Mathematische Mittheilungen

enthaltend Sätze über algebraische und transcendente Gleichungen, sowie über die Unmöglichkeit einer neuen rein mathematischen Einheit,

von **J. C. Hug**,
Dozent der Mathematik.

I.

Einleitendes, vornämlich die verschiedenen Zahlgattungen betreffend.

Es bedurfte einer langen Zeit und ausserordentlicher Anstrengungen, bis die aus den algebraischen Operationen fliessenden Einheiten und die aus ihnen gebildeten Zahlen sämmtliche zur völligen Anerkennung und Gleichberechtigung gelangten. Wie lange dauerte die Scheu vor den negativen Wurzeln einer Gleichung; wie lange galten die imaginären Zahlen als eigentlich „unmögliche" und wie sehr haftete an diesem Begriff der Mangel an Gleichberechtigung mit den übrigen Zahlen, obwohl man sich jener verhältnissmässig bald und gerne um der Vortheile willen bediente, die sie im Kalkül gewähren. Allein die Erfahrung, dass die konsequent grundsätzliche Rechnung mit den Imaginären stets richtige Ergebnisse liefere, reichte noch nicht aus, ihren unbedingten Kredit zu begründen; es war hiezu ihre Beziehung auf die Gebiete der Anwendung und vor Allem aus der Nachweis nothwendig, dass auch diesen Zahlen, gleich wie den positiven und negativen, ein denkbares z. B.

räumliches Substrat gegeben werden könne. Von da an erst fiel jenes Attribut des „Unmöglichen“ der imaginären Zahlen. — Der Wiederspruch oder wenigstens die falsche Beziehung, die hierin lag, ist fühlbar, denn die imaginären Zahlen waren als solche nicht unmöglich, wenn es auch lange Zeit nicht möglich war, für sie eine bestimmt angebbare Unterlage zu finden. Vom logischen Standpunkte aus sind offenbar alle bekannten oder noch unbekannten Zahlen als Ergebnisse der Operationen, respective der Funktionen, gleich möglich, d. h. die Möglichkeit liegt in der logischen Zulässigkeit.

Ueberhaupt ist auf jede mathematische Frage, die keinerlei logischen Widerspruch in sich begreift, immer eine Antwort zu gewärtigen, gleichviel, ob diese auf schon bestehende oder noch neu einzuführende Begriffe sich stützt. Fragen dieser Art waren ausser denjenigen, die das Negative und Imaginäre betrafen, auch jene, durch welche man auf die gebrochenen, die unendlich kleinen, die unendlich grossen, die irrationalen Zahlen etc. geführt worden ist. Eine mit diesen verwandte Frage betrifft gerade auch die Wurzel irgend einer algebraischen oder transcendenten Gleichung, wesswegen es daher im Allgemeinen als überflüssig erscheinen muss, die Existenz einer solchen Wurzel besonders zu beweisen, nicht aber, die Form und Gattung derselben zu untersuchen und festzustellen. Es wird in der Folge auf diesen Punkt zurückgewiesen werden.

Die Bedeutung der Gauss'schen Richtungszahlen, wornach mittelst der positiven oder direkten Einheit $+1$, der negativen oder inversen -1 und der imaginären oder lateralen $\pm i$ oder $\pm\sqrt{-1}$ jeder Zahlort in der Ebene ausgedrückt werden kann, ist schon lange bekannt.

Es folgen nämlich aus der Stammformel

$$(e^{xi})^{\frac{m}{n}} = (\cos x + i \sin x)^{\frac{m}{n}} = \cos(2k\pi + x)\frac{m}{n} + i \sin(2k\pi + x)\frac{m}{n},$$

worin k ganz ist, leicht folgende drei für einen bestimmten Bereich identischen Werthe

$$(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}} = \cos\varphi + i \sin\varphi = e^{\varphi i}, \tag{1}$$

in denen π die Ludolph'sche, φ irgend eine Kreisbogen-Zahl und i die $\sqrt{-1}$ bezeichnet, und von denen jeder den Koeffizienten darstellt, mit welchem man einen gewissen Radius vektor multipliziren muss, damit dieser in einen bestimmten Punkt führt. Ist z. B. die Entfernung eines Punktes vom Pol (Ursprung) $= \varrho$, die Anomalie (oder der Winkel zwischen dem Radius vektor und der Basis oder der $+x$-Axe) $= \varphi$, dann heisst der in den gemeinten Punkt führende Radius vektor von der Länge ϱ

$$(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}} \varrho = e^{\varphi i} . \varrho = (\cos\varphi + i \sin\varphi)\varrho, \tag{2}$$

und er ist, wenn z. B. φ der Reihe nach die Werthe 0, $\frac{\pi}{2}$, π annimmt, resp. $= +\varrho$, $+i\varrho$, $-\varrho$. Die Idee lag nun sehr nahe, dass, wenn die positiven und negativen Zahlen alle möglichen Strecken von einem Anfangs- oder Nullpunkt aus auf einer Axe in positivem oder negativem Sinne, die imaginären von demselben Punkte aus ähnliche Strecken in der auf der ersten Axe Senkrechten andeuten können, es wahrscheinlich noch eine neue Zahlqualität geben müsse, welche der dritten Dimension im Raume, also der dritten durch jenen Punkt gehenden und auf jeder der beiden ersten perpendikulären Axe entsprechen würde. Offenbar sind in dieser Richtung schon viele Untersuchungen angestellt worden. Von den zur Oeffentlichkeit gelangten, verweise ich nur auf das geistreiche und werthvolle Buch von Hermann Scheffler, der Situationskalkül*) betitelt, in welchem er durch Einführung und Benutzung der Richtungszahlen eine Koordinatengeometrie der Ebene und des Raumes in neuer Behandlungsweise entwirft. Dasselbe als bekannt voraussetzend, beschränke ich mich darauf, die jener dritten Dimension entsprechenden Zahlformen, welche in dem Buche eingeführt werden, näher zu berühren.

