Morgens 2 schöne Sternschnuppen von NO—SW. mit grossem Schweif.

17. [Witter.: kalt, Nebel. Windr.: SW—NO.] — Grosse Kälte und dichter Grundnebel. Gestern Nachts um 9 ½ Uhr einen schwachen Stoss Erdbeben verspürt; zuvor oft Sausen und Krachen.

18. [Witter.: kalt. Windr.: SW—NO.] — Grauer, überaus kalter Nebel. Um 10 Uhr Morgens hörte ich ein starkes Sausen und Surren wie eines grossen Feuers oder fernen Wassergetöses.

24. [Windr.: SW-NO.] — Seit vielen Tagen grosse Kälte, Nebel, ungesund. Viele klagen über rheumatische Leiden: am Rücken, Seite, Brust, Kopf, Bein- und Arm-, Ohren- und Zahnschmerzen. Mehrere leiden an Ausschlag am Leibe.

29. [Witter.: kalt, Sonne. Windr.: O—W.] — Die Nacht durch starkes Schneegestöber mit kaltem Wind. Gestern hat es oft vor und nach Mittag geschneit. Ich hörte um 9 Uhr Morgens ein betäubendes Sausen, nur kurze Zeit nachher nichts mehr.

30. [Witter.: Schnee. Windr.: SW—NO.] — Auch heute wie fernes dumpfes Feuer- oder Wassertosen, ein Sausen bemerkt. In der Nacht hörte ich auf der West-Seite steten Lauinen-Donner.

Anwendung schiefer Parallelprojektionen zu axonometrischen Zeichnungen.

Von **J. W. von Deschwanden.**

Mit einer Tafel.

Die axonometrischen Darstellungen räumlicher Gegenstände, wie sie hauptsächlich von Weisbach und Schlömilch ausgebildet worden sind, bestehen stets in orthogonalen Projektionen; und die verschiedenen Arten dieser Darstellungen unterscheiden sich nur dadurch von einander, dass den drei senkrecht zu einander gedachten Hauptrichtungen oder Axen der dargestellten Objekte verschiedene Stellungen zu der Projektionsebene gegeben und hierdurch den Projektionen dieser Axen verschiedene Verkürzungsverhältnisse und Richtungen verliehen werden.

Mir scheinen jedoch oft auch schiefe Parallelprojektionen mit Nutzen, ja manchmal sogar mit mehr Vortheil zu axonometrischen Darstellungen verwendet werden zu können, als die orthogonalen oder rechtwinkligen, und im Folgenden soll auf einige der wichtigsten Eigenschaften solcher Darstellungen hingewiesen werden.

Die Entstehung schiefer Parallelprojektionen hat man sich bekanntlich in folgender Weise zu denken: man stellt sich den zu projizirenden Gegenstand, sowie irgend eine beliebig liegende Ebene als Projektionsebene im Raum vor und zieht von allen zu projizirenden Punkten des erstern unter sich parallele, aber sonst beliebig gerichtete Gerade nach der Projektionsebene hin. Die Schnittpunkte aller dieser Linien mit der Projektionsebene bilden sodann die schiefe Projektion derjenigen Punkte des Gegenstandes, von denen sie ausgehen, und, wenn dieselben in hinreichender Zahl vorhanden sind und gehörig mit einander verbunden werden, die schiefe Projektion des Gegenstandes selbst. Statt eines beliebigen räumlichen Gegenstandes sollen nun nur die drei rechtwinklig zu einander stehenden Axen, von denen gleich grosse Stücke $a = b = c$ gedacht werden mögen, schief projizirt werden. Alsdann sind folgende Gruppen geometrischer Grössen zu unterscheiden, welche von einander abhängig sind:

A) die Grössen, welche die Lage der drei Axen im Raume zur Projektionsebene bestimmen;

B) die Grössen, welche die Lage der projizirenden Linien zu den drei Axen und zur Projektionsebene bestimmen;

C) die Länge und Richtung der schiefen Projektionen der Axen.

Durch die Grössen *A* und *B* werden offenbar die Grössen *C* bestimmt. Ebenso müssen sich aus den Grössen *C* die Grössen *A* und *B* ableiten lassen, wobei indessen nicht unterlassen werden darf zu untersuchen, ob für alle *C* ein *A* und *B* gefunden werden kann, und ob jedem *C* nur ein oder dagegen mehrere *A* und *B* entsprechen. Endlich müssen sich aus einigen von den unter *A*, *B* u. *C* enthaltenen einzelnen Grössen jeweilen die übrigen bestimmen lassen. Es bieten sich also folgende Aufgaben zur Lösung dar:

1) Aus der Lage der Axen zur Projektionsebene und aus der Richtung der projizirenden Linien die Länge und Richtung der Projektionen der Axen zu bestimmen.

2) Aus der beliebig oder innerhalb gewisser Gränzen angenommenen Länge und Richtung der Projektionen der Axen die zugehörigen Stellungen der Axen selbst zur Projektionsebene und die Richtung der projizirenden Linien abzuleiten.

3) Aus einzelnen Grössen, welche an den Axen im Raume mit Bezug auf ihre Stellung zur Projektionsebene, an der Richtung der projizirenden Linien und an den Projektionen der Axen vorkommen, die übrigen Grössen dieser Art abzuleiten.

Von diesen drei Aufgaben sollen hier nur die erste und zweite etwas genauer besprochen werden.

Die dritte Aufgabe zerfällt, wie man sofort einsieht, wieder in eine grosse Zahl einzelner Aufgaben, die ein weites Feld zu geometrischen Untersuchungen darböten. Zu ihnen gehört namentlich diejenige, welche in der Lehre von den orthogonalen axonometrischen Zeichnungen als Hauptaufgabe betrachtet zu werden pflegt, nämlich: die Richtung der projizirenden Linien, sowie das Verhältniss der Projektionen der Axen zu einander als bekannt anzunehmen, und sodann die Richtung dieser Projektionen, sowie die Lage der Axen im Raume zu bestimmen.

