gefärbte Naturselbstdrücke zurück. Die wässerige Lösung zeigt Dichroïsmus. Das durchfallende Licht ist roth, das reflectirte grün.*) Besonders schön ist die Erscheinung, wenn die Sonne auf die Lösung scheint oder gar ihre Strahlen mittelst einer Sammellinse in die Flüssigkeit gelenkt werden. Der Fluorescenzkegel hat dann ganz Farbe und Glanz der Flügeldecken eines Goldkäfers oder einer spanischen Fliege. Auch des Nachts beim Oellicht ist die Fluorescenz wahrnehmbar, nur muss in diesem Falle die Linse angewendet werden.

Betrachtungen über verschiedene Gegenstände, die in Herrn Hug's „Mathematik in systematischer Behandlungsweise" vorkommen.

Von

L. Schläfli.

Die Elemente der Mathematik sind durch die Arbeit vieler Jahrhunderte entstanden; und die Anwendung manches Grundbegriffs ist dessen klarer Definition lange vorangegangen. Das Ganze nun, was im Laufe der Zeit aus tausenderlei Gedankenverbindungen, die wir nicht mehr verfolgen können, und die auch jetzt für uns grossentheils werthlos wären, hervorgegangen und durch geschichtliche Vermittlung zu unserer Kenntniss gelangt ist, für den Zweck des Unterrichtes zu sichten, noch einmal durchzudenken und so darzustellen, als wäre es in einem Guss aus der Seele des

---

*) Ebenso verhält sich bekanntlich eine Lösung von Orseille, umgekehrt dagegen Chlorophylllösung.

Verfassers durch die naturgemässeste Verkettung von Schlüssen neu entstanden, das ist die Aufgabe dessen, der ein elementares Lehrbuch der Mathematik schreibt. Ich möchte sagen, es sei dem Einzelnen unmöglich, diese Forderung zu erfüllen. Die früheste Aufnahme mathematischer Kenntnisse wird uns auch Vorurtheile zugebracht haben, die mit der Macht der Gewohnheit in uns haften und den freien Blick des Geistes beschränken; es wird dem Einzelnen nur theilweise glücken, das Ueberlieferte im Einklang mit dem fortgeschrittenen Stand der Wissenschaft zu verbessern.

Herr Hug hat daher mit diesem Buche, wie ich glaube, keine leichte Aufgabe unternommen; und es ist leichter, Ausstellungen daran zu machen, als selbst ein solches Werk auszuführen. Doch glaube ich, es sei gut, wenn man sich über elementare Dinge allseitig ausspricht, um so mehr, als man manchen von Herrn Hug vertretenen Ansichten auch anderswo begegnet.

1. Zum Vorwort. Wenn ich die drei Quellen, aus denen die Mathematik schöpfe, richtig verstehe, so sind sie: 1) Begriffsentwicklung, 2) Anforderungen der Praxis, 3) Induction. Dass aus allen drei Quellen, mathematische Gedanken entspringen, dagegen ist nichts einzuwenden, auch nicht dagegen, dass alle drei Quellen für den Unterricht zu benutzen sind. Dass aber die zwei letzten Quellen, etwas dazu sollten beitragen können, fehlende Definitionen oder Beweise zu ersetzen, das vermag ich nicht zu begreifen. Ich will einmal annehmen, man habe in einem concreten Falle, den die Praxis bot, einen Satz gefunden und mittelst concreter Vorstellungen bewiesen. Dann ist nichts weiter nöthig, als diese concreten Vorstel-

lungen in abstracte zu übersetzen; und ein wissenschaftlicher Beweis des Satzes ist da. In concreten Dingen können wir auch nicht anders als mittelst der Vernunftgesetze denken und sobald wir uns dieser bewusst geworden sind, haben wir auch abstrahirt. Ich will dieses an dem Beispiele zeigen, das der Verfasser in der Note S. IV uns vorführt. In dem Augenblick, wo er die Worte ausspricht, „man hat rechts $-mk$ zu unterdrücken, was durch Hinzufügung von mk geschieht," braucht er gerade den Satz, den er beweisen will. Denn unterdrücken ist doch hier subtrahiren und hinzufügen ist addiren. Er sagt also $-(-mk) = mk$. Habe ich nun diesen Satz mittelst Strecken auf einer Geraden begriffen, so habe ich ihn auf ganz gleiche Weise in der Abstraction begriffen. — Wenn der Verfasser am Ende dieser Note es beklagt, dass man noch keine allgemeine Definition der Multiplikation habe, so ist dieses ganz naturgemäss. Weil nämlich der Begriff der Zahl durch verschiedene Stufen hindurch sich entwickelt, so muss auch die Definition der Multiplikation diesen Gang befolgen und kann daher nur stufenweise zu Stande kommen.

2. Ueber die Beziehung zwischen den Operationen und dem Begriff der Zahl.

Die Addition kann nicht definirt werden (S. 5, Z. 1); denn ihr Begriff muss schon da sein, bevor man $1 + 1 + 1$ zu zählen anfängt; er ist weiter als derjenige der positiven ganzen Zahl.

Man kann wohl unter den zählbaren Dingen oder concreten Einheiten wirkliche und ideale unterscheiden und zu jenen alle diejenigen rechnen, welche mittelst Raums, Zeit und der physikalischen Gesetze definirbar sind (S. 2, Z. 17). Der Franken z. B. würde dann eine ideale Einheit, weil der Begriff des Werths nicht physikalisch zu definiren ist; der Fuss dagegen oder der Tag wären wirkliche Einheiten, weil sie in Raum und Zeit vorstellbar sind. Ich kann mir aber keinen Einfluss dieser Unterscheidung auf die reine Mathematik denken und liesse sie daher in einem Lehrbuche bei Seite.

Ich stimme mit dem Verfasser überein, dass die Geometrie, so lange sie mit räumlichen Vorstellungen arbeitet, zur angewandten Mathematik (S. 2, Z. 3) gehöre. Da sie aber ausser den nicht definirbaren oder nicht construirbaren Grundbegriffen der Ebene, der geraden Linie, der Distanz, der Congruenz, der Dreiheit der Dimensionen nichts bietet, das nicht mit grösserer Consequenz und Vollständigkeit in der reinen Mathematik heimisch wäre, so geht sie ganz in dieser auf, sobald man die räumlichen Vorstellungen durch die äquivalenten analytischen ersetzt hat.

Die Zahl ist nothwendig abstract. „Die benannte Zahl" kann nicht buchstäblich verstanden werden, sondern ist nur ein uneigentlicher Ausdruck, der eine Menge von Dingen, also wiederum ein Ding bedeutet, an dem man unter andern Merkmalen eine Zahl abstrahiren kann. Fünf Franken z. B. sind keine Zahl, sondern ein Werth, an dem die Zahl fünf als Merkmal sich findet, wenn man ihn mit dem Werthe eines Frankens vergleicht.

Die inversen Operationen veranlassen zwar **Erweiterungen** des Begriffs der Zahl, brauchen aber nicht die **Definition** des erweiterten Begriffs zu enthalten.

Bei der Addition und Multiplikation hat es freilich noch keine Gefahr, ihre Inversionen geradezu als Definitionen für die negativen und gebrochenen Zahlen zu gebrauchen; aber es ist doch besser, diese noch eigens zu construiren. Sobald Summe und Unterschied unter einen gemeinsamen Begriff, den des Aggregats, gebracht sind, bei dem die Folge einestheils im ursprünglichen additiven, theils im subtractiven Sinne zu fassenden Glieder gleichgültig ist, so ist auch der Begriff der Zahl dahin erweitert, dass er nicht nur die natürlichen, fortan positive ganze Zahlen geheissenen 1, 2, 3, . . ., sondern auch die Null und die negativen ganzen Zahlen umfasst. Nun enthält die Zahl eine Abstraction mehr als auf der natürlichen Stufe. Es wird nämlich nicht bloss von den Dingen, welche gezählt werden, abstrahirt, sondern es wird noch von dem Unbestimmten abstrahirt, zu welchem die Zahl addirt oder von welchem sie subtrahirt werden kann, dafür aber das Addirtwerden oder Subtrahirtwerden in ihre Eigenschaft aufgenommen. Das erste geschieht immer noch, wie ursprünglich, in der Form $+1+1+1$, das zweite aber eigentlich in der Form $-1-1-1$ und erst secundär in der Form $-(1+1+1)$. Aus der Inversion $x+3=5$ geht zwar $x=5-3$ hervor; aber die Definition von -3 unterscheidet sich von dieser Inversion durch die Auffassung der genannten Zahl als $-1-1-1$.

Die durch die Forderung $x+x+x=5$ ausgedrückte Inversion schliesst nicht unmittelbar die Definition des Bruchs x in sich, sondern die Aufgabe muss zuerst auf die Hülfsgleichung $3y=1$ zurückgeführt werden, bei der man sich zufrieden geben muss, die blosse Forderung als Definition hinzunehmen; dann kann man aber x construiren, es ist $x = 5y$, weil $15y = 5 = 3x$ ist.

