausbreiten, das sternförmige Ansehen verloren, wir wollen aber auch dann diese Bezeichnung der Kürze wegen beibehalten.

Um ein Beispiel zu haben, sei $R=5$, $r=3$; dann findet sich

$$\vartheta=\frac{1}{6}\varphi, \qquad m=5, \qquad a=4,$$

und die Curve bildet einen aus 5 vollkommen gleichen Blättern bestehenden Stern. (Siehe Fig. 1.)

Die erste Frage, die sich hier darbietet, ist die, wie man aus der Zahl m die Anzahl der Blätter bestimmen kann, welche die Curve zusammensetzen.

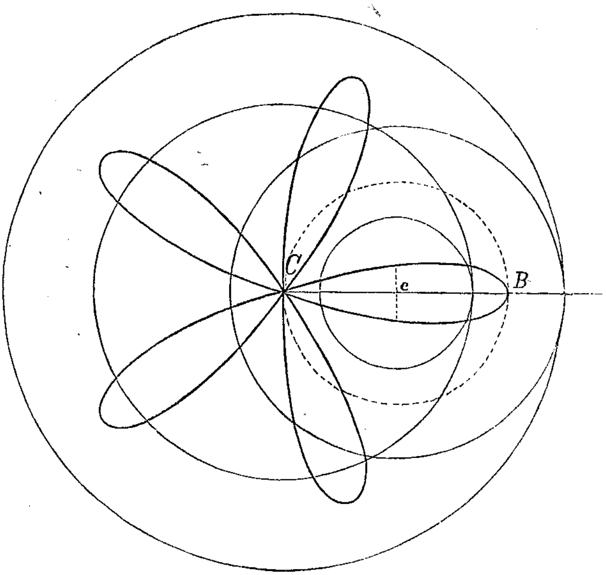
Nehmen wir zuerst an, m sei eine ganze Zahl. Es wird

$$\varrho=\pm a,$$

wenn

$$\vartheta=o, \frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \frac{3\pi}{m}, \; \ldots\ldots\ldots \; \frac{k\pi}{m},$$

Fig. 1.



und zwar

$$\varrho = + a, \text{ wenn } k \text{ eine gerade Zahl}$$
$$\varrho = - a, \text{ wenn } k \text{ eine ungerade Zahl,}$$

und jedem Werthe von k entspricht ein Blatt der Curve. Wenn nun $k = m$ ist, so wird $\vartheta = \pi$, $m\vartheta = m\pi$. Wenn daher m eine ungerade Zahl ist, so wird $\varrho = - a$, der erzeugende Punkt kommt also in seine anfängliche Lage zurück, und die Curve ist geschlossen. Die Anzahl ihrer Blätter ist also dann gleich m. Ist aber m eine gerade Zahl, so wird für $\vartheta = \pi$, $\varrho = + a$, der erzeugende Punct liegt also dann seiner anfänglichen Lage diametral gegenüber. Der rollende Kreis muss daher noch einmal m Umläufe vollenden, ehe die Curve sich schliesst, und folglich ist diese dann aus $2m$ Blättern zusammengesetzt. Man erhält also

m Blätter, wenn m eine ungerade Zahl
$2m$ Blätter, wenn m eine gerade Zahl.

Auf dieselbe Weise könnte man auch die Anzahl der Blätter finden, wenn m ein rationaler Bruch ist; man kommt aber noch leichter auf folgende Art zum Ziel. Drückt man das Verhältniss $\frac{r}{R}$ durch die kleinsten Zahlen aus, so giebt bekanntlich der Nenner R die Anzahl der Umläufe an, welche der rollende Kreis machen muss, bis die Curve sich schliesst. Setzt man nun

$$m = \frac{z}{n} \text{ (z Zähler, n Nenner)}$$

und bringt diesen Bruch auf seine kleinste Benennung, so folgt aus der Gleichung

$$m = \frac{z}{n} = \frac{R}{2r - R}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{z + n}{2z}.$$

Der Nenner dieses Bruches, wenn dieser auf seine kleinste Benennung gebracht ist, giebt sogleich die Anzahl der Umläufe des rollenden Kreises, also auch die Anzahl der Blätter an. Sind nun aber z und n beide ungerade, so ist $z + n$ gerade, also lässt sich der Bruch durch 2 heben und die Anzahl der Blätter ist z; ist dagegen von z und n einer ungerade und der andere gerade, so ist $z + n$ ungerade, der Bruch lässt sich daher dann nicht weiter heben, und die Anzahl der Blätter ist $2z$. Hieraus ergiebt sich, dass die Anzahl der Blätter hauptsächlich von dem Zähler des Bruches m abhängt, von dem Nenner nämlich nur in so fern, als derselbe gerade oder ungerade ist, und man erhält folgende Regel: sind in $m = \frac{z}{n}$

z und n gleichartig (beide ungerade), so hat die Curve z Blätter,

z und n ungleichartig (nur einer ungerade), so hat die Curve $2z$ Blätter.