An diesen Fall würde sich zunächst derjenige anschliessen, in welchem zwar dieselben Grössen als gegeben und als gesucht betrachtet würden, wobei aber die Richtung der projizirenden Linien nicht senkrecht, sondern irgendwie geneigt zur Projektionsebene angenommen würde. Alsdann böte sich die Aufgabe dar, aus der Richtung der projizirenden Linien und den Winkeln, welche die Projektionen der Axen mit einander bilden, die Längenverhältnisse dieser Projektionen und die Lage der Axen im Raume zu bestimmen. Eine Reihe von Aufgaben würde sich ferner dadurch ergeben, dass man die Richtung der projizirenden Linien unter die Unbekannten aufnähme und die Projektionen der Axen ebenfalls nur zum Theile als bekannt betrachtete. Man erhielte somit eine Reihe von Aufgaben, welche sämmtlich verschiedenes theoretische und praktische Interesse und verschiedene Schwierigkeiten bei der Lösung darböten, theilweise auch auf dem Gebiete, dem sie ursprünglich angehören, nämlich auf dem der darstellenden Geometrie, vielleicht nicht lösbar wären. Hier soll indessen von diesen Untersuchungen abgesehen und nur auf die Aufgaben 1 und 2 etwas näher eingetreten werden.

Aufgabe 1: *Aus der Länge und Lage der Axen im Raume zur Projektionsebene und aus der Richtung der projizirenden Linien die Länge und Richtung der Projektionen der Axen zu bestimmen.*

Ist die Lage der drei Axen im Raume durch ihre orthogonalen Projektionen in gewöhnlicher Weise gegeben, und kennt man auch zwei orthogonale Projektionen einer Geraden, mit welcher die projizirenden Linien parallel sein sollen, so können die schiefen Projektionen der Axen durch die elementarsten Hülfsmittel der darstellenden Geometrie bestimmt werden. Die Auflösung dieser Aufgabe bietet also nicht die mindeste Schwierigkeit dar.

Auch über die Ergebnisse dieser Operationen sollen wenige Bemerkungen genügen. Sind die projizirenden Linien senkrecht zur Projektionsebene angenommen worden, so erhalten die Projektionen der Axen eine Länge und Richtung, welche einem der bekannten, orthogonalen axonometrischen Systeme entsprechen. Sind im Raume alle drei Axen zur Projektionsebene gleich geneigt, so ergiebt sich das isometrische, sind nur zwei Axen gleich geneigt, während die dritte eine verschiedene Neigung hat, so entsteht ein monodimetrisches, bei drei verschiedenen Axenneigungen ein anisometrisches Axenverhältniss. Für gewisse Stellungen der Axen im Raume erhält man bei beliebiger Richtung der projizirenden Linien andere, bekannte Projektionen. Diess ist namentlich der Fall, wenn zwei Axen im Raume parallel zur Projektionsebene sind, die dritte also senkrecht zu derselben steht. Eine beliebige schiefe Projektion dieser Axen ergiebt bekanntlich die Axenrichtungen für die schon seit älterer Zeit häufig angewendeten kavalierperspektivischen, oder die im engern Sinne sogenannten parallelperspektivischen Zeichnungen, bei welchen zwei Axen stets rechtwinklig zu einander und in der wahren Grösse erscheinen, während die dritte eine ganz beliebige Länge und Richtung haben kann. Würde man die Axen im Raume in irgend eine andere einfache und regelmässige Stellung zur Projektionsebene bringen, so erhielten die schiefen Projektionen derselben ebenfalls andere Eigenthümlichkeiten, vermöge welcher die nach ihnen gezeichneten Figuren mehr oder minder regelmässig oder verschoben erscheinen müssten. Nimmt man z. B. wiederum alle drei Axen im Raume gleich geneigt zur Projektionsebene an, wie bei den isometrischen Figuren, projizirt man aber dieselben jetzt schief, so bilden zwar die Projektionen der Endpunkte der Axen stets die drei Ecken eines gleichseitigen Dreieckes. Die Projektion des Schnittpunktes der drei Axen fällt dagegen jetzt nicht mehr in die Mitte dieses Dreieckes, sondern kann, je nach der Richtung der projizirenden Linien, an jede beliebige Stelle inner- oder ausserhalb desselben gelangen. In den nach diesen Axenprojektionen gezeichneten Figuren würden sodann nicht, wie bei den isometrischen, alle drei Hauptrichtungen gleichmässig verkürzt erscheinen, sondern sowohl die Länge der Axen, als die zwischen ihnen liegenden Winkel wären verschieden; in natürlicher Grösse, Lage und Gestalt erschienen dagegen alle Linien, welche mit der Projektionsebene, hier also mit der durch die drei Endpunkte der Axen im Raume gehender Diagonalebene parallel sind.

Man könnte einlässlicher, als es hier bei den wenigen berührten Fällen geschehen ist, die Eigenschaften der Axenprojektionen für alle, sich irgendwie auszeichnenden Stellungen der Axen im Raume und für alle Richtungen der projizirenden Linien untersuchen. Namentlich würde sich auch die Frage aufwerfen lassen, ob bei der jedenfalls sehr grossen Menge verschiedener Verhältnisse, welche zwischen der Länge der Axenprojektionen und den von diesen Projektionen eingeschlossenen Winkeln vorkommen, nicht vielleicht jedes beliebige Axenverhältniss bei beliebigen Winkeln durch eine passende Annahme der Stellung den Axen im Raume und der projizirenden Linien erhalten werden könnte, oder ob in den Projektionen gewisse Axenverhältnisse und Winkel nicht gleichzeitig vorkommen können, und welche? Andrerseits wäre es auch möglich, dass zwei oder mehrere verschiedene Stellungen der Axen im Raume bei gewissen Richtungen der projizirenden Linien gleiche Projektionen lieferten, dass also dieselbe Axenprojektion nicht nur nicht unmöglich wäre, sondern sogar auf mehrere Arten entstehen könnte.

Alle diese Fragen sollen jetzt um so weniger erörtert werden, da diejenigen aus ihnen, welche am meisten praktische Wichtigkeit besitzen, bei Behandlung der zweiten Aufgabe, zu welcher jetzt übergegangen werden soll, ihre Lösung finden werden.

Aufgabe 2: *Aus der Länge und Richtung der Projektionen der Axen die Länge und Richtung der Axen im Raume und die Richtung der projizirenden Linien zu bestimmen.*

Die Aufgabe soll zunächst in der hier ausgesprochenen Allgemeinheit behandelt werden. Es wird sich durch die Behandlung von selbst ergeben, ob die angenommenen Axenprojektionen gewissen Bedingungen unterworfen sein müssen, damit die Aufgabe lösbar sei, oder nicht.

a, b, c und S Fig. 1 seien die Projektionen der drei Endpunkte und des gemeinsamen Schnittpunktes der drei rechtwinklig zu einander stehenden und gleich lang gedachten Axen im Raume. Diese vier Punkte seien ganz willkührlich angenommen, so dass also auch die Länge und Richtung der drei Axenprojektionen Sa, Sb, Sc ganz beliebig ist.