Durch die Inversion der Addition und Multiplication sind wir zum Begriff der rationalen Zahl geführt worden. Nun können Inversionen, wie sie z. B. in der Aufgabe $xx = 5$ enthalten sind, uns wohl veranlassen, zum Begriff der incommensurablen Zahl überzugehen, enthalten aber an sich nur eine zahllose Menge von Forderungen, die nur das gemein haben, dass sie innerhalb des vorhergehenden Gebiets nicht erfüllt werden können, und die selbst, wenn wir sie mittelst neuer Fictionen einzeln erfüllt hätten, uns doch nicht diejenige allgemeine Vorstellung von der incommensurablen Zahl geben würden, welche wir wirklich haben. An die vorhin schon gemachte Fiction der Stammbrüche anknüpfend, müssen wir vielmehr die endlose Theilbarkeit von 1 fordern, um damit die Vorstellung einer stetig wachsenden Zahl, einer Variablen, hervorzubringen. Die elementarste Darstellung derselben geschieht in der Form $A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$, wo x ein positiver Stammbruch, z. B. $\frac{1}{10}$, und alle Coefficienten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nulle oder positive ganze Zahlen sind, die eine gegebene Grenze a, z. B. 9, nicht überschreiten, während A irgend eine positive rationale Zahl, z. B. eine ganze, sein darf. Dann kann man zeigen, dass der Werth dieser Reihe positiv und kleiner als $A - a + \frac{a}{1-x}$ ist, im besondern, dass jeder endlose Decimalbruch einen endlichen Werth hat; und ferner, dass dieser endliche Werth, wenn der Decimalbruch nicht periodisch ist, d. h. wenn er die Form einer fallenden rationalen geometrischen Reihe nicht annimmt, nicht rational ist. Jetzt erst ist die incommensurable Zahl construirt, und sehen wir die Möglichkeit ein, die Aufgabe $xx=5$ durch einen endlosen Process zu lösen, indem wir x als Variable alle reellen Werthe durchlaufen lassen, haben aber daran blos ein Beispiel, dass es incommensurable Zahlen gibt. Dass eine solche nicht ganz ist, versteht sich; dass sie aber nicht gebrochen sei, möchte ich nicht sagen, weil sie doch durch eine endlose Summe von Brüchen dargestellt wird, oder zwischen zwei rationale Brüche so eng als man nur will eingeschlossen wird. Bloss von einer Zahl zu sprechen, die weder ganz noch gebrochen ist, ist eine rein verneinende Aussage, enthält nicht einmal eine auf die äusserste Spitze getriebene Forderung und würde als Definition auch die imaginäre Zahl in sich schliessen.

Es ist ferner nicht die in irgend einer algebraischen Gleichung mit einer Unbekannten liegende Inversion, die uns, wenn kein reeller Werth der Unbekannten der Gleichung genügt, die Definition der imaginären Zahl geben darf, weil wir ohne Beweis nicht alles für das bisherige Zahlengebiet Unmögliche in ein unterschiedloses Chaos zusammenwerfen sollen, sondern wir beschränken uns auf quadratische Gleichungen, die durch den bekannten Process der Auflösung die Form $(x-a)^2+b^2=0$ annehmen, wo a, b reelle Zahlen bedeuten und ausserdem b von Null verschieden ist. Wegen des zuletzt erwähnten Umstandes dürfen wir mit b^2 dividiren und erhalten, wenn wir $\frac{x-a}{b}=i$ setzen, die einfachere Gleichung $i^2+1=0$. Diese bleibt nun blosse Forderung, ist aber nicht eine vielgestaltige, sondern eine einzige, und hat in dieser Beziehung vor der Forderung oder Fiction der Stammbrüche noch etwas voraus. Wir nehmen, weil wir nicht anders können, diese Forderung als Definition der Zahl i hin und haben dann $x = a + ib$ als eine Lösung der aufgegebenen quadratischen Gleichung. Alle Werthe, die auf diese Form $a + ib$, wo b nicht null ist, gebracht werden können, heissen nun imaginäre Zahlen. Nimmt man den Fall, wo b verschwindet, hinzu, so umfasst die Form den Begriff der Zahl in der Erweiterung, die er bis jetzt erfahren hat. Die Aufgabe $x^{2n} + b^2 = 0$ hingegen, wo n eine positive ganze und b eine beliebige reelle, von Null verschiedene Zahl bedeutet, kann zwar, wenn man n gross genug annimmt, gebraucht werden, um irgend eine gegebene imaginäre Zahl mit einem Fehler, den man so klein machen kann, als man nur will, darzustellen, bestimmt aber diese Zahl nicht, weil sie ausserdem noch $2n - 1$ andere Zahlen darstellt und taugt daher, abgesehen von ihrer grossen Willkür, nicht zu einer Definition. Sie könnte überdiess erst durch eine Reihe von auf die andere Definition gebauten Schlüssen klar gemacht werden.

Die blosse Inversion der Potenz mit ganzem positivem Exponent gibt also weder die Definition der allgemeinen reellen Zahl, noch diejenige der imaginären.

Um die möglichst einfachen Forderungen $x + 1 = 0$, $5y = 1$, etc., $i^2 + 1 = 0$ zu erfüllen, hat man die Zahlen x, y etc. (alle Stammbrüche), i fingirt und ihnen die Namen negative Einheit, Fünftel etc., laterale Einheit gegeben. Jene Forderungen müssen bei ihnen die Stelle der Definitionen vertreten. Sie werden nun freilich wie Dinge gezählt, und zwei derselben (x und i) haben das Wort Einheit in ihrem

Namen; alle aber sind ebensowenig Einheiten, als 7 im Ausdruck $7+7+7+7$ es ist [vrgl. S. 288, (3)]. Der Gebrauch der durch Zählung und Combination aus diesen fictiven Elementen gebildeten Zahlen ist eine Abkürzung für mathematische Aussagen, die sonst mittelst grosser Umschweife auf die natürliche Stufe zurück übersetzt werden müssten.

Ich ergreife diesen Anlass, um gegen die vom Verfasser S. 147 (vrgl. auch S. 295, Z. 3) vertretene Ansicht zu protestiren, dass imaginäre Zahlen auch rational sein können. Weil -1 keine Quadratzahl ist, so ist i irrational, und $7+2i$ ist so gewiss eine irrationale Zahl, als z. B. $3+\sqrt{5}$ eine ist. Will man eine imaginäre Zahl mit ganzen Componenten der Kürze wegen eine ganze imaginäre Zahl nennen, so kann man sich diesen uneigentlichen Ausdruck immerhin erlauben, soll aber keinen falschen Begriff damit verbinden.

Ich muss ferner gegen den ganzen Abschnitt S. 148—156 protestiren. Wenn der Zweck desselben ist, den Gebrauch der imaginären Zahlen zu empfehlen, so ist dieser Zweck lobenswerth. Der Verfasser verspricht auch S. 156 oben diesen Gebrauch in der Geometrie zu machen; aber ich finde im Gegentheil, dass in seiner Behandlung der Geometrie fast gar kein Gebrauch von Imaginären gemacht wird (S. 602, 612 und 613), jedenfalls viel weniger als nach diesem Abschnitt (S. 148—156) zu erwarten war. Die Asymptoten des Kreises und der Ellipse, die an den Kegelschnitt aus seinen Brennpunkten gezogenen Tangenten, die erst die Natur der Brennpunkte ins rechte Licht stellen, z. B. werden mit keinem Worte erwähnt. S. 453 unten wird für das Imaginäre der Ausdruck unmöglich, S. 602 nicht existirend gebraucht, während es S. 148 von den imaginären Zahlen heisst: „sie werden noch jetzt hie und da nicht bloss unmögliche genannt, sondern auch als solche angesehen.“ Wie gesagt, der Zweck des Abschnittes ist lobenswerth, aber seine Ausführung besteht in einer unklaren Vermischung des Begriffs der imaginären Zahl mit einem an sich vortrefflichen Versinnlichungsmittel desselben. Es ist nämlich hier nicht derselbe Fall, wie wenn wir die Addition von 3 und 4 in dem concreten Beispiele von drei Franken und vier Franken ausführen und uns dann bewusst werden, dass der Franken bei dieser Addition unwesentlich ist. Der Punct in der Ebene oder der Strahl, der vom Ursprung aus nach ihm hin geht, ist nicht ein concretes Ding, dessen Grösse in Bezug auf ein homogenes Maass durch eine imaginäre Zahl ausgedrückt wird; dann könnte die Vermischung des Begriffs mit der sinnlichen Anschauung nichts schaden, weil man nur vom Substrat zu abstrahiren hätte, um sogleich die reine Vorstellung zu bekommen; sondern jener Punkt oder Strahl ist nur ein Zeichen (wie ein gesprochenes oder geschriebenes Wort ein Zeichen für eine Vorstellung sein kann) für die imaginäre Zahl, mittelst dessen wir die zwei Componenten derselben allerdings in der ächten concreten Weise anschauen. Ein Ding, an dem ein Begriff verwirklicht ist, dürfen wir diesem substituiren, aber niemals den Schall des Worts, das diesen Begriff bezeichnet. — Der Gipfel der Täuschung scheint mir in folgendem Ausspruch (S. 154) erreicht zu sein:

„Ist nun eine angewandte Aufgabe so allgemein, dass das Gezählte sich nicht in einer Reihe, sondern nur in Reihen von Reihen .... ordnen lässt, und wird diese Aufgabe z. B. durch eine Gleichung gelöst, so sind nicht bloss die reellen, sondern ebenso gut die imaginären Ergebnisse der Gleichung gültige, wirkliche Zahlwerthe, die eine bestimmt existirende Unterlage haben."

Demnach kennt der Verfasser concrete Grössen, deren Maasse nur durch die allgemeine imaginäre Zahl ausgedrückt werden können, und er hätte sich um die Menschheit ein grosses Verdienst erworben, wenn er uns anderen Sterblichen diese Gattung concreter Grössen näher bezeichnet hätte.

Die, S. 152 oben, betrachtete Doppelreihe von Gegenständen führt nicht zum Begriff der imaginären Zahl, sondern zum Begriff eines Paares zusammengehöriger Zahlen, den ich anderswo mit dem Wort Lösung bezeichnet habe, weil je zwei zusammengehörige Werthe der zwei Unbekannten eines aus zwei Gleichungen bestehenden Systems eine Lösung desselben ausmachen. Wie bei einer Gleichung mit einer Unbekannten diese Unbekannte zur Variablen wird, wenn man eine stetige Reihe von Werthen derselben probirt, ob sie die Gleichung befriedigen, so sollte der Lösung eines Systems von Gleichungen in ähnlicher Weise ein allgemeinerer Begriff entsprechen, und aus Mangel eines besondern Wortes behielt ich für diesen allgemeinern Begriff, bei dem vom gegebenen Systeme abstrahirt wird, das selbe Wort Lösung bei. Es hindert uns aber nichts, statt der Doppelreihe auch eine dreifache Reihe u. s. f. zu betrachten; wir haben dann Lösungen, die aus drei, vier oder mehr Elementen bestehen; und dieser Umstand muss es völlig klar machen, dass die erwähnte Betrachtungsweise des Verfassers nicht auf die imaginäre Zahl führt, die ja wesentlich nur zwei Componenten hat.