Setzt man ein System dreier orthogonaler Axen voraus, so wird analytisch jede vom Ursprung aus in der positiven primären Axe genommene Strecke ϱ in der Grundebene (Ebene der primären und sekundären Axe) um den Winkel φ gedreht, wenn man einen der Ausdrücke in (2) hiefür wählt. Diese Drehung ist keine andere als die der Linie ϱ um eine Drehungsaxe, die mit der tertiären identisch ist. Um nun den Radius ϱ in irgend eine Richtung des Raumes zu bringen, kann man ihn zuerst aus seiner Lage in der primären um den Winkel φ (Deklination) um die tertiäre Axe und alsdann um den Winkel ψ (Inklination) um die primäre Axe drehen. Offenbar kommt die Sache aufs Gleiche heraus, wenn man umgekehrt

*) Braunschweig 1851, Verlag von Fr. Vieweg und Sohn.

zuerst das gegebene Axensystem um ψ um die primäre und alsdann das neue System um dessen tertiäre Axe um φ dreht. Der Deklinationskoeffizient ist bekannt und in (1) gegeben, der der Inklination ist jenem analog und wird von Scheffler, um ihn von (1) zu unterscheiden, durch

$$(\div 1)^{\frac{\psi}{\pi}} = e^{\psi \sqrt{\div 1}} \tag{3}$$

ausgedrückt. Scheffler bezeichnet hier nämlich die den Operationsandeutungen + und — entsprechenden Co-Operationen durch $\dotplus$, d. h. coplus und $\div$, d. h. cominus, so dass also ein Radius der Deklination φ und der Inklination ψ durch

$$\varrho e^{\varphi \sqrt{-1}} e^{\psi \sqrt{\div 1}} = \varrho e^{\psi \sqrt{\div 1}} e^{\varphi \sqrt{-1}} \tag{4}$$

bestimmt wird. Derselbe ist daher, wenn $\varphi = \psi = \frac{\pi}{2}$,

$$\varrho \sqrt{-1} \sqrt{\div 1} = \varrho \sqrt{\div 1} \sqrt{-1}, \tag{5}$$

so dass demnach die der dritten Dimension entsprechende abstrakte Einheit $\sqrt{\div 1} \sqrt{-1} = i \sqrt{\div 1}$ wäre.

Für die hier beabsichtigten Untersuchungen kann nun nicht die Frage interessiren: was vermag man analytisch und geometrisch mit diesen Zahlformen zu bewirken? sondern einzig: bezeichnen dieselben wirklich eine neue Zahlgattung und drückt insbesondere das Symbol $i \sqrt{\div 1}$ eine neue arithmetische Einheit aus?

Wir zweifeln daran, ob selbst der Autor obigen Werkes letztere Frage wirklich bejahen würde. Uns wenigstens scheint $\sqrt{\div 1}$ nichts Anderes als noch einmal die imaginäre Einheit; denn arithmetisch liegt in beiden ganz die gleiche Bedeutung vor und geometrisch ruft $\sqrt{\div 1}$ einer gleichen Drehungsquantität wie $\sqrt{-1}$; nur ist, wie schon gesagt, im einen oder andern Fall die Drehungsaxe auch eine andere. Vielleicht wäre es sogar nicht unmöglich gewesen, statt $\sqrt{\div 1}$ einfach die imaginäre Einheit etwa mit Accent, z. B. $\sqrt{-1}'$, zu setzen und also überhaupt durch Accente die Assimilirung der verschiedenen Drehungskoeffizienten zu verhindern. Mit all diesem soll aber durchaus kein Tadel gegen die Einführung obiger Zahlformen ausgesprochen sein; im Gegentheil sind wir der Meinung, dass sowohl in reiner als angewandter Mathematik noch viel Erspriessliches durch Einführung neuer symbolischer Ausdrücke wird geleistet werden können; allein dies darf keineswegs mit der Auffindung von neuen arithmetischen Zahlgattungen verwechselt werden. Wir sind auf zwei von einander sehr verschiedenen Wegen zu dem Resultat gelangt, dass aus dem Gesammtgebiet der algebraischen und transcendenten Funktionen keine neue arithmetische Einheit, folglich auch keine neue Zahlgattung mehr abgeleitet werden kann, die mit den bisherigen in irgend einer Operationsbeziehung stehen würde. In den nachfolgenden Untersuchungen wird der einfachere, wenn vielleicht um Geringes weniger strenge jener beiden Wege betreten werden.

II.