Man denke sich nun zuerst alle drei Axen über S hinaus bis a_1, b_1 und c_1 verlängert, so dass $Sa_1 = Sa$, $Sb_1 = Sb$, $Sc_1 = Sc$ sei. Diesen Verlängerungen der Axenprojektionen entsprechen drei ähnliche Verlängerungen der Axen im Raume selbst. Man kann mithin die Linien aa_1, bb_1, cc_1 als die Projektionen dreier senkrecht zu einander stehenden Kugeldurchmesser ansehen. Durch die Endpunkte von je zweien dieser Durchmesser kann sodann je ein grösster Kreis der Kugel gelegt werden. Die Projektionen der hiedurch erhaltenen drei grössten Kreise erscheinen bei jeder Richtung der projizirenden Linien und bei jeder Lage der Axen im Raume als Ellipsen; und die Projektionen der zwei Kugeldurchmesser, durch deren Endpunkte einer jener grössten Kreise geht, sind zwei konjugirte Durchmesser der diesem Kreise entsprechenden Ellipse. Man erhält mithin in Fig. 1:

die Ellipsen:	mit den konjug. Durchmessern:
$a\,b\,a_1\,b_1$	aa_1 und bb_1,
$a\,c\,a_1\,c_1$	aa_1 „ cc_1,
$b\,c\,b_1\,c_1$	bb_1 „ cc_1.

Je zwei dieser Ellipsen haben also stets einen ihrer conjugirten Durchmesser gemeinsam und schneiden sich in den Endpunkten desselben.

Es ist kein Fall denkbar, in welchem diese drei Ellipsen unmöglich wären. Sie können zwar in Kreise und in gerade Linien übergehen, einer ihrer conjugirten Durchmesser kann selbst unendlich gross werden, immer aber bleibt es möglich, sie als Ellipsen zu betrachten, deren Axen der Länge und Lage nach angegeben werden können.

Denkt man sich nun ausser den Projektionen der drei grössten Kreise auch die Projektion der ganzen Kugel, welcher sie angehören sollen, so erscheint diese Projektion im Allgemeinen ebenfalls als eine Ellipse, welche jede der drei bisher betrachteten Ellipsen in zwei Punkten berührt und sie alle vollständig umschliesst. Nur in dem speziellen Falle, wenn die projizirenden Linien senkrecht zur Projektionsebene stehen, ist die Projektion der Kugel nicht eine Ellipse, sondern ein, die drei übrigen Ellipsen berührender und einschliessender Kreis. Würde man diese Kugelprojektion, sei sie eine Ellipse oder ein Kreis, kennen, so liesse sich mit Leichtigkeit die Kugel im Raume selbst, mithin auch die Lage und Länge der Axen, deren Projektionen gegeben sind, bestimmen, womit die gestellte Aufgabe gelöst wäre.

Es muss daher zunächst untersucht werden, ob stets oder nur in gewissen Fällen eine Ellipse denkbar sei, welche alle drei der oben beschriebenen Ellipsen zugleich einschliesst und in zwei Punkten berührt und ob diese Ellipse stets die Projektion der gedachten Kugel ist, oder ob es nicht auch Ellipsen mit den angegebenen Eigenschaften giebt, welche etwa eine andere Bedeutung haben; alsdann wäre ferner zu untersuchen, wie diese Ellipse bestimmt werden könne. Die Beantwortung der ersten Frage kann auf folgendem Wege gefunden werden.

Man denke sich durch die Endpunkte von zwei der gegebenen Axen Gerade gelegt, welche parallel zur dritten Axe seien, z. B. durch die Punkte b, b_1, c und c_1 Fig. 1 Parallele zu aa_1. Diese Geraden werden die beiden Ellipsen, denen die Axe, mit welcher sie parallel sind, nicht angehört, in den Punkten, durch welche sie gezogen worden sind, berühren. Hier werden also die durch b und b_1 gezogenen Geraden die Ellipse $a\,b\,a_1\,b_1$ in b und b_1, und die durch c und c_1 gezogenen Geraden die Ellipse $a\,ca_1\,c_1$ in c und c_1 berühren. Nun sind entweder alle vier Punkte b, b_1, c und c_1 in gleicher senkrechter Entfernung von aa_1, oder, was der gewöhnliche Fall ist, eines der beiden Punktenpaare ist weniger weit, das andere weiter von aa_1 gelegen. Im ersten Falle werden von den vier bezeichneten Geraden je zwei auf der gleichen Seite von aa_1 befindliche zusammenfallen; im andern Falle dagegen befinden sich die beiden Geraden, welche durch die näher bei aa_1 liegenden Punkte gezogen wurden, zwischen denen, welche durch die entfernteren Punkte gehen. Im ersten Falle schliessen alle vier Gerade, im letztern die zwei von aa_1 entferntern die beiden Ellipsen $a\,b\,a_1\,b_1$ und $a\,c\,a_1\,c_1$ vollständig zwischen sich sich ein und berühren zugleich mindestens eine dieser Ellipsen. Sind z. B. in Fig. 1 die Punkte c und c_1 weiter von aa_1 entfernt als b und b_1, so werden die durch c und c_1 parallel zu aa_1 gezogenen Geraden nicht allein die Ellipse $a\,c\,a_1\,c_1$ in c

und c_1 berühren, sondern auch sowohl diese als die Ellipse $a\,b\,a_1\,b_1$ ganz zwischen sich einschliessen.