Ich glaube die Quelle der Unklarheit, an der dieser Abschnitt leidet, darin zu erkennen, dass der Verfasser S. 149 der „angewandten Rechnung“ verstattet, auf die reine Mathematik nicht bloss anregend, sondern auch die Begriffe bestimmend einzuwirken. Daher findet sich wohl diese, im letzten Theile ihres Nachsatzes besonders auffallende Aeusserung: „In jedem Beispiel aber, aus dem kein Ergebniss folgt, das als Zahlgattung mit der Natur des Gezählten sich vereinbaren lässt, ist entweder eine unmöglich zu erfüllende Anforderung festgehalten oder sonst irgend ein anderer Fehler begangen worden.“ *) Da richtige Schlüsse die stete Voraussetzung jeder mathematischen Betrachtung sind, wie kann es dann noch einen andern Fehler geben? Wenn die Werthe der Unbekannten, welche die algebraische Uebersetzung der Aufgabe erfüllen, der wirklichen Natur der angewandten Aufgabe widersprechen, so ist das Beispiel bloss der Phantasie entnommen und hat nie Wirklichkeit gehabt. Einen andern Schluss gibt es nicht, sicher keinen, der die reine Mathematik in Verdacht brächte. Wenn die algebraische Uebersetzung einer angewandten Aufgabe allgemeiner ist

*) Von hier aus ist zu erklären, warum der Verfasser die Betrachtung imaginärer Gebilde nicht in seine Geometrie aufgenommen hat. Der »andere Fehler« erinnert mich an die Stelle S. 183, wo es heisst, »wäre ein gebrochenes Resultat herausgekommen, so hätte man irgendwo einen Rechnungsfehler begangen.« So könnte man jedem bewiesenen Satze die Bemerkung anhängen: »Wäre ein anderer Satz als der vorangestellte herausgekommen, so hätte man in der Beweisführung einen logischen Fehler begangen.“

als diese, so geht das die reine Mathematik nichts an. Für diese gilt nur Folgendes. Wenn ein algebraisches System, in dem keine Theile nothwendige Folgen der übrigen sind, mehr Bedingungen zählt, als verfügbare Zahlen da sind, so ist Widerspruch vorhanden; wenn gleich viele Bedingungen, wie verfügbare Zahlen gegeben sind, so kann das System immer gelöst werden und die Lösungen sind bestimmt; sind wenigere Bedingungen gegeben, als verfügbare Zahlen da sind, so hat das System ein Continuum von Lösungen. Dass dieses streng richtig sei, kann man aber erst einsehen, nachdem man die algebraischen Gleichungen betrachtet hat. Da ich mir diese immer homogen denke, so dass die Unbekannten nur als Verhältnisse der Variabeln auftreten, so erkenne ich in unendlich grossen Werthen der Unbekannten keine Widersprüche.

3. Ueber die Beiwörter absolut und numerisch.

Wenn ich auf einer Geraden von einem Anfangspunkt aus Strecken messe, so steht es mir frei, von beiden entgegengesetzten Richtungen als positive anzunehmen, welche ich will; aber auch die Längeneinheit und die Wahl des Anfangspunktes stehen mir frei. Wenn man also die concrete Vorstellung von der Ortsbestimmung eines Punkts auf einer Geraden mit der abstracten Vorstellung von der Zahl vermischt, so führt dieses nicht nur dahin, dass man sagt, es sei gleichgültig, ob eine Zahl positiv oder negativ sei, sondern man muss dann sagen, es sei gleichgültig, ob sie diese oder jene andere Zahl sei. Soll die concrete Vorstellung von der Ortsbestimmung eines Punkts auf der Geraden der Zahl entsprechen, so müssen der Anfangspunkt, die positive Richtung und die Längeneinheit gegeben sein. Dann erst wird jene Vorstellung zur benannten Zahl und dürfen Schlussfolgerungen, die mit ihr gemacht sind, ohne Weiteres auf die reine Zahl übergetragen werden. Die natürlichen Zahlen sind diejenigen, die jeder zuerst abstrahiren lernt, also die positiven ganzen Zahlen. Wenn sie nämlich im algebraischen Sinne addirt werden, so sind sie auch im natürlichen Sinne addirt, also positiv. Aus der Behauptung des Verfassers (S. 28), „die natürlichen Zahlen sind weder positiv noch negativ, sie sind absolut,“ folgt, dass man zwei natürliche Zahlen nicht zu einander addiren kann. Mit demselben Rechte könnte man sagen, die natürlichen Zahlen seien weder ganz noch gebrochen. Denn wenn ich einen Franken und einen Rappen mit einander vergleiche, so bekomme ich eine ganze Zahl, wenn ich den Rappen, eine gebrochene, wenn ich den Franken als Einheit nehme. Oder bevor wir unendliche Processe angewandt haben, wie z. B. endlose Dezimalbrüche, könnten wir sagen, seien die Zahlen, mit denen wir bis dahin vertraut geworden, weder rational noch incommensurabel; das Richtige ist doch nur, dass wir bis dahin keine Veranlassung hatten, das Beiwort rational zu erfinden.

Den Ausdruck „absolute Zahl“ würde ich nie gebrauchen, sondern ersetzte ihn durch „positive ganze Zahl“ oder „natürliche Zahl“, um dem Missverständniss auszuweichen. Hingegen möchte ich für den Ausdruck „absoluter Werth“ einen erweiterten Gebrauch vorschlagen. Bisher hat man ihn nur von reellen Zahlen gebraucht; der absolute Werth einer positiven Zahl war diese Zahl selbst, derjenige einer negativen war ihr Product mit -1. Da nun das Wort Modul in seiner Anwendung auf reelle Zahlen mit dem absoluten Werthe zusammenfällt und in der Zahlenlehre in ganz anderm Sinne gebraucht wird, so möchte ich als absoluten Werth der beliebigen Zahl $a+ib$ (wo a, b reell, $i^2=-1$) diejenige positive Zahl r annehmen, welche der Gleichung $r^2=a^2+b^2$ genügt. Da ferner das Wort Amplitudo in der Optik für eine lineare Abmessung gebraucht wird, so möchte ich auch dieses durch das verständlichere Wort Phase ersetzen. In Bezug auf Gleichheit oder Ungleichheit zweier absoluter Werthe möchte ich dann die Ausdrücke auf folgende Weise abkürzen. Werden die Zahlen durch Punkte in der Ebene auf die bekannte Weise versinnlicht und ist von zweien Punkten einer weiter vom Ursprung entfernt als der andere, so ist die durch den ersten Punkt versinnlichte Zahl absolut grösser als die dem zweiten Punkt entsprechende Zahl. Alle Zahlen hingegen, welche durch die Punkte eines um den Ursprung beschriebenen Kreises versinnlicht werden, sind absolut gleich.

Die numerische Beschaffenheit eines Ausdrucks ist der literalen entgegengesetzt. Ein numerischer Ausdruck kann noch ausführbare Rechnungsoperationen in sich angezeigt enthalten; er ist darum nicht minder numerisch, als wenn er nicht weiter reducirbar ist. Wenn irgend zwei Ausdrücke einander gleich sind, so ist je einer der Werth des andern. Es ist daher kein überflüssiger Zusatz, wenn man von zwei gleichen Ausdrücken denjenigen, der nach dem üblichen Decimalsystem fertig berechnet da steht, den numerischen Werth des andern nennt, dieses Wort also im engsten Sinne nimmt, wonach die Möglichkeit einer fernern Reduction ausgeschlossen bleibt.

Ist ein literaler Ausdruck z. B. gleich $-3+4i$, so ist diese Zahl sein numerischer Werth, der hinwieder 5 zu seinem absoluten Werthe und $2,_{21430}\ldots$ (mod. 2π) zu seiner Phase hat. Ebenso könnte -5 der numerische Werth eines Ausdrucks sein; dann wäre 5 dessen absoluter Werth und $3,_{14159}\ldots$ dessen Phase, welche hier mit der negativen Beschaffenheit äquivalent ist. — Ich achte es daher für einen Missbrauch, wenn numerischer Werth im Sinne des absoluten Werths gesagt wird, weil uns dann kein passendes Wort mehr übrig bleibt, um den besprochenen Gegensatz gegen die literale Beschaffenheit zu bezeichnen. Man darf dann auch nicht mehr sagen, eine Zahl sei numerisch grösser als eine andere, oder ihr numerisch gleich.

Das Absolute bedeutet überhaupt ein Aufgeben der Relation. In der Mathematik kann uns aber ein Aufgeben aller und jeglicher Relation nicht dienen; denn wenn es ein Zurückgehen auf den natürlichen Standpunkt bedeuten sollte, so hätten wir an der Zahl $3/5$ z. B. zwei natürliche Elemente statt eines einzigen, und an einer imaginären Zahl mit gebrochenen Componenten im Allgemeinen wenigstens drei natürliche Elemente. Es wird daher passend erscheinen, unter dem Absoluten bloss das Aufgeben der irgendwelchen Phase und Zurückgehen auf die Phase Null zu verstehen, d. h. das Zurückgehen auf den Standpunkt, wo man weder negative, noch laterale, noch complexe Zahlen, sondern nur positive kennt. Das Minimum von Willkür, das in dieser Definition des Absoluten noch zurückbleibt, ist durch die Häufigkeit der Fälle, wo der so bestimmte Begriff zur Anwendung kömmt, zu entschuldigen. Im Gegensatz hiezu erstreckt sich dann das Numerische auf den Begriff der Zahl in seiner vollsten Ausdehnung.