Zeichenkorrespondenz zwischen einer komplexen Gleichung und ihrer komplexen Wurzel.

Lehrsatz. Geht in der Gleichung $f(x)+iF(x)=0$, worin $f(x)$ und $F(x)$ reelle algebraische oder transcendente Funktionen von x vorstellen, i (das ist $\sqrt{-1}$) in $-i$ über, so ändert auch bloss die imaginäre Komponente der Wurzel, falls diese eine solche hat, das Zeichen.

Erklärung. Unter einer imaginären Funktion von x soll eine solche verstanden werden, die für jedweden reellen Zahlwerth von x einen imaginären Zahlwerth als Ergebniss darbietet. Bei einer solchen Funktion kann man sich also i stets explicite vorkommend denken. Jede andere Funktion, bei der i explicite nicht vorkömmt, heisst dann reell.

Beweis des Lehrsatzes. Da wir nicht wissen, welcher Form oder Gattung eine obiger Gleichung angehörige Wurzel ist, indem eine solche reell oder imaginär oder komplex sein oder vielleicht gar einen Bestandtheil enthalten kann, der keins von Allem ist, sondern der einer ganz neuen noch unbekannten Zahlgattung angehört; so wollen wir, um dieser Möglichkeit Rechnung zu tragen, die genannte Wurzel von der Form

$$p + qi + r\lambda \qquad (1)$$

voraussetzen, worin p, q, r reelle Zahlen, inklusive 0, i wie hier immer die imaginäre und λ eine allfällige neue Zahleinheit bezeichnen. Es soll demnach gezeigt werden, dass, wenn der Gleichung

$$f(x) + i\,F(x) = 0 \qquad (2)$$

die Wurzel (1) entspricht, der Gleichung $f(x) - i\,F(x) = 0$ auch die Wurzel $p - qi + r\lambda$ genügt. Zu diesem Behuf wollen wir der Gleichung (2) die Form

$$1 + i\,\psi(x) = 0, \qquad (3)$$

$$\text{oder } \psi(x) + i = 0 \qquad (3,)$$

geben, indem $\psi(x)$ entweder $= \frac{F(x)}{f(x)}$ oder $= \frac{f(x)}{F(x)}$ gesetzt wird. Den funktionalen Bestandtheil der Gleichung wollen wir nun nach der Maklaurin'schen Formel entwickeln, jedoch so, dass in irgend einem diese Entwicklung beeinträchtigenden Falle man vorerst durch geeignete Umformung die Identität möglich macht. Man kann zudem in allen Fällen dafür sorgen, dass $\psi\,(0)$ sowie die successiven Differenzialquotienten $\psi^1(0)$, $\psi^2(0)$, $\psi^3(0)$ u. s. f. reell ausfallen. Hat man z. B. die Gleichung

$$log\,(x - a) + i\, arc\, sin\,(x + b) = 0,$$

worin a und b reelle Zahlen und $a > 0$ und $b > 1$; so findet man durch leichte Umwandlung

$$1 + i\,\frac{\pi + arc\, sin\, x}{log\,(a + b - x)} = 0,$$

wofür jetzt $\psi\,(0)$ sowie die Derivirten $\psi^1(0)$, $\psi^2(0)$ etc. reell werden. — Indem wir also $\psi\,(x)$ in dieser Art präparirt voraussetzen, erhalten wir aus (3)

$$1 + i\,\psi\,(x) = 1 + i\,\Big\{\psi\,(0) + x\,\psi^1(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2}\,\psi^2(0) + \\ + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\psi^3(0) + \text{etc.} \cdot \cdot \cdot \Big\}. \qquad (4)$$

In gleicher Weise liesse sich aus ($3_{,}$) die entsprechende Entwickelung ziehen; es ist aber durchaus einerlei, welche der beiden Entwicklungen in Nachfolgendem in Betracht gezogen werde. Wir setzen jetzt die Wurzel der Gleichung (3), welch' erstere immer noch von der Form $p + qi + r\lambda$ sein muss, in (4) ein und schreiben zuerst, absichtlich nach beiden i separirt:

$$1 + i\psi(p + qi + r\lambda) =$$

$$= 1 + i\left\{\begin{array}{l} qi\psi^1(0) + (p+r\lambda)qi\psi^2(0) + [3(p+r\lambda)^2qi + q^3i^3]\dfrac{\psi^3(0)}{2\cdot 3} + \\ + [(p+r\lambda)^3qi + (p+r\lambda)q^3i^3]\dfrac{\psi^4(0)}{2\cdot 3} + \text{etc.} \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array}\right\}$$

$$+ i\left\{\begin{array}{l} \psi(0) + (p+r\lambda)\psi^1(0) + [(p+r\lambda)^2 + q^2i^2]\dfrac{\psi^2(0)}{2} + \\ + [(p+r\lambda)^3 + 3(p+r\lambda)q^2i^2]\dfrac{\psi^3(0)}{2\cdot 3} + \text{etc.} \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array}\right\}, \tag{5}$$

wobei i in der ersten Doppel-Zeile verschwindet und in der folgenden nur ausser der Klammer verbleibt, so, wie es die nächste Gleichheit darstellt:

$$\begin{array}{l} 1 + i\psi(p+qi+r\lambda) = 1 - q\psi^1(0) - (p+r\lambda)q\psi^2(0) - \cdot \cdot \cdot \\ + i\left\{\psi(0) + (p+r\lambda)\psi^1(0) + [(p+r\lambda)^2 - q^2]\dfrac{\psi^2(0)}{2} + \cdot \cdot \right\}. \end{array} \tag{5,}$$