Während diese Geraden die Ellipsen $a\,b\,a_1\,b_1$ und $a\,c\,a_1\,c_1$ paarweise berühren, schneiden sie dagegen die dritte Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$, welcher die Axe aa_1 nicht angehört, in den vier ebengenannten Punkten, weil diese Ellipse die beiden ersten in den genannten Punkten ebenfalls schneidet. Es müssen daher an diese dritte Ellipse zwei Tangenten gezogen werden können, welche ebenfalls parallel zu $a\,a_1$ und noch weiter von dieser Linie entfernt sind, als die durch b und b_1, c und c_1 gezogenen Geraden. Diese Tangenten, deren Berührungspunkte mit $b\,c\,b_1\,c_1$ durch o und o_1 bezeichnet werden mögen, werden daher nicht nur die beiden Ellipsen $a\,b\,a_1\,b_1$ und $a\,c\,a_1\,c_1$, sondern auch die dritte Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ ganz zwischen sich einschliessen. Da alle bisher besprochenen Operationen bei jeder Lage und Länge der drei Axen denkbar sind, so folgt hieraus, dass die zwei an die Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ gezogenen Tangenten, welche parallel zu der nicht dieser Ellipse zugehörenden Axe aa_1 sind, alle drei Ellipsen vollständig zwischen sich einschliessen. Da ferner dasselbe, was von der Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ und der Axe aa_1 gilt ebenfalls auch von den beiden andern Ellipsen und den in ähnlichem Verhältniss zu ihnen befindlichen Axen bewiesen werden kann, so lässt sich mithin folgender Satz behaupten: Die beiden, an irgend eine der drei gegebenen Ellipsen, parallel zu der nicht in ihr liegenden Axe gezogenen Tangenten schliessen stets alle drei Ellipsen vollständig zwischen sich ein. Es folgt hieraus unter Anderm, dass man stets ein die drei Ellipsen einschliessendes Sechseck ziehen kann, dessen Seiten paarweise parallel zu einer der drei Axen sind und die Ellipse, welcher diese Axe nicht angehört, berühren. Von dieser Folgerung soll indessen hier kein unmittelbarer Gebrauch gemacht werden.

Man denke sich nun eine der drei Axen, z. B. wieder aa_1, nach beiden Seiten unendlich verlängert, und betrachte diese unendlich verlängerte Axe und die Gerade $o\,o_1$ als zwei konjugirte Durchmesser einer neuen Ellipse. Dieselbe wird offenbar die Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ in o und o_1 berühren und, da sie ebenfalls unendlich lang ist und mit den durch o und o_1 gehenden Tangenten zusammenfällt, sämmtliche Ellipsen einschliessen, mithin auch die beiden Ellipsen $a\,b\,a_1\,b_1$ und $a\,c\,a_1\,c_1$ entweder gar nicht treffen oder ebenfalls berühren. Im letztern Falle wäre die neue, unendlich lange Ellipse bereits die gesuchte Kugelprojektion. Behält man aber den ersten, allgemeinen Fall im Auge, so denke man sich, die auf aa_1 fallende Axe werde immer kleiner, bis ihre Endpunkte endlich auf die Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ selbst fallen; alsdann fällt die neue Ellipse mit der Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ zusammen und schneidet daher die beiden andern Ellipsen in b, b_1 und c, c_1. Es muss daher für die auf aa_1 fallende Axe eine Länge geben, bei welcher die neue Ellipse, ausser der Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$, auch noch eine der beiden Ellipsen $a\,b\,a_1\,b_1$ und $a\,c\,a_1\,c_1$ berührt, die andere noch nicht trifft oder ebenfalls berührt und alle drei vollständig einschliesst. Würde die neue Ellipse die beiden Ellipsen $a\,b\,a_1\,b_1$ und $a\,c\,a_1\,c_1$, also alle drei Ellipsen zugleich berühren und einschliessen, so wäre sie wiederum die gesuchte Kugelprojektion.

Allein auch hier werde wieder der allgemeine Fall festgehalten; alsdann lässt sich behaupten, dass unter allen Umständen eine Ellipse denkbar ist, welche die Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ und eine der beiden andern gegebenen Ellipsen berührt, die dritte der gegebenen Ellipsen gar nicht trifft und alle drei Ellipsen einschliesst.

Um die folgenden Betrachtungen einfacher ausdrücken zu können, soll angenommen werden, diese erste abgeleitete Ellipse soll ausser $b\,c\,b_1\,c_1$ noch die Ellipse $a\,b\,a_1\,b_1$ berühren, $a\,c\,a_1\,c_1$ dagegen einschliessen, aber nicht treffen.

Man fasse nun wieder die Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ und diejenige der beiden andern, welche von der abgeleiteten Ellipse ebenfalls noch berührt wird, also hier $a\,b\,a_1\,b_1$ in's Auge und bemerke, dass von den vier Endpunkten $a\,a_1$ und $c\,c_1$ derjenigen beiden Axen dieser Ellipsen, welche zugleich der dritten Ellipse $a\,c\,a_1\,c_1$ angehören, entweder die Punkte a, a_1 von der dritten Axe $b\,b_1$ weiter entfernt sein müssen als c, c_1 oder umgekehrt. Sind a und a_1 die beiden entfernteren Punkte, so werden zwei durch sie an die Ellipse $a\,b$ $a_1\,b_1$ gezogene Tangenten sowohl diese Ellipse, als die Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ ganz zwischen sich einschliessen und parallel mit der Axe $b\,b_1$ sein; dagegen werden diese Tangenten die Ellipse $a\,c\,a_1\,c_1$ in a und a_1 schneiden. Man kann nun wieder statt dieser Tangenten eine unendlich lange Ellipse annehmen, von welcher die Gerade $a\,a_1$ und eine auf die Verlängerung von $b\,b_1$ fallende unendlich lange Linie zwei conjugirte Durchmesser sind, und diese Ellipse wird ebensogut, wie die beiden Tangenten, die Ellipse $a\,b\,a_1\,b_1$ einschliessen und in a und a_1 berühren, die Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ ebenfalls einschliessen, aber nicht berühren, die dritte

Ellipse $a\,c\,a_1\,c_1$ aber in a und a_1 schneiden. Durch allmählige Verkürzung des auf $b\,b_1$ fallenden Durchmessers dieser Ellipse kann dieselbe stets eine solche Grösse erhalten, dass sie, ausser der Ellipse $a\,b\,a_1\,b_1$ auch die Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ berührt und einschliesst, während sie dagegen die Ellipse $a\,c\,a_1\,c_1$ stets in a und a_1 schneidet. Ihre Berührungspunkte mit der Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ mögen mit p und p_1 bezeichnet werden. Sollten etwa alle vier Punkte a, a_1, c und c_1 gleich weit von der Axe $b\,b_1$ entfernt sein, so hätte die zuerst angenommene, unendlich lange Ellipse bereits die eben ausgesprochenen Eigenschaften.