4. Der Begriff der Potenz in seiner vollsten Ausdehnung gehört nicht in die Algebra.

Wenn n eine positive ganze und x eine beliebige (variable) Zahl ist, so gehört x^n als ganze Function (folglich auch x^{-n}) in die Algebra, und zwar in den einleitenden Theil derselben, die endliche oder algebraische Buchstabenrechnung. Ebenso gehört $a^{3/5}$ in die Algebra, als x^3, sobald die durch die Gleichung $x^5 - a = 0$ angedeutete Inversion ausgeführt ist, was erst möglich wird, nachdem die Theorie der algebraischen Gleichungen schon ist abgehandelt worden; d. h. also die Potenz mit beliebiger Grundzahl und rationalem Exponent. Wie wir aber den Exponent fliessen lassen, weicht auch der algebraische Boden unter den Füssen; wir wissen nicht mehr, was a^x bedeutet und sind genöthigt, eine neue Definition dafür zu suchen, welche die alte der Potenz als besondern Fall in sich begreift. Mögen wir nun x als Summe einer endlichen rationalen und einer sehr kleinen incommensurablen Zahl oder als Product einer sehr grossen ganzen Zahl mit einem sehr kleinen Stammbruch uns denken, immer kommen wir dahin, über a^ω, wo ω sehr klein sein soll, etwas festzusetzen. Da uns jede Hülfe abginge, wenn wir die Continuität aufgeben wollten, so müssen wir für $\omega = 0$ auch Lim. $a^\omega = 1$ annehmen, womit zusammenhängt, dass a^ω sehr wenig von 1 verschieden sei, z. B. gleich $1 + h$. Dadurch werden wir aber auf die Betrachtung einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $1 + h$ geführt, dessen

Glieder desto mehr nach der Continuität hin zielen, je kleiner h angenommen wird. Diese Betrachtungsweise hat den Vortheil, dass h auch als absolut sehr kleine complexe oder laterale Zahl gefasst werden darf, was für den Fall eines endlichen imaginären Werthes von x der einzige Weg ist, dem Ausdruck a^x eine Bedeutung abzugewinnen. Ohne hier die Betrachtung weiter auszuführen, will ich nur sagen, dass man nothgedrungen zur Exponentialfunktion e^x, die für jedes endliche x einen einzigen Werth hat und zu ihrer inversen Function, dem Logarithmus, gelangt, der unzählige modulo $2i\pi$ congruente Werthe hat, und dass, wenn α irgend einen endlichen Werth von log. a bedeutet, a^ω nicht anders als durch $1 + \alpha\omega$ definirt werden kann. Dann erst ist auch die Definition von a^x durch $e^{\alpha x}$ gefunden; und ohne dass man angibt, welchen Logarithmus α von a man meint, ist das Symbol a^x ganz unverständlich.

Der Begriff der Potenz fällt demnach in drei Gebiete: in die Einleitung zur Algebra, wenn der Exponent ganz ist, in die eigentliche Algebra oder Lehre von den algebraischen Gleichungen, wenn der Exponent ein rationaler Bruch ist, und als Kern der Lehre von den Kreisfunctionen in die transcendente Analyse, wenn der Exponent incommensurabel ist. Im letzten Falle wird aber die Potenz durch einen neuen Begriff, den der transcendenten Exponentialfunktion e^x, ersetzt, der den des Logarithmus als seine Inversion zur Seite hat; und ich betrachte es als Luxus, wenn man neben diesen einfachsten Functionen noch die leicht auf sie reducirbaren $e^{\alpha x}$, $\frac{\log. x}{\alpha}$, unter besondern Namen aufführt. Und da die zwei Begriffe, der einer Potenz, die einen Stammbruch zum Exponenten hat, und der eines natürlichen Logarithmus, so weit aus einander liegen, halte ich es für überflüssig, dem Schematismus zu lieb den gemeinsamen Namen Depotenzirung für sie einzuführen.

Die Sitte, die Jugend im praktischen Gebrauch der Logarithmentafeln einzuüben, ehe sie weiss, was ein Logarithmus ist, trägt die Schuld daran, dass die Lehrbücher in die finite Buchstabenrechnung transcendente Elemente nothdürftig einmischen müssen, ohne die von ihrer Natur geforderte Entwicklung verfolgen zu dürfen. Mit diesem Uebelstand kann man sich nur dadurch in erträglicher Weise abfinden, dass man vor der Hand den mit dem Symbol a^x zu verbindenden Begriff auf den einzigen positiven Werth beschränkt, der demselben zukömmt, wenn die Grundzahl a positiv und der variable Exponent x reell ist. Um aber dem Lernenden das Gefühl der Sicherheit innerhalb dieser Beschränkung nicht zu rauben, würde ich ihn nicht durch abschweifende Betrachtungen über Bruchpotenzen mit negativer Grundzahl, oder solche von negativem Werth, verwirren. Namentlich sollten die Beispiele zur Uebung im Rechnen mit Wurzelausdrücken in den Lehrbüchern auf ein bescheidenes Maass zurückgeführt werden und den freien algebraischen und den so eben bezeichneten beschränkten Standpunkt nicht mit einander vermengen; es sollte z. B. ausdrücklich gesagt werden, dass so oft als $\sqrt[n]{a}$ vorkomme, a sowohl als $\sqrt[n]{a}$ positiv gemeint seien; es dürfte also in der Aufgabe nie $\sqrt[3]{-5}$, sondern nur $-\sqrt[3]{5}$, nie $\sqrt{-5}$, sondern nur $i\sqrt{5}$ stehen. Denn sobald man jene enge Beschränkung verlassen und aufs freie algebraische Gebiet zurückgehen muss, tritt sogleich die Vieldeutigkeit ein und man ist nicht mehr befugt, zu wissen, was mit der Aufgabe gemeint sei. Werden aber solche Aufgaben vom freien algebraischen Standpunkt aus gegeben, so thäte man besser, sie ins Rationale zu übersetzen. Wenn nämlich ein und derselbe irrationale Ausdruck in dem zur Reduction vorgelegten Gesammtausdruck wiederholt als Element auftritt, so wird stillschweigend vorausgesetzt, dass er immer dasselbe bedeute; unter einer grossen Menge angezeigter Operationen kann aber der Lernende leicht die Identität zweier zusammengesetzter Irrationalausdrücke aus den Augen verlieren und den einen in dieser, den andern in jener der vielen gleich gut möglichen Bedeutungen auffassen. Hiezu mag auch die Gewohnheit manches Lehrers oder Schriftstellers, jedem Quadratwurzelhacken ein doppeltes Vorzeichen zu geben, das ihrige beitragen; es wäre besser, nur ein Vorzeichen zu gebrauchen und alles übrige der algebraischen Interpretation zu überlassen. Noch besser aber ist es, die erwähnten Missgriffe dadurch gänzlich auszuschliessen, dass man das irrationale Element überall, wo es vorkommt, mit einem und demselben einfachen Buchstaben bezeichnet und diesen durch eine besondere rationale Gleichung definirt und jedes irrationale Element, das in der Aufgabe als rationale Funktion (z. B. als Product) anderer irrationaler Elemente gemeint ist, auch explicite so darstellt. Aehnliches gilt von algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten, wenn diese in Ausdrücken, die unter einem Wurzelzeichen stehen, vorkömmt; um Missverständnisse abzuschneiden, muss man die Gleichung in ein r a t i o n a l e s System mit mehreren Unbekannten übersetzen. Hält man so durchweg auf scharfe Abfassung der Aufgaben, so braucht man dann dem Lernenden auch nicht Angst vor solchen Schlüssen wie $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{1}$ einzujagen; denn diese unverfängliche Gleichheit sagt nichts aus als $(i \times i)^2 = 1$.

Solche Desiderien auszusprechen, hat mich vorzüglich der Eingang zu §. 25 S. 286 bewogen, dessen gewundene Form mit der gewissen mathematischen Zuversicht, die nie in den Ton einer Selbstanklage fallen kann, contrastirt. Der Verdacht gegen die selbstgeschaffenen Grundlagen trägt dann auch im Verlaufe dieses Paragraphen böse Früchte, indem S. 296 unter (9) und S. 270 das Licht, das einzig die Function e^x über dieses Gebiet verbreiten kann, zu guter Letzt noch ausgelöscht wird. Ich will versuchen, die vorgebliche Vieldeutigkeit von e^x durch algebraische Betrachtungen zu beleuchten.

Die transcendente Funktion e^x hat für jeden endlichen Werth von x (Nullwerth eingeschlossen) einen einzigen Werth, der durch $Lim. \left(1+\frac{x}{k}\right)^k$, wo k eine unendlich gross werdende positive ganze Zahl bedeutet, bestimmt ist; aber für den unendlich grossen Werth von x wird sie alldeutig.

Da der Nullwerth als eine einzige Zahl gilt, welches auch die Phase einer sehr kleinen Zahl sein mag, mittelst der wir den Nullwerth zu erreichen suchen, so müssen wir consequenter Weise auch den unendlich grossen Werth $\frac{1}{0}$ als eine einzige Zahl betrachten, welches auch die Phase einer sehr grossen

Zahl sei, mittelst der wir ihn zu erreichen suchen. Nun haben die Null und die unendlich grosse Zahl lauter unendlich grosse Logarithmen; jede endliche Zahl hat auch das Unendliche unter ihren Logarithmen. Wenn also der Logarithmus unendlich gross ist, so kann jede beliebige Zahl (in der ganzen Ausdehnung des complexen Gebiets) sein Numerus sein. Ebenso hat jeder endliche Bogen (sei er reell, lateral oder complex) nur einen Cosinus; aber ein unendlich grosser Bogen (von beliebiger Phase) kann jede beliebige Zahl zum Cosinus haben.