Man bemerkt, dass sich die Entwicklung nicht, wie man etwa nach Analogie der bikomplexen Grössen schliessen möchte, in einem trikomplexen Ausdrucke von der Form $P + Qi + R\lambda$ geben lässt, denn ausser den reellen und imaginären Gliedern werden noch solche vorkommen, die entweder reine Potenzen von λ oder dann solche noch mit i multiplizirt als Faktoren enthalten. Die Potenzen von λ können aber weder etwas Reelles noch etwas Imaginäres geben, denn das wird schon durch das Imaginäre geleistet; ebenso wird $\lambda^n i$,*) worin n absolut ganz, weder der Gattung λ

---

*) Es kann z. B., wenn n eine absolute ganze und z eine reelle oder imaginäre, resp. hienach komplexe Zahl bezeichnet, unmöglich $\lambda^n = z$ sein, sonst wäre $\lambda = \sqrt[n]{z}$, was keine neue Zahlgattung enthält. Ferner wird ebenso wenig $\lambda^n i = z\lambda$ oder $\lambda^n i = zi$ etc. sein, sonst hätte man wieder die alt bekannten in $\lambda = \sqrt[n-1]{-z}$ und $\lambda = \sqrt[n]{z}$ liegenden Werthe.

noch der Gattung i angehören, indem sonst die eine oder die andere ihr Wesen einbüssen müsste.

Als Wurzel der Gleichung (3) macht aber $p+qi+r\lambda$ die Gleichheit (5) oder (5,) zu 0 und es muss hiebei natürlich jede der besondern Zahlsorten in der Entwicklung für sich zu 0 werden. Die erste Zeile rechts von (5,), kürzehalber durch C bezeichnet, ist ein Aggregat aus den reellen Bestandtheilen und denjenigen der Einheit λ, also aus der ersten und dritten Zahlsorte, wovon jede für sich 0 ausmachen und wesswegen auch $C=0$ sein muss. Die zweite Zeile von (5,), kurz durch $iC_{,}$ bezeichnet, ist ein Aggregat aus den imaginären Bestandtheilen und denjenigen der Qualität $\lambda''i$, also aus der zweiten und vierten Zahlsorte, von denen ebenfalls jede für sich 0 ausmachen und wesswegen auch $iC_{,}$ für sich $=0$ sein muss. Man hat also

$$1+i\psi\,(p+qi+r\lambda)=C+iC_{,}=0, \qquad (6)$$

worin $C=0$ und $C_{,}=0$ ist.

Denken wir uns jetzt in Gleichheit (5) qi in $-qi$ umschlagend, was gleich viel ist, wie wenn wir $p-qi+r\lambda$ statt x in (4) einsetzen; so geht daraus für das Ergebniss von (5) keine andere als eine Zeichensänderung innerhalb der Hauptklammern der ersten Doppelzeile hervor. Diese Aenderung wird wieder aufgehoben, wenn wir auch den die Funktion ψ multiplizirenden Faktor i in $-i$ umsetzen; dafür wird dann aber die in letzter Doppelzeile stehende Partie negativ, ändert sich jedoch sonst in nichts, so dass dieser doppelten Zeichensänderung entsprechend auch die Beziehung besteht:

$$1-i\psi\,(p-qi+r\lambda)=C-iC_{,}, \qquad (6,)$$

welche zu (6) koordinirt ist und in welcher immer noch jedes der beiden Aggregate C und $C_{\prime}$ für sich Null ausmachen muss. Alles dieses zusammengefasst hat man jetzt das Schlussresultat:

$$1 - i\psi\,(p - qi + r\lambda) = 0, \tag{7}$$

aus dem wir ersehen, dass, wenn der Gleichung (2) oder (3) eine Wurzel der Form $p + qi + r\lambda$ entspricht, derselben Gleichung, nachdem in ihr i in $-i$ übergeht, dann auch die Wurzel $p - qi + r\lambda$ genügt, was buchstäblich mit der im Lehrsatze ausgesprochenen Behauptung übereinstimmt.

III.

Ueber Form und Gattung der Wurzel einer reellen algebraischen oder transcendenten Gleichung.

Lehrsatz. Stellt $f(x) = 0$ eine reelle algebraische oder transcendente Gleichung dar, so kann dieselbe immer durch eine Wurzel der Gattung $p \pm qi$, worin p und q reell und $i = \sqrt{-1}$, befriedigt werden.