Wären c und c_1 weiter von der Axe $b\,b_1$ entfernt als a und a_1, so erhielte man durch ähnliche Betrachtungen eine abgeleitete Ellipse, welche die Ellipsen $b\,c\,b_1\,c_1$ und $a\,b\,a_1\,b_1$ berührte und einschlösse, $a\,c\,a_1\,c_1$ aber schnitte und es würde alsdann die Berührung mit $a\,b\,a_1\,b_1$ in zwei unbekannten Punkten, diejenige mit $b\,c\,b_1\,c_1$ in c und c_1, und der Schnitt mit $a\,c\,a_1\,c_1$ ebenfalls in c und c_1 erfolgen.

Es geht also aus dem Gesagten hervor, dass stets eine zweite abgeleitete Ellipse denkbar ist, welche die Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ und eine der beiden andern gegebenen Ellipsen, hier die Ellipse $a\,b\,a_1\,b_1$ berührt und einschliesst, die dritte Ellipse aber, hier also $a\,c\,a_1\,c_1$, schneidet.

Hieraus folgt ferner, dass stets zwei abgeleitete Ellipsen denkbar sind, welche zwei gegebene Ellipsen, z. B. $b\,c\,b_1\,c_1$ und $a\,b\,a_1\,b_1$ berühren und einschliessen, während dagegon eine von ihnen die dritte der gegebenen Ellipsen, $a\,c\,a_1\,c_1$, ebenfalls einschliesst, die andere aber dieselbe schneidet. In Fig. 1 sind diese beiden abgeleiteten Ellipsen punktirt gezeichnet; die

Berührungspunkte der ersten mit der Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ wurden mit o, o_1 bezeichnet; die der zweiten mit derselben Ellipse sind p und p_1, würden aber, wenn c und c_1 weiter von $b\,b_1$ entfernt wären als a und a_1, auf c und c_1 fallen.

Nachdem die Möglichkeit dieser beiden Ellipsen für alle Fälle nachgewiesen worden ist, lässt sich leicht einsehen, dass eine derselben durch allmählige Veränderung ihrer Gestalt und Lage in die andere übergehen kann, ohne indessen aufzuhören, stets die beiden Ellipsen $b\,c\,b_1\,c_1$ und $a\,b\,a_1\,b_1$ zu berühren. Die erste abgeleitete Ellipse befindet sich nämlich zwischen den durch o und o_1 gehenden, mit $a\,a_1$ parallelen Tangenten der Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ und die Gerade $o\,o_1$, sowie eine auf $a\,a_1$ fallende Linie bilden zwei ihrer conjugirten Durchmesser. Die zweite abgeleitete Ellipse dagegen liegt zwischen den durch p und p_1 an $b\,c\,b_1\,c_1$ gezogenen Tangenten, und die Gerade $p\,p_1$, sowie eine mit jenen Tangenten parallele, durch S gehende Gerade $q\,q_1$ bilden zwei konjugirte Durchmesser dieser zweiten Ellipse. Fallen p und p_1 auf c und c_1, so fällt $q\,q_1$ auf die Verlängerung von $b\,b_1$. Man denke sich nun, der auf aa_1 fallende Durchmesser der ersten abgeleiteten Ellipse drehe sich um den Punkt S bis in die Stellung qq_1. Wenn er in irgend einer Zwischenstellung $a_2\,a_3$ angekommen ist, ziehe man parallel zu ihm zwei Tangenten an die Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ und zwei andere, ähnlich liegende an die Ellipse $a\,b\,a_1\,b_1$; zwei dieser Tangenten werden sodann im Allgemeinen weiter von dem Durchmesser $a_2\,a_3$ entfernt sein, als die beiden andern. Sind v und v_1 die Berührungspunkte der beiden entfernteren Tangenten mit ihrer Ellipse, mögen dieselben auf

$b\,c\,b_1\,c_1$ oder $a\,b\,a_1\,b_1$ liegen, so kann man sich stets eine abgeleitete Ellipse denken, von welcher die Gerade $v v_1$ und ein Stück der Linie $a_2\,a_3$ zwei konjugirte Durchmesser sind und welche die beiden Ellipsen $b\,c\,b_1\,c_1$ und $a\,b\,a_1\,b_1$ einschliesst und berührt. Sollten alle vier mit $a_2\,a_3$ parallelen Tangenten gleich weit von diesem Durchmesser entfernt sein, so wäre die zugehörige abgeleitete Ellipse unendlich lang und würde mit den vier Tangenten zusammenfallen. Denkt man sich solche abgeleitete Ellipsen für alle Stellungen gebildet, welche $a_2\,a_3$ während der Drehung von $a\,a_1$ bis $q q_1$ annimmt, so bilden dieselben eine Reihe allmählig in einander übergehender Ellipsen, welche alle die beiden Ellipsen $b\,c\,b_1\,c_1$ und $a\,b\,a_1\,b_1$ einschliessen und berühren, während die erste von ihnen die Ellipse $a\,c\,a_1\,c_1$ umschliesst und nicht trifft, die letzte aber dieselbe Ellipse schneidet. Mann kann daraus den Schluss ziehen, dass mindestens eine jener abgeleiteten Ellipsen auch die Ellipse $a\,c\,a_1\,c_1$ berühren und einschliessen muss und dass also unter allen Umständen mindestens eine Ellipse denkbar ist, welche alle drei gegebenen Ellipsen einschliesst und berührt.

Es muss ferner beachtet werden, dass die Axe $a\,a_1$ auf zwei verschiedene Arten in die Stellung der Axe $q q_1$ übergehen kann, indem sie sich entweder um den einen oder andern der durch die beiden Axen gebildeten Nebenwinkel dreht und dass die oben angestellten Betrachtungen auf diese beiden Drehungen Anwendung finden. Es folgt daraus, dass auch mittelst der zweiten Drehung eine Ellipse erhalten wird, welche alle drei gegebenen Ellipsen berührt und einschliesst. Sowohl die hier sich aufdrängende Frage, ob nicht etwa die durch die erste Drehung erhaltene

Ellipse identisch mit der durch die zweite Drehung erhaltenen sei, sowie die entscheidenden Untersuchungen darüber, ob und in welchen Fällen durch jede Drehung nur eine oder mehrere Ellipsen mit den geforderten Eigenschaften erhalten werden, sollen jedoch in diesem Aufsatze nicht weiter besprochen werden. Dagegen verdient ein anderer Umstand noch einige Beachtung, der sonst leicht Irrthümer veranlassen könnte.