Stellen wir die Exponentialfunction durch eine Curve dar, deren auf rechtwinklige Coordinaten $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ bezogene Gleichung

$$e^{\frac{x}{z}} - \frac{y}{z} = 0$$

ist, so ist es ein sonderbarer Umstand, dass sie von jeder zur Ordinatenaxe parallelen Geraden $x = az$ nur in einem einzigen, dagegen von jeder andern Geraden $y = ax + bz$ in unzählig vielen Punkten geschnitten wird. (Wir können zwar auch $x - z\,(log.\,y - log.\,z) = 0$, $x = az$ schreiben und haben dann $(x = 0,\ z = 0)$ ebenfalls als Lösung des Systems.) Um dieser starken Abweichung von den für algebraische Curven gültigen Gesetzen auf den Grund zu kommen, wollen wir der transcendenten Curve diejenige algebraische substituiren, welche der Definition von e^x entspricht. Wenn k eine sehr grosse positive und ganze Zahl bedeutet, so ist diese algebraische Curve

$$\left(z + \frac{1}{k}x\right)^k - yz^{k-1} = 0.$$

Lässt man alle drei Abgeleiteten ihres Polynoms zugleich verschwinden, so findet man, dass sie einen einzigen Knoten ($x=0$, $z=0$) hat. Dieser ist ein ($k-1$)facher Punkt, in dem alle $k-1$ Tangenten mit der unendlich entfernten Geraden $z=0$ zusammenfallen. Jede von diesem Knoten ausgehende Gerade kann also die Curve sonst noch nur in einem Punkte schneiden; und für die Gerade $z=0$ insbesondere fallen alle k Durchschnittspunkte im Knoten zusammen. — Wird $px+qy+rz=0$ als Gleichung einer Tangente gesetzt, so erhält man

$$p^k + q\left(\frac{kp-r}{k-1}\right)^{k-1} = 0$$

als Liniengleichung der Curve; sie ist also nicht nur vom $k$ten Grade, sondern auch von der $k$ten Classe; und ihre einzige vielfache Tangente ist die ($k-1$) fache ($p=0$, $r=0$), d. i. $y=0$, die Abscissenaxe, deren $k-1$ Berührungspunkte alle im Punkte $kp-r=0$, d. i. ($y=0$, $x=-kz$) zusammenfallen; hier vereinigen sich auch alle k Punkte, in denen die Abscissenaxe die Curve schneidet. Jeder Punkt der Abscissenaxe entsendet also ausser den $k-1$ Tangenten, welche sich in der Abscissenaxe vereinigen, nur noch eine Tangente an die Curve. Das letzte hängt mit dem bekannten Satze, dass die Subtangente der logarithmischen Curve constant ist, zusammen. — Ich halte es für überflüssig, den Uebergang vom Algebraischen zum Transcendenten noch besonders auszusprechen.

5. Ueber Gleichheit und Gleichung.

Die S. 15 gegebene Definition der Gleichheit ist zu eng. Sie ist die Gleichsetzung zweier Ausdrücke, von denen bewiesen werden kann, dass sie in der vollen Ausdehnung der Bedeutung eines jeden derselben gleich sind. Es wäre aber vielleicht doch gut, für diesen Begriff den alten Namen identische Gleichung zu behalten und das Wort Gleichheit oder beschränkte Gleichheit für eine Gleichsetzung zu gebrauchen, die nur unter Bedingungen richtig ist, wie z. B. $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots . = \frac{1}{1 - x}$ nur gilt, wenn x absolut kleiner als 1 ist. Als dritte Gattung käme dann die bedingende Gleichung hinzu, die entweder algebraisch oder transcendent sein kann.

6. Ueber die Definition der algebraischen Funktionen, S. 88.

Die Natur der Sache zwingt mich, der vom Verfasser gegebenen Definition folgende entgegen zu setzen:

Wenn die gegenseitige Abhängigkeit zweier Variablen durch eine endliche Menge von Additionen und Multiplicationen definirt werden kann, so ist je eine Variable eine algebraische Funktion der andern.

Diese Abhängigkeit kann also nach gehöriger Reduktion immer durch das Verschwinden einer ganzen rationalen Funktion beider Variabeln ausgedrückt werden. Nur so bleibt die volle Gegenseitigkeit gewahrt; eine Definition anzunehmen, wonach x eine algebraische Funktion von y, und zugleich y eine transcendente Funktion von x wäre, widerstrebt mir.

7. Ueber den ersten Abschnitt der Algebra, 92—146.

Die Lehre von den Proportionen (S. 99—104) gehört nicht hieher, sondern in das Kapitel von den Gleichheiten (Buchstabenrechnung). Uebrigens sind Verhältniss und Proportion ein längst entbehrlich gewordener sprachlicher Rest aus einer Zeit, wo die jetzige Erweiterung des Begriffs der Zahl noch nicht vorhanden war. Sie nehmen in den Lehrbüchern immer noch zu viel Raum ein; denn es kann darüber nichts gesagt werden, was nicht schon in der Lehre von der Multiplication und Division enthalten ist.

Bei einem System linearer Gleichungen werden (S. 107 und 108) vier Arten von Elimination aufgeführt. Mir erscheint diese in den Lehrbüchern gewöhnliche bunte Terminologie für etwas, das seinem Wesen nach stets dasselbe ist, als Luxus. Es ist nur Schade, dass es neben der englischen und französischen Elimination nicht auch noch eine deutsche gibt. Vergleicht man, was am Ende von S. 113 gesagt ist, so zeigt sich, dass die englische Elimination nur der für zwei Gleichungen particularisirte Fall der französischen Elimination ist. In der Berichtigung zu S. 114 sind die Determinanten unsystematisch bezeichnet; und der Ausdruck Determinante wird, hoffe ich, nicht nur bisweilen gebraucht, sondern hat wohl schon unbestrittenes Bürgerrecht gefunden. Da die Determinante den Kern der Lehre von einem System linearer Gleichungen bildet und aus dem vorigen Jahrhundert stammt, wird sie bald alt genug sein, um in elementare Lehrbücher Eingang zu finden.

S. 115 war zu dem Schlusse, „entweder eine der drei Gleichungen identisch mit einer der zwei andern", noch keine Nöthigung, wohl aber dazu, dass eine Gleichung die nothwendige Folge der zwei andern sei. Der Missgriff rührt von der Unterdrückung des Beweises her.

Dass aus $x^2 + ax = 0$ sich eine Gleichung ersten Grades ziehen lasse, wie es S. 119 heisst, ist nicht scharf genug ausgedrückt. Denn es folgen daraus zwei gleichberechtigte Möglichkeiten: entweder $x = 0$ oder $x + a = 0$. Es wäre wohl gut, den Satz, dass ein Produkt pq nicht verschwinden kann, wenn nicht entweder p oder q verschwindet, als Grundlage für die Auflösung der quadratischen Gleichungen zu gebrauchen. Der Lernende bekäme aus der Form

$$(x - a - r)\,(x - a + r) = 0$$

wohl eine festere Ueberzeugung von der Gegenwart zweier Wurzeln als aus dem Symbol $\pm\sqrt{}$.

Auf S. 127 ist das Beispiel

$$\frac{x-1}{x-1} - \frac{3}{x-2} = 0$$

falsch behandelt. Die Grenze, der sich hier die linke Seite ohne Ende nähert, wenn auch x gegen 1 sich nähert, ist 4, nicht 0; folglich kann $x = 1$ keine Lösung der Gleichung sein.

Die Behandlung der Systeme, worin quadratische Gleichungen vorkommen, S. 130—146, entbehrt in diesem Buche leitender Grundsätze. Der Mangel ist ein weit verbreiteter und hat seine Ursache darin, dass man es verschmäht, die Gleichungen homogen zu machen, um diejenigen Lösungen, wo eine oder mehrere Unbekannte unendlich grosse Werthe bekommen, sicher beurtheilen zu können. Da dieses vortreffliche Mittel, den Nebel der sogenannten Widersprüche zu zerstreuen, noch zu wenig bekannt zu sein scheint, so will ich hier seinen Gebrauch an zwei Beispielen zeigen.

Die Veranlassung ist schon S. 110 geboten, wo von der Gleichung $ax + b = 0$ in dem Falle, wo a verschwindet, gesprochen wird. Ersetzt man x durch $\frac{x}{y}$, so wird die allgemeine Gleichung $ax + by = 0$ und reducirt sich für $a = 0$ auf $by = 0$, woraus, wenn b nicht verschwindet, $y = 0$ folgt.

Das Beispiel 4, S. 133, verwandelt sich, wenn man das dortige x durch $\frac{x}{z}$ ersetzt, in das System

$$(y + z)(y - 3z) = 0, \quad xy^5 - z^6 = 0.$$

Dieses hat die zehnfache Lösung $(y = 0,\ z = 0)$ und die zwei einfachen Lösungen $(x : y : z = 1 : 1 : -1)$ $(x : y : z = 1 : 729 : 243)$. Bei der vorletzten (oder eilften) Lösung ist $\frac{z}{y}$ keineswegs, wie es im Buche heisst, der absolute Werth der fünften Wurzel aus -1 (denn dieser würde ja die falsche Gleichung

$$1 - 2 - 3 = 0$$

geben) sondern der reelle Werth derselben.

8. Ueber den der Zahlenlehre gewidmeten Abschnitt, S. 157—239.

Wegen der Begriffsverwandschaft zwischen ganzen Zahlen und Polynomen ist hier die Lehre von der Zerlegung rationaler gebrochener Funktionen in Partialbrüche mitten in die Zahlenlehre eingereiht worden; mich dünkt aber, der Beweis, dass jede ganze und rationale Funktion einer Variabeln in lineare Faktoren zerfalle, hätte vorangehen sollen. Den §. 18 hätte ich lieber unterdrückt; denn die Behandlung unbestimmter Gleichungen zweiten und dritten Grades gehört doch nicht in ein elementares Lehrbuch, das Algebra und Geometrie umfasst. Was die Sätze über die Theilbarkeit der ganzen Zahlen betrifft, so hätte die Voranstellung des Lehrsatzes V die Beweise der Sätze I und II bedeutend vereinfacht. Der Satz I ist enger gefasst, als der Satz, der wirklich aus seinem Beweise hervorgeht; der weitere Satz liegt auch dem

Zusatz zu Grunde und würde den Beweis des Satzes II abkürzen, wenn er ausgesprochen wäre. Der Satz III wird nicht bewiesen. Der Satz IV in seiner zweiten Fassung ist eine Tautologie. Nach Satz VIII wäre 49 eine Primzahl. — Auf S. 171 sind die Artikel 4 und 5 ungenügend bewiesen. In Art. 4 mag ein Druckfehler stecken. Wenn in Art. 5 der Buchstabe R etwas bedeuten soll, so kann es nur eine homogene Funktion von x,y sein. Verschwindet diese für $x - y = 0$, für $x = 0$ und für $y = 0$, so ist damit nur gezeigt, dass sie durch $xy\,(x - y)$ theilbar ist. Uebrigens ist alles über R Gesagte unnöthig, da aus dem beschriebenen Divisionsprozess von selbst erhellt, dass $R = 0$ ist.

Wenn der Satz 2 in der Zugabe S. 164 richtig sein soll, so muss man den Ausdruck relative Primzahlen anders definiren, als S. 158 geschieht. Um der Zweideutigkeit, die hier im Sprachgebrauch zu herrschen scheint, abzuhelfen, möchte ich folgende zwei Definitionen vorschlagen:

1. Mehrere ganze Zahlen, deren grösstes gemeinschaftliches Maass 1 ist, heissen relative Primzahlen. (So Grunert in Klügel's math. Wb. im Art. unbestimmte Analytik.