Zum Beispiel:

für $m = 5$	besteht	die	Curve	aus	5	Blättern
» $m = 4$	»	»	»	»	8	»
» $m = \frac{5}{3}$	»	»	»	»	5	»
» $m = \frac{5}{2}$	»	»	»	»	10	»

3. Für den hier zuerst betrachteten Fall einer sternförmigen Hypocycloide kann m sowohl positiv wie auch negativ ausfallen, ist aber stets numerisch grösser als 1. Dies erhellt sofort, wenn man den Ausdruck für m in den Formen

$$m = \frac{R}{2r - R} = \frac{R}{R - 2(R - r)} = -\frac{R}{R - 2r}$$

schreibt; denn hier ist $R - r$ positiv; ist also nun $R > 2(R - r)$ so ist m positiv und grösser als 1; ist aber $R < 2(R - r)$, so ist zugleich $R > 2r$, also m negativ und wieder numerisch grösser als 1.

Im ersteren Falle (m positiv) ist $R < 2r$, $R - r < r$, also die Hypocycloide eine verkürzte; im zweiten Falle (m negativ) ist dagegen $R - r > r$, also die Hypocycloide eine verlängerte.

Man kann hiernach, wenn $m > 1$ und ausserdem auch a gegeben ist, die durch die Gleichung (I)

$$\varrho = a \cos m \vartheta$$

bestimmte Curve stets als eine Hypocycloide ansehen und findet die dieselbe erzeugenden Kreise aus den Gleichungen

$$2(R - r) = a, \qquad \frac{R}{2r - R} = m,$$

aus welchen

$$R = \frac{m}{m-1} a, \qquad 2r = \frac{m+1}{m-1} a \tag{1}$$

folgt. Diese Hypocycloide ist eine verkürzte, wenn m positiv ist; allein, wie die Gleichung (I) zeigt, bleibt die Curve dieselbe, wenn man der Zahl m das entgegengesetzte Zeichen giebt; man kann daher die nämliche Curve auch als eine verlängerte Hypocycloide ansehen, und bezeichnen R' und r' die Radien der sie erzeugenden Kreise, so erhält man, wenn man in (1) $-m$ statt m setzt,

$$R' = \frac{m}{m+1} a \qquad 2r' = \frac{m-1}{m+1} a. \tag{2}$$

Hieraus geht hervor, dass für die sternförmigen Hypocycloiden derselbe Satz gilt, der sonst nur für gemeine Hypocycloiden richtig ist, dass nämlich jede Hypocycloide auf zwei Weisen durch verschiedene Paare von Kreisen erzeugt werden kann.*)

Für die Beziehung zwischen den Radien R, r und R', r' der beiden Kreispaare ergibt sich leicht

$$\frac{r}{R} + \frac{r'}{R'} = 1;$$

ausserdem auch

*) Siehe u. a. Magnus, pag. 311.

$$(R-r)^2=(R'-r')^2=rr'; \qquad \frac{R}{R'}=\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r'}},$$

die gemeinschaftliche Differenz $R-r$ oder $R'-r'$ ist also die mittlere Proportionale aus den Radien der rollenden Kreise, und diese selbst verhalten sich wie die Quadrate der Radien der festen Kreise. Man hat hiernach folgenden Satz:

Jede sternförmige verkürzte Hypocycloide ist gleich einer sternförmigen verlängerten Hypocycloide; zwischen ihren Radienpaaren bestehen die Beziehungen

$$R-r=R'-r' \text{ und } \frac{r}{R}+\frac{r'}{R'}=1.$$

Für die oben angeführten Beispiele erhält man folgende Zahlenwerthe:

m	$\frac{r}{R}$	R	r	$\frac{r'}{R'}$	R'	r'	
5	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{4}a$	$\frac{3}{4}a$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{6}a$	$\frac{2}{6}a$	5 Blätter
4	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{6}a$	$\frac{5}{6}a$	$\frac{3}{8}$	$\frac{8}{10}a$	$\frac{3}{10}a$	8 »
$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{2}a$	$\frac{4}{2}a$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{8}a$	$\frac{1}{8}a$	5 »
$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{10}{6}a$	$\frac{7}{6}a$	$\frac{3}{10}$	$\frac{10}{14}a$	$\frac{3}{14}a$	10 »
	verkürzte Hypocycloide $R-r=\frac{1}{2}a$			verlängerte Hypocycloide $R'-r'=\frac{1}{2}a$			

Für das erste dieser Beispiele sind in Fig. 1 beide Paare von Kreisen angedeutet worden.