Bei allen bisher durchgeführten Betrachtungen wurde stets angenommen, dass die drei gegebenen Ellipsen sich in den Endpunkten der Axen schneiden, und die gewonnenen Resultate sind ausschliesslich mit Benutzung dieser Schnittpunkte erhalten worden. Nun schneiden sich aber zwei konzentrische Ellipsen entweder gar nicht oder dann in vier, niemals aber nur in zwei Punkten. Ausser den Endpunkten der Axen müssen sich also die gegebenen Ellipsen noch in sechs andern Punkten schneiden und es entsteht daher die Frage, ob nicht eine zweite Lösung der Aufgabe mit Benutzung dieser zweiten Gruppe von Schnittpunkten möglich sei. Es ist unschwer einzusehen, dass diese Frage verneinend beantwortet werden muss. Zunächst besitzen die Ellipsen in diesen neuen Schnittpunkten eine Eigenschaft nicht, welche ihnen in den Endpunkten der Axen zukommen, und welche der obigen Lösung der gestellten Aufgabe zu Grunde gelegt worden sind. Es ist diess die Eigenschaft, dass je zwei Ellipsen, z. B. $a\,b\,a_1\,b_1$ und $a\,c\,a_1\,c_1$, in ihren vier Schnittpunkten mit der dritten Ellipse, also in b, b_1, c und c_1, Tangenten haben, welche unter sich und mit der Verbindungslinie aa_1 der Schnittpunkte beider Ellipsen selbst parallel sind. Da die Ellipsen in den sechs andern Schnittpunkten diese Eigenschaft im Allgemeinen nicht besitzen, so lässt sich von diesen Schnittpunkten nicht immer eine Ellipse ableiten, welche alle drei gegebenen Ellipsen einhüllt und berührt.

Allein auch in den Fällen, in welchen dieses möglich ist, wäre eine auf diese Weise bestimmte Ellipse als Lösung der vorliegenden Aufgabe doch nicht zulässig, weil sie nicht als Projektion einer Kugel betrachtet werden könnte, von welcher die drei gegebenen Ellipsen Projektionen dreier grösster, sich senkrecht schneidender Kreise wären. Zu der oben beschriebenen Auflösung der Aufgabe wurden nämlich nur solche Eigenschaften der gegebenen ebenen Figur der drei Axen benutzt, welche analogen Eigenschaften der im Raume gedachten Kugel entsprachen. So entsprachen namentlich alle Eigenschaften der aus den Axen abgeleiteten drei Ellipsen gewissen Eigenschaften der drei grössten Kreise, deren Projektionen sie sein sollen. Zu diesen Eigenschaften der Kreise gehört nun aber auch, dass sie sich in den Endpunkten der drei Kugeldurchmesser, durch welche sie gehen, aber auch nur in diesen Punkten schneiden. Diesen Punkten entsprechen die sechs Schnittpunkte der Ellipsen in ihren Axen; die sechs andern Punkte aber, in denen die Ellipsen sich schneiden, entsprechen keinen wirklichen Schnittpunkten der Kreise, deren Projektionen sie sein sollen, sondern sind nur scheinbare Schnittpunkte derselben, welche erscheinen, wenn man sie in der Richtung der projizirenden Linien aus unendlicher Ferne angeschaut denkt. Die Schlüsse, welche man aus diesen Schnittpunkten ziehen kann, lassen sich also nicht unmittelbar auf die im Raume gedachte Kugel anwenden. Wollte man mit Hülfe derselben die Kugel bestimmen, welche gesucht wird, so müsste man jedenfalls auf ganz andere Weise verfahren, als es eben geschehen ist.

Das Ergebniss der bisher geführten Untersuchungen lässt sich daher auf folgende Weise ausdrücken: drei beliebige, von einem Punkte ausgehende Gerade können als Halbmesser dreier Ellipsen angesehen werden, in der Weise, dass je zwei jener Geraden mit ihren gleich grossen Verlängerungen jenseits ihres gemeinsamen Ausgangspunktes konjugirte Durchmesser je einer dieser Ellipsen sind. Diese Ellipsen können stets als Parallelprojektionen dreier sich rechtwinklig schneidender grössten Kreise einer Kugel, und die gegebenen Geraden mit ihren Verlängerungen als die Projektionen der durch die Schnittpunkte dieser Kreise gehenden Kugeldurchmesser angesehen werden. Endlich lässt sich stets mindestens eine Ellipse denken, welche jene drei Ellipsen einhüllt und berührt, und welche als Projektion dieser Kugel angesehen werden kann.

Es ist nun noch zu untersuchen, welche Grösse und Stellung jener grössten Kreise und ihrer Durchmesser im Raume und welche Richtung der projizirenden Linien den drei auf der Zeichnungsfläche gegebenen Geraden und den aus ihnen abgeleiteten Ellipsen entspreche. Es seien zu diesem Zwecke in Fig. 2 die gegebenen Geraden, sowie die aus ihnen abgeleiteten Ellipsen dargestellt. Alsdann ist zunächst der Durchmesser der Kugel, deren schiefe Projektion die die grösste der vier Ellipsen MNM_1N_1 ist, offenbar gleich der kleinen Axe der Letztern. Ist NN_1 diese kleine Axe, so ist mithin die Länge der im Raume befindlichen Geraden, deren Projektionen die gegebenen Geraden sind, gleich NS oder gleich $N_1 S_1$.

Daraus lassen sich nun leicht zunächst zwei orthogonale Projektionen der Kugel ableiten. Man nehme die Zeichnungsebene, auf welcher die gegebenen Geraden und die Ellipsen liegen, als die horizontale Projektionsebene an und lasse die vertikale Projektionsebene durch eine Linie $M_2 M_2'$, welche parallel zu MM_1 sei, gehen. Alsdann ist $M_2 M_2'$ die vertikale Projektion der Ellipse $MNM_1 N_1$, S_2 die des Punktes S und der Kreis $m_2 m_2'$, dessen Mittelpunkt S_2 und dessen Durchmesser gleich NN_1 ist, die der Kugel. Die horizontale Projektion der Kugel ist ein gleich grosser Kreis $m_1 m_1'$, dessen Mittelpunkt S ist.