2. Mehrere ganze Zahlen heissen unter sich prim, wenn keine zwei derselben einen Faktor gemein haben. (So Gauss.)

Ich glaube auch, es sei nahezu allgemein angenommener Sprachgebrauch, zwischen Faktor und Divisor zu unterscheiden, und möchte diesen Unterschied hier bestimmt aussprechen. Wenn von Faktoren der ganzen Zahl N die Rede ist, so ist 1 ausgeschlossen; dagegen ist 1 ein Divisor von N.

Auf S. 187 muss man erwarten, dass $\psi(x)$ linear sei. Die dortige Rechnung wird aber nur so weit geführt, dass $\psi(-3) = -\frac{13}{25}$ hervorgeht.

(S. 224.) Die richtigen Quotienten des Kettenbruchs für die reelle Kubikwurzel aus $\frac{3071}{10000}$ sind 1, 2, 13, 1, 1, 5, 11, 6, 2.

(S. 234.) Das Beispiel $-x^2 + xy + 2x - 3y - 7 = 0$ verwandelt sich durch die Substitution $x = p + 3$, $y = p + q + 4$ in die äquivalente Gleichung $pq = 10$ und hat daher acht Lösungen, nicht bloss vier.

(S. 235.) Bei der Gleichung

$$-2x^3 + 3x^2y - 5x^2 + 4xy + 2x - 3y + 1 = 0$$

wird nicht gezeigt, dass die drei Lösungen $(-2{,}7)$, $(1{,}1)$, $(-1, -1)$ die einzigen sind.

(S. 238.) Die hier zur Beschreibung von Pell's Methode aufgeführten Beispiele sind:

$$x^2 - 2y^2 = 1,\ x^2 - 5y^2 = 1,\ x^2 - 6y^2 = 1.$$

Indem der Verfasser in denselben resp.

$$x = y + z,\ x = 2y + z,\ x = 2y + z$$

setzt, verschweigt er den Grund hievon, dass nämlich die Coefficienten 1, 2, 2 die grössten unter $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ liegenden positiven ganzen Zahlen sind, was doch in Euler's Algebra S. 203 nicht fehlt.

9. Ueber die Convergenzlehre, S. 249 bis 258.

Auf S. 252 wird

$$\Sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

gesetzt und für ein unendlich grosses n mit Σ bezeichnet. Die ganze Anlage des Beweises führt nun darauf, nicht das Unding $\Sigma - \Sigma_n$ zu betrachten, sondern den Unterschied $\Sigma_{2n} - \Sigma_n$. Aus den Ungleichheiten

$$\Sigma_{2n} - \Sigma_n > \frac{1}{2}, \quad \Sigma_{4n} - \Sigma_{2n} > \frac{1}{2}, \quad \Sigma_{8n} - \Sigma_{4n} > \frac{1}{2}, \ldots$$

bekäme man

$$\Sigma_{2^k n} - \Sigma_n > \frac{k}{2},$$

wo k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, und hieraus ginge der Beweis noch klarer hervor.

(S. 253.) Im Lehrsatz I ist die erste im Vordersatz ausgesprochene Bedingung eine nothwendige Folge des ersten im Nachsatze angenommenen Falles, also überflüssig und mit dem zweiten im Nachsatze angenommenen Falle im Widerspruch, also zu tilgen. — Nachdem der Verfasser den Gebrauch der imaginären Zahlen (S. 152—156) so eindringlich befürwortet hat, muss man sich billig darüber verwundern, dass er hier kein Wort über den Fall äussert, wo die Glieder der unendlichen Reihe complex sind, dass er nicht einmal den Satz anführt, dass der absolute Werth einer Summe nie grösser sein kann, als die Summe der absoluten Werthe ihrer Glieder, dass also die Reihe sicher convergent ist, wenn die Reihe der absoluten Werthe ihrer Glieder es ist.

(S. 257.) Der Lehrsatz III ist in seinem zweiten Theile („in jedem andern Falle divergent") falsch. Denn hieraus würde die Divergenz der Summe

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n\,(log.\,n)^{\alpha}}$$

für $\alpha > 1$ folgen. Wäre der für die Summe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

eingeschlagene Weg wiederholt worden, so wäre der Beweis gelungen.

(S. 258.) Der Satz IV war wegzuschneiden, weil er nichts neues enthält und über den Fall, wo

$$Lim. \sqrt[n]{u_n} = 1,$$

nichts aussagt.

10. Zum binomischen Satz und seinen Gränzfällen, S. 259–300.

(S. 260—263.) Der Kern des Beweises für den Satz

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} \binom{\alpha}{\lambda}\binom{\beta}{k-\lambda} = \binom{\alpha+\beta}{k}$$

ist vortrefflich, aber die Ausführung zu weitläufig. Der Beweis konnte so abgekürzt werden. Wenn man die Gleichheit

$$k\binom{\alpha}{\lambda}\binom{\beta}{k-\lambda} = (\alpha-\lambda+1)\binom{\alpha}{\lambda-1}\binom{\beta}{k-\lambda} + (\beta-k+\lambda+1)\binom{\alpha}{\lambda}\binom{\beta}{k-\lambda-1}$$

von $\lambda = 0$ bis $\lambda = k$ summirt, indem man rechts im ersten Theile λ in $\lambda + 1$ umsetzt, so erhält man

$$k\Sigma\binom{\alpha}{\lambda}\binom{\beta}{k-\lambda} = \Sigma\,(\alpha-\lambda)\binom{\alpha}{\lambda}\binom{\beta}{k-\lambda-1} + \Sigma\,(\beta-k+\lambda+1)\binom{\alpha}{\lambda}\binom{\beta}{k-\lambda-1} = (\alpha+\beta-k+1)\,\Sigma\binom{\alpha}{\lambda}\binom{\beta}{k-1-\lambda}.$$

Setzt man hier nach und nach $k = 1, 2, 3, \ldots$, so bekömmt man obigen Satz.

(S. 268.) Aus dem Zusammenhang der Stelle, wo es heisst, „1^x gibt dem absoluten Werth nach immer 1", ist zu entnehmen, dass der Verfasser hier das Symbol 1^x im Sinne von $e^{0 \cdot x} = e^0 = 1$ braucht, nicht im allgemeinen Sinne von $e^{2in\pi x}$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, wie S. 288 und 296. Dann ist aber der Zusatz „dem absoluten Werth nach“ überflüssig; denn e^0 ist wirklich 1, nicht erst sein absoluter Werth.

(S. 278, § 24.) Es widerstrebt der Selbstständigkeit der reinen Mathematik, dass sie etwas aus der Anschauung der Ebene entlehnen sollte. Die Begriffe von Cosinus und Sinus sind zuerst aus der Betrachtung der geometrischen Reihe abzuleiten, deren Quotient um eine sehr kleine laterale Zahl von 1 abweicht. Es ist dann leicht zu zeigen, dass diese geometrische Reihe in sich selbst zurückkehrt; und aus der Periode ist die Definition von π zu schöpfen. Nachher liegt es der Geometrie ob, zu zeigen, dass in einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Hypotenuse 1 und dessen Katheten y und z sind, der z gegenüber liegende Winkel die Rolle eines Logarithmus von $y + iz$ spielt.

(S. 281.) In diesem tautologischen Drehrad vermag ich keine Beweiskraft für die Bedeutung von e^x, wenn x lateral ist, zu erkennen. In

$$e^x = \Sigma \frac{x^n}{n!},$$

wo ursprünglich x reell gedacht ward, zuerst x in it, dann t in iu, dann u in iv und endlich v in iw übergehen lassen, wo vermuthlich t, u, v, w jedesmal als reell betrachtet werden, heisst doch gewiss weiter nichts als die vier Substitutionen

$$x = it, \; x = -u, \; x = -iv, \; x = w$$

in jener Gleichung anbringen. Soll ich mich nun darüber verwundern, dass durch die letzte Substitution $x = w$ die Vorzeichen nicht geändert werden?

(S. 282.) Die Argumentation in der Note ist eine consequente Definition der Bedeutung eines lateralen Exponents, kein Beweis. Sie reducirt sich nämlich auf folgendes. — Da für laterale Werthe von m und x die Gleichung

$$\Sigma \frac{x^n}{n!} = \left(\Sigma \frac{m^n}{n!}\right)^{\frac{x}{m}}$$

von planimetrischen Vorstellungen aus bewiesen ist, und da die rechte Seite derselben von m unabhängig sein muss, so wird die Gleichung nicht nur für laterale, sondern auch für reelle Werthe von m, z. B. 1, gelten; dann ist aber

$$\Sigma \frac{x^n}{n!} = e^x$$

für einen lateralen Werth von x. — Die Schwierigkeit liegt aber in der Bedeutung des Exponents $\frac{x}{m}$, der vorhin reell war und daher noch durch einen rationalen Bruch ersetzt und auf die gangbare Weise erklärt werden konnte, und jetzt für $m = 1$ auf einmal lateral wird.

S. 300 hat der Verfasser durch falsche Schlüsse in den Formeln (10,,) und (11,) gefunden, dass zwei Bogen, deren Unterschied nur π beträgt, denselben Cosinus und denselben Sinus haben. Die halben Logarithmen bedürfen eigentlich noch einer nähern Erklärung. Erlaubt man sich z. B.

$$arc\ sin\, x = \left(2\alpha + \frac{1}{2}\right)\pi \mp \frac{i}{2} log. \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}}$$

hinzusetzen, so muss dazu noch ausdrücklich gesagt werden, dass

$$\frac{1}{2} log. \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}}$$

genau dasselbe bedeuten soll, was $log. (x + \sqrt{x^2-1}.)$

(S. 285 unten.) Statt „$\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ *in inf.*“ war zu schreiben: $\alpha = 0, 1, 2, \ldots m$. Denn die Formeln der folgenden Seite gelten nur, wenn m eine ganze und positive Zahl ist.