Beweis. Um die Gleichung

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

in welcher $f(x)$ eine beliebige reelle Funktion von x darstellt, in Hinsicht auf Form und Gattung ihrer Wurzel zu untersuchen, betrachten wir zuerst den Ausdruck:

$$W = f(p + qi) \cdot f(p - qi). \tag{2}$$

Dieser Ausdruck bleibt in Form und Werth unverändert, wenn i durch $-i$ (und umgekehrt) ersetzt wird; er enthält daher in seiner Entwicklung i nur in quadratischer Form, d. h. nur in geraden Potenzen, und ist folglich eine reelle Funktion von p und q. Nunmehr untersuchen wir, ob der Ausdruck W für reelle p und q eines Maximums oder Minimums fähig sei. Man hat zu diesem Ende hin bekanntlich

$$\frac{d \cdot W}{dp} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d \cdot W}{dq} = 0 \tag{3}$$

zu setzen und die betreffenden Werthe für p und q herzustellen. Wir erhalten zunächst

$$\left.\begin{aligned} \frac{d \cdot W}{dp} &= f(p+qi)\, f^1(p-qi) + f^1(p+qi)\, f(p-qi), \\ \frac{d \cdot W}{dq} &= -if(p+qi)\, f^1(p-qi) + if^1(p+qi)\, f(p-qi), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

worin f^1 wie gewöhnlich den ersten Differenzialquotienten von f bezeichnet. In Uebereinstimmung mit (3) und (4) bestehen demnach die Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f(p+qi)\, f^1(p-qi) &= 0, \\ f^1(p+qi)\, f(p-qi) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

welche zur Realisirung von (3) folgende vier Möglichkeiten darbieten:

$$\begin{array}{lcll} f(p+qi) = 0 & \text{und} & f(p-qi) = 0, & \alpha) \\ f^1(p+qi) = 0 & \text{und} & f^1(p-qi) = 0, & \beta) \\ f(p+qi) = 0 & \text{und} & f^1(p+qi) = 0, & \gamma) \\ f(p-qi) = 0 & \text{und} & f^1(p-qi) = 0. & \delta) \end{array}$$

Nun sind wir aber nicht im Stande, aus irgend einer der Gruppen $\alpha)$ $\beta)$ $\gamma)$ $\delta)$ die Werthe von p und q anzugeben; daher lassen wir dieselben vorderhand unberührt und gehen zur Aufstellung der Kennzeichen über, welche entscheiden, ob von einem Maximum oder Minimum in vorliegendem Falle überhaupt die

Rede sein kann. Zu diesem Zwecke stellen wir uns die zweiten partiellen Differenzialquotienten von W her. Es folgen aus (4), indem man mittelst $\frac{d^2W}{dp^2}$ den zweiten Differenzialquotienten von W nach p, mittelst $\frac{d^2W}{dq^2}$ eben denselben nach q, und mittelst $\frac{d^2W}{dp\,dq}$ den das eine Mal nach p, das andere nach q gebildeten Differenzialquotienten andeutet:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2W}{dp^2} &= f(p+qi)f^2(p-qi)+2f^1(p+qi)f^1(p-qi)+f^2(p+qi)f(p-qi),\\
\frac{d^2W}{dq^2} &= -f(p+qi)f^2(p-qi)+2f^1(p+qi)f^1(p-qi)-f^2(p+qi)f(p-qi),\\
\frac{d^2W}{dp\,dq} &= -if(p+qi)\,f^2(p-qi)+if^2(p+qi)\,f(p-qi),
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

woraus, wenn kürzehalber

$$\varDelta = \frac{d^2W}{dp^2}\cdot\frac{d^2W}{dq^2}-\left(\frac{d^2W}{dp\cdot dq}\right)^2 \qquad (7)$$

gesetzt wird,

$$\varDelta = 4\,[f^1(p+qi)^2f^1(p-qi)^2-f(p+qi)\,f(p-qi)f^2(p+qi)\,f^2(p-qi)] \quad (7_{,})$$

folgt. Von dem Werthe dieses Ausdruckes hängt die Möglichkeit eines Maximums oder Minimums für W wesentlich ab. Ist derselbe für reelle Werthe von p und q angebbar positiv, so hat W ein Maximum oder Minimum; ist er dagegen negativ, oder nimmt er den Nullwerth an, so ist W weder eines Maximums noch eines Minimums fähig. Und da man sich bald überzeugt, dass ein Positivsein von $\varDelta$ nur bei der Annahme gleicher Vorzeichen für $\frac{d^2W}{dp^2}$ und $\frac{d^2W}{dq^2}$ gedenkbar ist; so wollen wir nun untersuchen, welche der vier Gruppen α), β), γ), δ) diesen Anforderungen entspricht.

Fasst man also zunächst die Kombination α) in's Auge, so geht der Werth von $\varDelta$ nach (7,) in

$$\varDelta = 4\,[f^1(p+qi)\,f^1(p-qi)]^2$$

über, welcher Ausdruck gewiss positiv ausfällt, da das Eingeklammerte für reelle p und q so gut wie W reell ist. Die Kombination α) ruft also in W wirklich ein Maximum oder Minimum hervor und wir bemerken noch überdiess, dass die gleichen Vorzeichen von $\frac{d^2W}{dp^2}$ und $\frac{d^2W}{dq^2}$ hier in der That stattfinden, indem die Gleichungen (6) für besagte zwei Differenzialquotienten den gemeinschaftlichen Werth $2f^1(p+qi)\,f^1(p-qi)$ darbieten.