Daraus ergiebt sich ferner für die Richtung der projizirenden Linien, durch welche man als schiefe Projektion der Kugel die Ellipse $MNM_1 N_1$ erhält, eine Gerade, welche in der vertikalen Projektion von M_2 oder M_2' ausgeht, den Kreis $m_2 m_2'$ berührt und im Grundrisse eine mit MM_1 parallele Linie ist. Es ist offenbar, dass zwei solcher Richtungen möglich sind, welche den gleichen Winkel mit der horizontalen Projektionsebene bilden; die vertikale Projektion der Linie, welche die eine dieser Richtungen angiebt, ist die Tangente $M_2 m_2$, die der andern ist $M_2 o_2$; die horizontalen Projektionen beider Linien sind parallel zu MM_1. Auch die gegebenen Geraden können mithin als schiefe Parallelprojektionen nach der einen und nach der andern dieser beiden Richtungen betrachtet werden.

Um endlich die orthogonalen Projektionen der Geraden Sa, Sb und Sc selbst zu bestimmen, verfahre man auf folgende Weise. Man beginne mit der Bestimmung der Projektionen eines der drei Endpunkte a, b, c, z. B. des Punktes c. Zu diesem Zwecke bestimme man die vertikale Projektion a_2 von a und ziehe die diesem Punkte zugehörende projizirende Linie $a_2 A_2$, parallel zu $M_2 m_2$, indem man vorerst nur diese Richtung der projizirenden Linien berücksichtigt. Alsdann suche man die Schnittepunkte dieser Linie mit der Kugel, indem man etwa durch a eine Hülfsebene parallel zur vertikalen Projektionsebene legt und den Kreis aufsucht, in welchem diese Ebene die Kugel schneidet. Die Projektionen $A_1 A_2$, $A_1' A_2'$ der Schnittpunkte dieses Kreises mit der Linie $a_2 A_2$, $a A_1$ sind sodann die orthogonalen Projektionen, welche der Punkt a haben kann. Da kein Grund vorhanden ist, die eine oder andere dieser Projektionen für unmöglich zu halten, so giebt es mithin zwei Punkte im Raume, deren schiefe Projektionen, bei derselben Richtung der projizirenden Linien, auf a fallen, und mithin auch zwei gleich lange, aber verschieden liegende Gerade, deren schiefe Projektion Sa ist. Die orthogonalen Projektionen dieser beiden Geraden sind SA_1, $S_2 A_2$ und SA_1' $S_2 A_2'$. Diese beiden Geraden liegen nicht etwa symmetrisch zur horizontalen Projektionsebene, sondern bilden mit ihr ganz verschiedene Winkel.

Auf ähnliche Weise erhält man für jeden der beiden andern Punkte b und c zwei verschiedene Punkte im Raume, allein in der Weise, dass zu jedem der beiden für a gefundenen Punkte nur einer der beiden für b und einer der für c gefundenen Punkte zulässig ist. Es ist nämlich hiebei Folgendes zu berücksichtigen. Denkt man sich, die Kugel werde von einem Punkte aus betrachtet, welcher auf der durch S gehenden und parallel zu Mm_1, $M_2 m_2$ liegenden Geraden $O_1 O_1'$, $O_2 O_2'$ in unendlicher Entfernung von S sich befinde, so ist ihr Bild auf der horizontalen Projektionsebene die schiefe Projektion $M N M_1 N_1$. Von diesem Standpunkte aus betrachtet ist die eine Hälfte der gefundenen sechs Punkte sichtbar, die andere, wenn man sich die Kugel undurchsichtig denkt, unsichtbar. Ist z. B. der Standpunkt auf der über der horizontalen Projektionsebene liegenden Hälfte der Linie $O_2 O_2'$, so werden alle Punkte, deren vertikale Projektionen A_2, B_2, C_2 sind, sichtbar, die drei andern mit den vertikalen Projektionen A_2', B_2' und C_2' unsichtbar sein. Nimmt man nun an, es soll zunächst derjenige zu a gehörige Punkt betrachtet werden, welcher sichtbar ist, also hier der Punkt $A_1 A_2$, so findet man auf folgende Weise denjenigen der beiden Punkte $B_1 B_2$ und $B_1' B_2'$, der zu $A_1 A_2$ gehört. Man verfolge in der Figur $M N M_1 N_1$ den kleinsten Ellipsenbogen, welcher von a nach b geht, also denjenigen, welcher nicht vorher die Punkte b_1 und a_1 trifft, und sehe nach, ob derselbe zwischen a und b die Ellipse $M N M_1 N_1$ berühre oder nicht. Berührt er dieselbe nicht, so liegt offenbar der ganze Bogen ab, und mithin auch b ebensogut auf der sichtbaren Hälfte der Kugel, wie der Punkt a selbst, und darf daher nur der Punkt $B_1 B_2$ gewählt werden. Berührt dagegen der Bogen $a b$ die Ellipse $M N M_1 N_1$ mit irgend einem zwischen a und b liegendem Punkte, so ist der zwischen a und diesem Punkte liegende Theil des Bogens auf der sichtbaren, der zwischen b und dem Berührungspunkte liegende Theil dagegen auf der unsichtbaren Hälfte der Kugel. Da mithin auf b in diesem Falle unsichtbar ist, so darf daher jetzt nur

$B_1' B_2'$ gewählt werden. Auf ähnliche Weise lässt sich nachweisen, dass nur einer der beiden Punkte $C_1 C_2$, $C_1' C_2'$ zu $A_1 A_2$ gehört; es ist in der vorliegenden Figur der Punkt $C_1 C_2$.

Es ergiebt sich also hieraus, dass die drei gegebenen Geraden *Sa*, *Sb* und *Sc* als die schiefen Projektionen von zwei verschiedenen Systemen im Raume befindlicher, gleich langer und senkrecht zu einander stehender Geraden, bei derselben Richtung der projizirenden Linien, angesehen werden können. Die orthogonalen Projektionen beider Systeme können auf die eben angegebene Weise bestimmt werden.

Für die zweite Richtung, $M_2 o_2$ der projizirenden Linien, lassen sich ebenfalls zwei verschiedene Stellungen der im Raume gedachten Linien angeben, und es ist klar, dass die für die beiden Richtungen der projizirenden Linien gefundenen Stellungen der im Raume gedachten Geraden mit Bezug auf die horizontale Projektionsebene symmetrisch zu einander liegen. Nur wenn die projizirenden Linien senkrecht zur Projektionsebene zu stehen kommen, fallen je zwei von den eben gefundenen Stellungen der im Raume gedachten Linien zusammen und die zwei übrig bleibenden Stellungen derselben stehen mit Bezug auf die horizontale Projektionsebene symmetrisch zu einander.