S. 301 in Gleichung (15) ist die neue Rechnung überflüssig. Die Aufgabe $tang\,(x+iy)=p+iq$, wo p, q reell gegeben und x, y reell gesucht sind, kann auch so gelöst werden. Da

$$x+iy=\frac{1}{2i}\,log.\frac{1-q+ip}{1+q-ip},$$

so setze man

$$\frac{1+q}{p}=cotg.\,(x-z)\,,\quad \frac{1-q}{p}=cotg.\,(x+z)$$

und wähle die Bogen $x-z$, $x+z$ so, dass $\frac{sin\,(x-z)}{sin\,(x+z)}$ positiv ausfällt. Man erhält dann

$$y=\frac{1}{2}\,log.\frac{sin(x+z)}{sin(x-z)}.$$

Die Aufgabe $sin\,(x+iy)=p+iq$, wo p, q reell gegeben, x, y reell gesucht sind, hat unter anderm folgende Lösung. Man suche reelle Zahlen α, β, γ, δ, welche den Gleichungen

$$(\alpha+i\beta)^2=1+p+iq,\quad (\gamma+i\delta)^2=1-p+iq$$

genügen, so folgt

$$tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta}{\delta},\quad y=log\,\frac{\gamma+\beta}{\gamma-\beta}=log\,\frac{\alpha+\delta}{\alpha-\delta}.$$

11. Zur Lehre von Differenzen und Summen, S. 301—313.

Die hier berührten Gegenstände können in einem elementaren Lehrbuche nicht bewiesen werden, weil die Hülfsmittel fehlen. Die Bernoullischen Zahlen werden z. B. S. 304 und 313 auf verschiedene Weisen definirt, ohne dass die Identität beider Definitionen bewiesen wird. Die natürlichste Definition der Bernoullischen Zahlen geschieht mittelst der Entwicklung von $\frac{x}{e^x-1}$ nach steigenden Potenzen von x, oder, was auf dasselbe hinaus kömmt, mittelst der Gleichung

$$\frac{x}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2} = 1 - \Sigma B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Hieran schliesst sich dann die Summation der ganzen rationalen Potenzen der natürlichen Zahlen auf ungezwungene Weise an. Der Leser dieses Abschnitts muss mit einem grossen Aufwand von Arbeit das erreichen, was er auf einer spätern Stufe viel leichter und mit voller Ueberzeugung erhalten kann. — Es dünkt mich auch verkehrt, die Summation der Trigonalzahlen, der Pyramidalzahlen, überhaupt die höhern arithmetischen Reihen aus den Potenzsummen der natürlichen Zahlen abzuleiten; dieses geschieht weit leichter aus dem bekannten Satz über Binomialcoefficienten, wonach

$$\binom{n+1}{m+1} - \binom{n}{m+1} = \binom{n}{m},$$

also auch

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \binom{\lambda}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Wenn man nicht in die Lehre von den Bernoullischen Zahlen eintreten will und die Potenzsummen der natürlichen Zahlen nur für einige niedrige Potenzen darzustellen hat, so ist es besser, sie aus jener Eigenschaft der Binomialcoefficienten herzuleiten.

(S. 312.) Die Zerlegung einer transcendenten gebrochenen Funktion in Partialbrüche ist ein misslicher Handel und kann auf der Stufe dieses Lehrbuchs nicht mit Sicherheit vollzogen werden. Das hier gebrauchte Verfahren, auf $\frac{\cos \alpha x}{\sin x}$ (wo α eine beliebige reelle Zahl bedeutet) angewandt, führt zu einem Resultat, das auch falsche Gleichungen in sich fasst.

Es ist eigentlich nur eine Interpolation, wenn man es auf transcendente Funktionen anwendet.

Folgende Formeln stehen auf sicherem algebraischem Boden; m, n bedeuten ganze Zahlen, $0 \overline{\gtrless} m < n$.

1. Wenn m, n zugleich ungerade sind, so ist

$$n\frac{e^{imx}}{\sin nx} = \sum_{\lambda=-\frac{n-1}{2}}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} e^{i\lambda\left(1-\frac{m}{n}\right)\pi} \operatorname{cotg}\left(x+\frac{\lambda\pi}{n}\right);$$

Hier sind die beidseitigen reellen Componenten auch noch für $m=n$ einander gleich.

2. Wenn m gerade, n ungerade ist, so hat man

$$n\frac{e^{imx}}{\sin nx} = \sum_{\lambda=-\frac{n-1}{2}}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} e^{i\lambda\left(1-\frac{m}{n}\right)\pi} \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\lambda\pi}{n}\right)}.$$

3. Wenn m ungerade, n gerade, so ist

$$n\cos x\cdot\frac{e^{imx}}{\sin nx} = \sum_{\lambda=-\frac{n}{2}+1}^{\lambda=\frac{n}{2}-1} e^{i\lambda\left(1-\frac{m}{n}\right)\pi} \cos\frac{\lambda\pi}{n} \operatorname{cotg}\left(x+\frac{\lambda\pi}{n}\right),$$

4. Wenn m und n gerade sind, so ist

$$n\cos x\cdot\frac{e^{imx}}{\sin nx} = \sum_{\lambda=-\frac{n}{2}+1}^{\lambda=\frac{n}{2}-1} e^{i\lambda\left(1-\frac{m}{n}\right)\pi} \frac{\cos\frac{\lambda\pi}{n}}{\sin\left(x+\frac{\lambda\pi}{n}\right)}.$$

Ersetzt man hier $\frac{m}{n}$ durch α, x durch $\frac{\pi x}{n}$ und lässt n unendlich wachsen, so kömmt

$$\frac{\pi e^{i\pi\alpha x}}{\sin\pi x} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \frac{e^{i\lambda\pi(1-\alpha)}}{\lambda+x} \text{ für } -1<\alpha<1.$$

(S. 308.) Die Gleichung (ν) ist in der schon bewiesenen (μ) bereits ausgesprochen, bedarf also keines neuen Beweises. — Nach diesem Lehrbuche ist

$$\Sigma\,\Delta u_n = u_{n+1}$$

gegen den gewöhnlichen Gebrauch des Zeichens Σ.

12. Zum zweiten Abschnitt der Algebra, S. 315—380.

(S. 315.) Als Fundament der Lehre von den algebraischen Gleichungen scheint mir der Beweis für die Existenz einer Wurzel unentbehrlich zu sein, und ich glaube auch, unter den Beweisen, welche Cauchy hiefür gegeben hat, finde sich einer, der gleichsam den Kern der Sache trifft und fortan alle andern Beweise überflüssig macht. Ich verwundere mich, dass er nicht schon in die elementaren Lehrbücher ist aufgenommen worden und da er mir nicht genug bekannt scheint, so will ich ihn hier in Kürze wiederzugeben versuchen, möchte aber zum Voraus bemerken, dass der transcendente Begriff der Phase für den Beweis nicht wesentlich ist. Denn während das Polynom y eine stetige Reihe von Werthen durchläuft und zum Anfangswerth zurückkehrt, braucht man nur auf die Fälle Acht zu geben, wo seine imaginäre Componente verschwindet, während die reelle positiv ist, und die Anzahl derjenigen Fälle, wo die imaginäre Componente abnehmend durch Null geht, von der Anzahl der andern Fälle, wo sie wachsend durchgeht, zu subtrahiren; man wird so auch die im Folgenden mit λ bezeichnete Zahl bekommen und kann auch den ganzen Beweis nach dieser Vorstellung einrichten.

Es sei y eine ganze rationale Funktion $n$ten Grades von x, worin die Coefficienten nicht reell zu sein brauchen. Wenn y für $x = a$ verschwindet, so ist leicht zu zeigen, dass y durch $(x - a)^\alpha$ theilbar sein wird, wo $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ sein kann. Wir nehmen eine Ebene zu Hülfe, worin jeder Punkt einen Werth von x versinnlicht, lassen diesen Punkt einen einfach geschlossenen Weg beschreiben im selben Sinn, in welchem der Punkt $\cos\varphi + i \sin\varphi$ sich bewegt, während φ von 0 bis 2π wächst (dieser Sinn mag rechtläufig heissen), und nennen die Gesammtheit aller innerhalb dieses geschlossenen Weges oder dieser rechtläufigen Umgränzung liegenden Werthe von x das umschlossene Feld. Für jede kleine Wegstrecke welche x auf der Umgränzung zurücklegt, erfährt die Phase von y, das ist $\frac{1}{i} \log y$, eine kleine Variation; die Summe aller solcher Variationen, welche dem ganzen einmaligen Umlaufe des Werthes von x entsprechen, wollen wir die ganze Variation der Phase von y nennen und mit $\left\{\frac{1}{i} \log y\right\}$ bezeichnen. Da y als ganze rationale Funktion nur wieder zum selben Werthe zurückkehren kann, so muss diese ganze Variation $2\lambda\pi$ sein, wo λ eine ganze Zahl bedeutet.

Nehmen wir zuerst ein sehr kleines Feld an, in welchem keine Wurzel der Gleichung $y = 0$ liegt, und wählen innerhalb desselben einen Punkt, der die Zahl a versinnlicht, so haben wir $x = a + t$ in y zu substituiren, und erhalten

$$y = A + Bt^\beta + \ldots, \text{ wo } \beta = 1, 2, 3 \ldots$$

sein kann und den niedrigsten positiven Exponenten von t bedeutet, der in dieser Entwicklung vorkömmt. Ist nun die Grenze, welche der absolute Werth von t nie überschreitet, niedrig genug, so wird A längs der ganzen Umgrenzung absolut grösser sein, als die Summe aller folgenden Glieder des Ausdrucks; folglich muss $\lambda = 0$ sein.

Nehmen wir dann ein sehr kleines Feld, in welchem eine αfache Wurzel a liegt, und setzen $x = a + t$, wo t sehr klein bleiben soll, so gibt die Substitution

$$y = At^{\alpha} + Bt^{\beta} + \ldots, \text{ wo } \beta = \alpha + 1,\ \alpha + 2, \ldots$$

sein kann, und wir dürfen wieder voraussetzen, dass das Anfangsglied stets absolut grösser als die Summe aller folgenden sei. Wir haben dann in niedrigster Annäherung

$$\log y = \log A + \alpha \log r + i\alpha\varphi, \text{ wenn } t = re^{i\varphi}.$$

Also wird nun $\lambda = \alpha$.