Durch die Kombination β) folgt aus (7,) der Werth

$$\varDelta = -4f(p+qi)\,f(p-qi)\,f^2(p+qi)\,f^2(p-qi)\,,$$

dessen Vorzeichen wir nicht unmittelbar prüfen können und wesswegen wir in (6) nachzusehen haben, ob $\frac{d^2W}{dp^2}$ und $\frac{d^2W}{dq^2}$ mittelst β) gleiche Vorzeichen bekommen; was wirklich nicht der Fall ist. Die Kombination β) gibt also weder ein Maximum noch ein Minimum.

Endlich machen γ) und δ), wie man sich leicht überzeugt, $\varDelta = 0$, wesswegen man also auch hiedurch weder ein Maximum noch ein Minimum für W zu gewärtigen hat.

Es ist also entschieden, dass die Funktion W in (2) mittelst der Kombination α) für reelle Werthe von p und q ein Maximum oder Minimum eingeht; diess ist aber nothwendig damit verknüpft, dass $\frac{dW}{dp} = 0$ und $\frac{dW}{dq} = 0$ sei. Allein diese zwei Gleichungen haben eine der vier Kombinationen α), β), γ), δ) zur Folge und von diesen haben wir die drei letzten als unbrauchbar erkannt: folglich finden die Gleichungen in α), nämlich

$$f(p+qi) = 0 \quad \text{und} \quad f(p-qi) = 0 \tag{8}$$

für reelle Werthe von p und q wirklich statt, was wir in Vorliegendem zu zeigen beabsichtigten.

IV.

Bemerkungen und Erweiterungen zu Lehrsatz III.

1. Der vorige Satz Nr. III. ist, wenn auch nicht ganz in dieser Gestalt und Durchführung, so doch seiner Hauptgrundlage nach einer der letzten mathematischen Gedanken unsers sel. Freundes Raabe. Der Verewigte war in der letzten Zeit der seine irdische Hülle aufzehrenden Krankheit ausserordentlich lebendig angeregt; es trieb ihn recht eigentlich, noch möglichst vieles zu leisten. In seinen schlaflosen Nächten beschäftigte ihn eine Reihe anziehender Probleme aus der Zahlenlehre und in seinen bessern und ruhigern Tagesstunden versuchte er oft auf der schon in frühern Mittheilungen der zürch. naturforschenden Gesellschaft und im Crell'schen Journal begonnenen Bahn weiter zu kommen, die Bestimmung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung beliebigen Grades auf die Integration linearer partieller Differenzialgleichungen zurückzuführen und für besondere Fälle zu erledigen. Es wollte ihm aber in letzterer

Beziehung nicht glücken, über die kubische Gleichung hinauf zu gelangen, und wir haben uns seither überzeugt, dass die Sache, um ein zu massenhaftes Material zu vermeiden, anders angegriffen werden muss; wovon wir in folgenden Mittheilungen einige Ergebnisse zu liefern hoffen. —

Ein Gespräch über die Bestimmung von Maxima- und Minima-Werthen einer Function und über die Wurzeln jener bekannten auf den Differenzialquotienten bezüglichen Gleichungen führte auf den Gedanken, den Entscheid über die Wurzel-Form für reelle Gleichungen überhaupt auf jenes Verfahren zu stützen. Hiebei wurde gleich von vorneherein die Existenz der Wurzel einer Gleichung als Thatsache betrachtet, ähnlich wie diess in Nr. 1 auseinandergesetzt wird und es blieb bloss zu untersuchen, welcher Zahl-Form und -Gattung genannte Wurzel angehöre.

Raabe hatte einen Entwurf zu einem Beweise dictirt*), allein der Beweis hatte noch einige der Verbesserung fähige Stellen, so ganz besonders darin, dass zur Realisirung jener Gleichungen, in denen die partiellen Differenzialquotienten von $f(p+qi) \cdot f(p-qi)$ auf 0 gebracht werden, ohneweiters die Bestimmungsgleichungen $f(p+qi)=0$ und $f(p-qi)=0$ angenommen wurden, ohne zugleich sämmtliche übrige Möglichkeiten, die zu dem genannten Zwecke dienen können, zu prüfen.

Die schliessliche Ausführung und Redaktion überliess Raabe dem Verfasser gegenwärtiger Mittheilun-

*) Herr Prof. Wild in Bern hatte nämlich die Güte, diesen Entwurf zu schreiben; überdiess theilte Raabe den Gedanken Hrn. Prof. Gräffe, seinem ältesten Freunde, mit.

gen und dieser glaubte sie in der Fassung von Nr. III. am passendsten zu vollenden. Zugleich konnte das Resultat des Satzes in den hier beabsichtigten Untersuchungen wesentlich mitwirken, darum das Erscheinen desselben in der vorliegenden Verbindung.