4. Wenn m numerisch kleiner als 1 ist, kann man die Curve nicht mehr als eine Hypocycloide ansehen, vielmehr ist sie dann eine Epicycloide oder Pericycloide. Beachtet man, was oben über die Wahl der positiven Abscissenaxe gesagt ist, so kann man leicht, ebenso wie es bei der Hypocycloide geschehen ist, auch aus den bekannten Gleichungen der Epicycloide und Pericycloide, wenn diese sternförmig sind, wieder die obige Gleichung:

$$\varrho = a \cos m \vartheta$$

ableiten. Es ist dies aber nicht einmal erforderlich, da man leicht übersieht, was man zu ändern hat, wenn die Hypocycloide sich in eine Epicycloide oder Pericycloide verwandelt. Bei der ersten geht vermöge der angenommenen Lage der Abscissenaxe nur r in $-r$ über. Dann wird

$$m = -\frac{R}{R+2r}$$

also stets negativ und numerisch kleiner als 1. Bei der Pericycloide hat man nur zu beachten, dass $r > R$, also $r - R$ positiv ist, daher ist bei dieser

$$m = \frac{R}{R+2(r-R)}$$

immer positiv und kleiner als 1. Man kann also eine durch die Gleichung $\varrho = a \cos m \vartheta$ gegebene Curve, wenn darin m kleiner als 1 ist, zuerst als eine Pericycloide ansehen, und erhält die Radien aus den Gleichungen (1), wenn man nur beachtet, dass jetzt $a = 2(r - R)$ zu setzen ist, und demgemäss in diesen Gleichungen a in $-a$ umwandelt; also

$$R = \frac{m}{1-m}\,a \qquad 2\,r = \frac{1+m}{1-m}\,a$$

Diese Pericycloide ist stets verkürzt, da $r - R$ immer kleiner als r ist. Da aber die Curve wieder dieselbe bleibt, wenn m das Zeichen ändert, so kann sie zweitens auch als eine Epicycloide angesehen werden; die Radien für dieselbe ergeben sich aus (2), wenn man darin $-r'$ statt r' setzt, also

$$R' = \frac{m}{1+m}\,a \qquad 2\,r' = \frac{1-m}{1+m}\,a;$$

und diese Epicycloide ist immer verlängert, da $R' + r'$ grösser als r' ist. Die Beziehungen zwischen den Radienpaaren sind hier dieselben wie oben, nur die Gleichung $\frac{r}{R} + \frac{r'}{R'} = 1$ geht in die folgende

$$\frac{r}{R} - \frac{r'}{R'} = 1$$

über. Es gilt daher auch hier der im Allgemeinen nur bei gemeinen Cycloiden stattfindende Satz, dass jede Pericycloide als Epicycloide angesehen werden kann:

Jede sternförmige (verkürzte) Pericycloide (R, r) ist gleich einer sternförmigen (verlängerten) Epicycloide (R', r'); zwischen ihren Radienpaaren bestehen die Beziehungen

$$r - R = r' + R' \quad \text{und} \quad \frac{r}{R} - \frac{r'}{R'} = 1.$$

Nimmt man für m die reciproken Werthe der oben als Beispiele benutzten Zahlen, so erhält man folgende Werthe:

m	$\frac{r}{R}$	R	r	$\frac{r'}{R'}$	R'	r'	
$\frac{1}{5}$	3	$\frac{1}{4}a$	$\frac{3}{4}a$	2	$\frac{1}{6}a$	$\frac{2}{6}a$	1 Blatt
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{6}a$	$\frac{5}{6}a$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{10}a$	$\frac{3}{10}a$	2 Blätter
$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}a$	$\frac{4}{2}a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}a$	$\frac{1}{8}a$	3 »
$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{4}{6}a$	$\frac{7}{6}a$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{14}a$	$\frac{3}{14}a$	4 »
	verkürzte Pericycloide $r-R=\frac{1}{2}a$			verlängerte Epicycloide $r'+R'=\frac{1}{2}a$			

In Fig. 2 ist die dem Werthe $m=\frac{3}{5}$ entsprechende Curve dargestellt, und beide Kreispaare, welche diese Curve erzeugen können, angedeutet worden.