Stossen zwei Felder an einander, so wird das gemeinschaftliche Stück beider Umgränzungen für das eine Feld in diesem, für das andere Feld in entgegengesetztem Sinne, von x durchlaufen; also sind beide Male die diesem Stücke entsprechenden Variationen der Phase von y gleich und entgegengesetzt. Daher bleibt die Summe der Variationen der Phase von y dieselbe, mag man jedes der zwei Felder besonders umlaufen, oder mit Weglassung ihrer Scheidewand beide Felder zusammen in einem einzigen Umlaufe einschliessen. Wenn wir also ein grosses Feld aus vielen sehr kleinen Feldern lückenlos zusammensetzen, so wird λ für den Umlauf um das grosse Feld die Summe aller den vielen kleinen Feldern entsprechenden Zahlen λ zum Werthe bekommen, d. h.

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots,$$

wenn unter diesen kleinen Feldern solche sich finden, die eine αfache, eine βfache, eine γfache, ... Wurzel der Gleichung $y = 0$ umschliessen. Kurz, die totale

Variation $\left\{\frac{1}{i} \log y\right\}$ längs der rechtläufigen Umgränzung irgend eines grossen Feldes wird so viel mal 2π betragen, als Wurzeln der Gleichung $y=0$ darin liegen.

Ist nun ax^n das höchste Glied in y und beschreiben wir mit einem hinreichend grossen Halbmesser r einen Kreis um den Ursprung, so dass der absolute Werth von $ax^n = ar^n e^{in\varphi}$ den absoluten Werth der Summe aller folgenden Glieder weit übertrifft, so bekommen wir längs dieses Kreises $\left\{\frac{1}{i} \log y\right\} = 2n\pi$. Also müssen n Wurzeln innerhalb liegen.

Der Beweis in dieser Fassung unterliegt dem Vorwurfe, dass nicht gezeigt worden sei, dass die linearen Dimensionen jeder Masche des Netzes, mit dem ein gegebenes grosses Feld überdeckt ward, immer klein genug angenommen werden können; ich wollte indessen nur das Wesentliche des Beweises darstellen. Eine strenge Ausführung findet man in Grunert's Archiv für Mathematik und Physik, Band I, S. 53. — Diesen Beweis ziehe ich wegen seiner mehr affirmativen Beschaffenheit einem andern mehr indirecten vor, den ebenfalls Cauchy gegeben hat, und dessen Gang folgender ist.

Verschwände y für keinen Werth von x, so müsste es einen (oder mehrere absolut gleiche) absolut kleinsten Werth von y geben. Dieser sei A und a der entsprechende Werth des Arguments x. Substituirt man nun $x = a + t$, so wird $y = A + Bt^\beta + \ldots$, wo β den niedrigsten positiven Exponenten von t in der Entwicklung bedeutet. Der absolute Werth von t werde so klein angenommen, dass das Glied Bt^β an absolutem Werthe die Summe aller folgenden weit übertrifft. Man kann dann immer die Phase von t so wählen, dass die Phase von Bt^β um π diejenige von A übertrifft, so dass der absolute Werth von y annähernd um denjenigen von Bt^β kleiner wird als derjenige von A. Also kann es keinen positiven kleinsten absoluten Werth von y geben, sondern y muss wenigstens einmal verschwinden.

(S. 316.) Hier macht es sich fühlbar, dass die Division der Polynome im ganzen Buche nirgends gelehrt worden ist. Sonst war wohl nicht Klareres, als dass, wenn man $f(a) = 0$ und $f(x) = (x - a)\varphi(x) + C$ hat, dann auch $C = 0$ sein muss.

(S. 321.) Der Beweis des cartesischen Satzes ist unvollständig.

(S. 329 und 340.) Die neun und acht Combinationen sind Luxus.

(S. 352 und 353.) Die Existenz der Wurzeln wäre hier ganz leicht zu beweisen, wird aber vorausgesetzt, blos weil der Begriff der Continuität verschmäht wird.

13. Zur Geometrie, S. 383—721.

(S. 383.) Der Verfasser erklärt die Gerade als kürzesten Weg zwischen zwei Punkten. Diese Erklärung ist keine Definition. Denn 1) setzt der Begriff des Weges, d. i. die Wegeslänge, die Summe aller als gerade gedachten Elemente des Weges, denjenigen der Geraden schon voraus; und 2) schliesst der Superlativ „kürzester Weg" den Begriff der Einheit nicht nothwendig in sich, da es in einer Reihe gleichartiger Grössen mehrere unter sich gleiche kleinste geben kann, und doch ist die Einheit der zwei gegebene Punkte verbindenden Geraden ihr wesentlichstes Merkmal. Die Existenz dieser einzigen Linie, welche durch die zwei Punkte, die sie verbinden soll, einfach bestimmt ist, kann freilich nicht bewiesen werden; Aber mit Hülfe derselben kann die andere Eigenschaft, die des kürzesten Weges, wirklich bewiesen werden; und eine Eigenschaft, die bewiesen werden kann und die Kenntniss des zu definirenden schon voraus setzt, darf nicht als Definition gebraucht werden.

(S. 472.) Bei der harmonischen Theilung ist das Doppelverhältniss -1 und nicht 1. Wenn man zwei zusammengehörige Punkte mit einander vertauscht, so geht ein beliebiges Doppelverhältniss a in $\frac{1}{a}$ über, das harmonische aber bleibt sich gleich, d. h. es ist der umgekehrte Werth seiner selbst. Ist der Werth eines Doppelverhältnisses 1, so folgt nothwendig, dass zwei zusammengehörige Punkte desselben zusammenfallen. Es ist eine Verletzung der analytischen Consequenz, wenn man hier den Begriff des Negativen vermeidet. Und ich begreife nicht, mit welchem Recht man dieses thun kann, wenn man Strecken miteinander vergleicht, die auf einer und derselben Geraden von den nämlichen Anfangspunkten aus gezählt werden. Hätte der Verfasser -1 als den Werth des harmonischen Doppelverhältnisses anerkannt, so hätte er S. 475 die harmonischen Eigenschaften des Vierseits viel klarer und kürzer beweisen können. Er hätte nur gesagt: aus dem Pol b ist $(hyad)$ projektivisch mit $(hiec)$, und aus dem Pol f ist $(hiec)$ projektivisch mit $(hyda)$; folg- ist $(hyad)$ projektivisch mit $(hyda)$, also harmonisch getheilt.

(S. 490.) Denkt man sich im Raume eine Gerade und einen Punkt ausserhalb derselben, so bilden alle

Geraden, welche diesen nach und nach mit den verschiedenen Punkten jener festen Geraden verbinden, eine Ebene. Diese oder auch jede ähnliche Definition der Ebene, welche dieselbe durch Bewegung einer Geraden entstehen lässt, reicht zwar zur Construction der Ebene hin, enthält aber noch nicht den vollständigen Begriff der Ebene, dessen man zu allen weiteren Folgerungen bedarf. Dieser käme erst zu Stande, wenn man den Satz beweisen könnte, dass die Gerade, welche irgend zwei Punkte der durch jene Construction entstandenen Fläche verbindet, ganz derselben angehöre. Der Verfasser gibt nun im Eingang zu seiner Stereometrie vor, diesem Mangel abhelfen zu können. Nachdem er die Existenz der Geraden als einer in ihrer Art einzigen Linie, die irgend zwei gegebene Punkte verbinden kann und durch diese Punkte völlig bestimmt ist, vorausgesetzt und ihr zugleich die Eigenschaft des kürzesten Weges ohne Beweis zugeschrieben hat, setzt er aus zwei Geraden, die denselben Anfangspunkt haben und einseitig unbegränzt sind, ein Gebilde zusammen, das wir Gabel nennen wollen, um die Verwechslung mit dem von ihnen eingeschlossenen Stück der Ebene, das unter dem Namen Winkel bekannt ist, zu verhüten. Wir müssen nun zugeben, dass zwei solche Gabeln der Congruenz fähig sind und wollen sogar noch annehmen, dass eine Gabel durch Umwendung mit sich selbst congruent sei. Aber wir können keine zwei Gabeln addiren. Denn wenn wir auch vom selben Anfangspunkte aus drei Gerade ausgehen lassen, so haben wir wohl drei Gabeln, wissen aber nicht, welche von den dreien vorzugsweise die Summe der zwei andern sein sollte. Diese Gabel ist also keine Grösse und der Satz, dass der Theil nicht dem Ganzen gleich sei, findet auf sie keine Anwendung, weil bei einer Nichtgrösse von einem Theil gar keine Rede sein kann. Vergleiche S. 492, Z. 7.

Mit dieser einzigen Einwendung gegen den Gebrauch des Wortes Theil ist indess der vom Verfasser geführte Beweis noch nicht entkräftet. Denn wenn die vom festen Anfangspunkte c aus nach dem laufenden Punkte n der festen Geraden mo gehende Gerade cn mit der festen Drehungsaxe ca eine Rechtgabel bildet, so scheint unmittelbar zu folgen, dass die bewegliche Gerade cn der Fläche angehören müsse, welche durch Umdrehung einer Rechtgabel um ihren festen Schenkel ca war construirt worden; und dann trifft obige Einwendung nur die äussere Form des Beweises, nicht dessen Wesen. Wir wollen aber den Begriff dieser Rechtgabel schärfer in's Auge fassen. Es seien a, b zwei vom selben Anfangspunkte ausgehende Gerade und a' sei die rückwärts gerichtete Verlängerung von a. Kann man nun dieses Gebilde (a, b, a') mit (a', b, a) zur Congruenz bringen, so sind (a, b), (a', b) zwei Rechtgabeln. Wer beweist uns aber, dass diese Rechtgabel existirt, und wer beweist uns, dass wenn es ein ähnliches Gebilde (a, c, a') gibt, das mit (a', c, a) congruent ist, dieses durch Drehung um den festen Schenkel a mit dem Gebilde (a, b, a') zur Congruenz gebracht werden kann?*)

---

*) Die Redaktion hielt sich zur vollständigen Aufnahme der vorstehenden, zum Theil etwas scharfen Bemerkungen verpflichtet — wird aber natürlich auch dem Verfasser des besprochenen Buches in einem folgenden Hefte Raum für seine Gegenbemerkungen eingeben.