2. Es lassen sich noch mehrere sachliche Bemerkungen und Erweiterungen zur Ausführung des Satzes III. machen, von denen wir folgende hier beifügen:

a) Bei Gelegenheit der Prüfung der Vorzeichen von $\frac{d^2 W}{dp^2}$ und $\frac{d^2 W}{dq^2}$ wurde gefunden, dass diesen Differenzialquotienten bei der Kombination α) der gemeinsame Werth

$$2 f^1(p+qi)\, f^1(p-qi) \qquad (\omega)$$

entspricht, der aus den gleichen Gründen wie W reell sein muss. Derselbe kann überdiess noch, so gut wie W, mit Zuziehung der Taylor'schen Reihe für alle reellen p und q als positiv erklärt werden. Nun findet, gemäss den bekannten Vorschriften, ein Maximum oder Minimum für W statt, je nachdem der Ausdruck (ω) negativ oder positiv ausfällt; und da also das erstere nicht der Fall sein kann, so wird auch beim Statthaben der Kombination α) nicht von einem Maximum, wohl aber von einem Minimum des Ausdruckes W die Rede sein müssen.

b) Betreffend den Minimumwerth, den wir im Vorangehenden mittelst α) oder den nunmehr geltenden Gleichungen (8) für W festzustellen suchten, kann auch Folgendes für sein ausschliessliches Dasein geltend gemacht werden. Diejenigen reellen Werthe für p und q, welche die Gleichungen α) oder 8) realisiren, machen das Produkt W zu Null und dieses kann daher in besagtem Falle kein Maximum darstellen; denn alle andern reellen p und q, für welche die Gleichungen 8) nicht zu Null werden, müssen, wie vorhin unter a) dargethan wurde, positive Werthe von W hervorbringen, die folglich grösser sein müssten als der vermeintliche Maximumwerth 0, was eine offenbare Absurdität ist.

c) Am deutlichsten geht wohl die Unmöglichkeit des in Rede stehenden Maximums hervor, wenn die Untersuchung mit W^2 statt mit W geführt wird.

d) Die Wurzeln einer reellen Gleichung $f(x) = 0$ sind demnach diejenigen Werthe von $p \pm qi$, welche den Ausdruck

$$W = f(p + qi)\, f(p - qi)$$

in den Minimums-Zustand versetzen. Hiebei sind p und q reelle Zahlen.

e) Bei sogenannten wiederholten Wurzeln der Gleichung tritt das bekannte Kennzeichen hervor.

f) Die geometrische Bedeutung der Gleichung (2) im Allgemeinen sowie besonders auch mit Beziehung auf den Punkt, in welchen die Abscisse p und die Ordinate q führen, wenn die Applicate $W = 0$ ist, liegt nach dem Vorausgeschickten offen. Es lassen sich übrigens weitere nicht uninteressante geometrische Resultate hieraus ableiten.

g) Unter Zuziehung von Lehrsatz Nr. II. kann nunmehr auch gezeigt werden, dass einer komplexen Gleichung der Form

$$f(x) + i\, F(x) = 0,$$

worin $f(x)$ und $F(x)$ reelle Funktionen darstellen, durch die Wurzelform $p + qi$, in der p und q reell sind, ebenfalls Genüge geleistet werden kann. Es soll hievon in der nachfolgenden Nummer die entsprechende Anwendung gemacht werden.

V.

Ueber die Unmöglichkeit einer neuen rein mathematischen (algebraischen oder arithmetischen) Einheit.

In Nr. III. wurde nachgewiesen, dass irgend einer reellen algebraischen oder transcendenten Gleichung eine Wurzel der mehrerwähnten Gattung $p + qi$ entspricht. Einer jeden solchen Gleichung kann also durch die bisher bekannten Zahlen, seien sie reell oder rein imaginär oder komplex, genügt werden und es liegt schon desswegen die Vermuthung nicht gar ferne, dass es vielleicht überhaupt keine weitern algebraischen Zahlgattungen mehr gebe.

Was diese Zahlgattungen in quantitativer Beziehung anbetrifft, so leisten sie Alles, was man hinsichtlich der blossen Quantitätsbildung erwarten darf, da man durch dieselben dem Verlaufe der Kontinuität so nahe kommen kann, als man nur will. Allein nicht so unmittelbar lässt sich entscheiden, ob durch die drei Einheiten $+1$, -1 und $\sqrt{-1}$ die Zahlen in qualitativem oder relativem Sinne abgeschlossen werden können oder nicht.

Der letzten algebraischen Operation, dem Potenziren, und den entsprechenden Gegensätzen verdankt man die dritte Einheit $\sqrt{-1}$. Nun hat man aber bis jetzt den Gang der algebraischen Operationsbildung, wie solche aus der speziell axiomatischen Thätigkeit des Zählens stammt, nicht weiter fortgesetzt, obwol diess nicht durchaus unmöglich wäre. Allein gesetzt man wollte auch, etwa mittelst der Potenzform

$$x^{x^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}} = \overset{n}{x} = p, \qquad (1)$$

in welcher jedes auf das unterste folgende x der Exponent des unmittelbar vorangehenden und n der neue Index wäre, Anlass zur Aufstellung einer neuen Operation bieten, so liesse sich wohl nachweisen, dass aus dieser Verbindung (1) allerdings merkwürdige, auf wiederholte Logarithmen von Logarithmen bezügliche Relationen, nicht aber neue, nicht schon in der allgemeinen Gattung $p + qi$ enthaltene Zahlen entspringen können.

In Folgendem soll nun gezeigt werden, dass, welches auch die Operation oder Operationskombination sein sollte, die man aus dem bisherigen algebraischen Rechnungsgebiete ziehen möchte:* dieselbe dennoch nie eine neue Einheit hervorbringen könnte, welche, den axiomatischen Ursprung beurkundend, durch irgend ein Operationsband an die bis jetzt bekannten Einheiten geknüpft wäre.