5. Eine sternförmige Cycloide besteht, wie wir gesehen haben, aus einer (im Falle eines rationalen Verhältnisses zwischen R und r stets endlichen, sonst unendlich grossen) Anzahl einander vollkommen gleicher Blätter; untersuchen wir nun noch den Inhalt und den Umfang eines solchen Blattes.

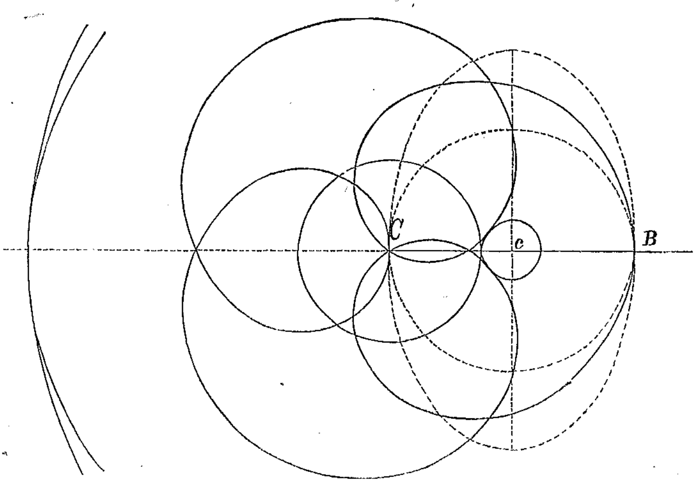
Da die Hälfte des ersten Blattes beschrieben wird, wenn ϑ von o bis $\frac{\pi}{2m}$ wächst, so wird der Inhalt eines Blattes angegeben durch den Ausdruck

$$a^2\int_o^{\frac{\pi}{2m}} \cos^2 m\,\vartheta\, d\,\vartheta$$

oder entwickelt

$$\frac{a^2\pi}{4m}.$$

Fig. 2.



Nun ist aber $\frac{a^2\pi}{4}$ der Inhalt des Kreises, dessen Durchmesser a, dessen Radius also resp. $R-r$, $r-R$, $R+r$ ist, je nachdem man es mit einer Hypocycloide, Pericycloide oder Epicycloide zu thun hat. Dieser (der beschreibende) Kreis geht immer durch den Anfang und das Ende des Blattes. Ist daher $m>1$, so liegt das Blatt ganz innerhalb dieses Kreises und bildet den m^{ten} Theil desselben, ist aber $m<1$, so wird der Kreis von dem Blatte umschlossen, und dieses ist das $\frac{1}{m}$ fache des Kreises.

Der Umfang eines Blattes wird ausgedrückt durch

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2m}} \sqrt{\varrho^2+\frac{d\varrho^2}{d\vartheta^2}}\cdot d\vartheta = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2m}} \sqrt{\cos^2 m\vartheta+m^2\sin^2 m\vartheta}\, d\vartheta.$$

Setzt man nun zuerst, wenn $m>1$,

$$m\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

so erhält man

$$2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\varphi + m^2\cos^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{m} = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{m^2-1}{m^2}\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Dieses Integral ist das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung für den Modul $\frac{\sqrt{m^2-1}}{m}$, also ist der Umfang des Blattes dem einer Ellipse gleich, deren grosse Axe $= a$, und deren numerische Excentricität $= \frac{\sqrt{m^2-1}}{m}$ ist. Die kleine Axe dieser Ellipse ergibt sich daraus $\frac{a}{m}$.

Ist zweitens $m < 1$, so setze man

$$m\vartheta = \varphi,$$

dann erhält man für den Umfang des Blattes den Ausdruck

$$2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2\varphi + m^2\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{m} = 2\frac{a}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(1-m^2)\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

und dieser ist gleich dem Umfange einer Ellipse mit der grossen Axe $\frac{a}{m}$ und der Excentricität $\sqrt{1-m^2}$, woraus die kleine Axe $= a$ folgt. Also ist in allen Fällen der Umfang eines Blattes gleich dem Umfange der Ellipse, welche die Linie a (CB. Fig. 1 und 2) zur einen Axe und $\frac{a}{m}$ zur zweiten Axe hat.

Da endlich der Inhalt dieser Ellipse $= \frac{a^2\pi}{4m}$ ist, so sieht man, dass dieselbe nicht allein dem Umfange, sondern auch dem Inhalte nach dem Blatte der Curve gleich ist.