Der Nachweis lässt sich nicht schwer auf indirektem Wege mittelst Lehrsatz Nr. II und Nr. III leisten. Man hat, von der letzten der drei Einheiten $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ ausgehend, die Anschlussgleichheit

$$(+\sqrt{-1})^n = \varepsilon, \qquad (2)$$

worin n jede absolute ganze Zahl und ε in der nämlichen Aufeinanderfolge $+1$, $+\sqrt{-1}$, -1 und $-\sqrt{-1}$ bezeichnet, in welcher n für den mod. 4 mit 0, 1, 2, 3 kongruent ist. Die einfachste reelle Gleichung aber, die als ausschliessliche oder einzige Wurzel die imaginäre Doppeleinheit darbietet, ist

$$x^2 = -1 \tag{3}$$

wie diejenige, welcher nur die negative Einheit genügt, $x + 1 = 0$ ist.

Angenommen, es gäbe nun irgend eine neue noch unbekannte Einheit, die wir ebenfalls durch x repräsentiren wollen; so sei die einfachste Gleichung, die sie mit den frühern Einheiten verbindet und die also als ausschliessliche oder einzige Wurzel diese neue Einheit, auch wenn sie eine mehrdeutige sein sollte, involvirt, durch

aufgelöst durch
$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \varepsilon, \\ x &= \psi(\varepsilon) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

dargestellt, wobei die Funktionszeichen φ und ψ die in inverser Beziehung zu einander stehenden Operationen andeuten sollen, durch welche die neue Einheit auf eine der alten zurückgeführt, oder aus einer der letztern die erstere gebildet werden kann. Die Funktion $\varphi(x)$ wird entweder eine reelle oder nicht reelle Funktion sein und sich unter der allgemeinern Form

$$\varphi(x) = f(x) + i\,F(x) = \varepsilon \tag{4,}$$

begreifen lassen, worin $f(x)$ und $F(x)$ reelle Funktionen von x bezeichnen. Je nachdem nun ε das reelle oder imaginäre Einheitenpaar darstellt, hat man aus (4,) die Gleichung:

oder die:
$$\left.\begin{aligned} [f(x) \mp 1] + i\,F(x) &= 0, \\ f(x) + i\,[F(x) \mp 1] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wird jede dieser Gleichungen mit der korrespondirenden des nächsten Paars multiplizirt:

$$\left.\begin{array}{r} [f(x) \mp 1] - i\, F(x) = 0\,, \\ f(x) - i\, [F(x) \mp 1] = 0\,, \end{array}\right\} \qquad (5,)$$

so erhält man:

$$\left.\begin{array}{rr} & [f(x) \mp 1]^2 + F(x)^2 = 0\,, \\ \text{und} & f(x)^2 + [F(x) \mp 1]^2 = 0\,. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Allein jede der eben erhaltenen Gleichungen als Produkt aus (5) mit (5,) hat eine Wurzel die (5), und eine solche die (5,) verifizirt, und diese beiden Wurzeln können sich gemäss Lehrsatz Nr. II. nur durch eine Zeichenverschiedenheit in der imaginären Komponente, wenn die Wurzeln eine solche besitzen, von einander unterscheiden.

Nach Satz Nr. III. wird aber jede der reellen Gleichungen (6) durch Wurzeln der Form

$$p + qi \quad \text{und} \quad p - qi\,, \qquad (7)$$

worin p und q reell sind, befriedigt; folglich ist gemäss der in Satz Nr. II. ausgesprochenen Zeichenkorrespondenz einer der Werthe (7) Wurzel von (5), der andere Wurzel von (5,).

Es hat demnach die Gleichung (4), welche in (4,) und (5) detaillirt wurde, eine mit den bereits bekannten Zahlen zusammenfallende Wurzel und die Annahme, die Gleichung (4) müsse als ausschliessliche Wurzel durchaus eine neue Zahl oder Zahleinheit enthalten, findet nicht Bestand.

Folglich ist es unmöglich, aus dem rein mathematischen Operations- oder Funktionsgebiete eine Zahlgattung zu erhalten, die nicht schon durch die alten vertreten wäre, oder die etwas anderes leisten würde als jene.

Anmerkungen:

1) Durch Gang und Inhalt des Vorausgegangenen ist jetzt der Beweis auch dafür geliefert, dass irgend eine komplexe Gleichung, wie z. B. (5), ebenfalls durch eine Wurzel der bisher bekannten Form realisirt wird.

2) Es kann sich vielleicht in Zukunft um die Frage handeln, ob, wenn von Seite der reinen Mathematik nichts weiteres mehr in Hinsicht auf Bildung neuer Zahlgattungen zu erwarten ist, solche von aussen her, d. h. aus angewandten Gebieten hereingetragen werden können und dürfen, wie es z. B. von H. Scheffler für die Geometrie des Raums versucht worden ist. Gegenwärtig möchte es aber noch schwer halten, die Frage bestimmt zu bejahen oder ebenso zu verneinen; doch scheint die negative Antwort bis jetzt die grössere Wahrscheinlichkeit für sich zu haben.