Hiermit sind die allgemeinen Untersuchungen über die drei gegebenen Geraden *Sa*, *Sb*, *Sc*, insofern man sie als Parallelprojektionen dreier gleich langen, rechtwinklig zu einander stehenden Linien im Raume betrachtet, geschlossen, und die gewonnenen Resultate können in der Gestalt eines axonometrischen Satzes auf folgende Weise ausgesprochen werden:

Drei von einem Punkte *S* ausgehende Gerade *Sa*,

Sb, Sc mit beliebiger Länge und Richtung können als drei gleich lange und senkrecht zu einander stehende axonometrische Axen betrachtet werden. Ihnen entsprechen vier verschiedene Systeme von je drei geometrisch gleichen und senkrecht zu einander stehenden Axen im Raume und zwei verschiedene Richtungen der projizirenden Linien, vermittelst denen sie aus diesen räumlichen Axen abgeleitet werden können. Legt man den gemeinsamen Schnittpunkt aller räumlichen in den Schnittpunkt S der gegebenen axonometrischen Axen, so stehen von jenen vier räumlichen Systemen je zwei symmetrisch zu einander mit Bezug auf die Projektions- oder Zeichnungsebene. Die beiden Systeme projizirender Linien sind zur Zeichnungsebene gleich geneigt und vertheilen sich in der Art, dass zwei symmetrischen Stellungen der räumlichen Axen stets zwei nicht parallele Systeme projizirender Linien entsprechen. Nur in dem Falle, wenn die projizirenden Linien senkrecht zur Zeichnungsebene stehen, giebt es nur zwei Systeme räumlicher Axen, deren Projektionen die gegebenen axonometrischen Axen sind, und diese beiden Systeme sind symmetrisch zu einander mit Bezug auf die Zeichnungsfläche.

Will man diese Ergebnisse als geometrischen Satz ausdrücken, so lassen sie sich etwa auf folgende Weise formuliren:

Vier beliebige, in einer Ebene liegende Punkte können als Parallelprojektionen der vier Ecken einer dreiseitigen Pyramide mit gleich langen und senkrecht zu einander stehenden Scheitelkanten betrachtet werden. Denkt man sich, die Spitze dieser Pyramide falle mit demjenigen der vier gegebenen Punkte zusammen, der als ihre Projektion angenommen wird, so kann die Pyramide, ohne ihre Grösse oder Gestalt zu verändern, vier verschiedene Stellungen im Raume haben, von denen zwei mit Bezug auf die Projektionsebene symmetrisch zu den zwei andern liegen. Die projizirenden Linien haben zwei verschiedene, aber zur Projektionsebene gleich geneigte Richtungen, welche sich auf die Pyramiden in der Art vertheilen, dass die projizirenden Linien von je zwei symmetrisch zu einander stehenden Pyramiden nicht parallel zu einander sind. Nur wenn die projizirenden Linien senkrecht zur Projektionsebene stehen, giebt es nur zwei, symmetrisch zu einander liegende Pyramiden, deren Ecken sich auf die vier gegebenen Punkte projiziren*).

---

*) Anmerkung. Schon vor mehrern Jahren äusserte Prof. Steiner in Berlin bei einem seiner Besuche in der Schweiz, er vermuthe, es müsste sich beweisen lassen, dass vier beliebige Punkte in einer Ebene als Projektionen von vier Eckpunkten einer Pyramide der bezeichneten Art betrachtet werden können. Ich glaubte, Zweifel gegen die Richtigkeit dieser Vermuthung äussern zu sollen, indem ich anführte, es müssten alsdann auch vier in der gleichen Geraden liegende Punkte als Projektionen der vier Pyramidenecken angesehen werden können, was ja nicht möglich sei. In der That wollte damals die Hebung dieses Widerspruches nicht gelingen, indem man stets nur an orthogonale Projektionen dachte. Lässt man dagegen auch schiefe Parallelprojektionen zu, so heben sich alle Schwierigkeiten von selbst — man findet, dass in diesem speziellen Falle die projizirenden Linien mit der Projektionsebene unendlich kleine Winkel bilden, oder mit ihr parallel sind — und so findet sich also, dass der Altmeister der neuern Geometrie schliesslich doch auch hierin das Richtige vermuthet hat.

Es würde nun noch übrig bleiben, eine genaue Construktion anzugeben, mittelst welcher die Ellipse $M N M_1 N_1$ aus den drei gegebenen Axen hergeleitet werden könnte. So leicht es aber ist, diese Ellipsen angenähert zu bestimmen, so wenig ist es mir gegenwärtig möglich, eine allgemein anwendbare Construktion zur genauen Bestimmung derselben anzugeben. Von einer solchen ganz abgesehen, kann die Ellipse auf folgende Weise angenähert bestimmt werden.

Zuerst werden die drei gegebenen Axen Sa, Sb und Sc über den Punkt S hinaus um ihre eigene Grösse nach a_1, b_1, c_1 verlängert. Alsdann werden je zwei und zwei derselben als conjugirte Durchmesser einer Ellipse betrachtet und die drei hiedurch bestimmten Ellipsen gezeichnet. Es ist nicht nöthig, die Axen dieser Ellipsen zu bestimmen, sondern es genügt, durch irgend eine der bekannten Verfahrungsarten eine so grosse Zahl von Punkten derselben zu finden, dass sie vermittelst dieser annähernd genau gezeichnet werden können. Sind diese drei Ellipsen gezeichnet, so ziehe man parallel zu einer der drei Axen, z. B. zu $a a_1$, Tangenten an dieselben und suche von diesen Tangenten diejenigen beiden auf, welche zwei von den drei Ellipsen gar nicht treffen, die dritte aber berühren, und alle drei zwischen sich einschliessen. In Fig. 2 sind diess die an die Ellipse $b c b_1 c_1$ gezogenen Tangenten. Sind o und o_1 die Berührungspunkte dieser Tangenten, so nehme man $o o_1$ als den einen, und eine auf $a a_1$ fallende beliebige Linie, die aber grösser als $a a_1$ sein muss, als den zweiten conjugirten Durchmesser einer Ellipse an und zeichne diese letztere. Diese Ellipse wird nun die beiden Ellipsen, welche nicht durch die Punkte $o o_1$ gehen, entweder gar nicht treffen, schneiden oder berühren, je nachdem man den auf aa_1 fallenden Durchmesser grösser oder kleiner angenommen hat. Würde sie zufällig schon diese beiden Ellipsen berühren, so wäre sie die gesuchte Ellipse. Ist diess nicht der Fall, so verändere man den auf aa_1 fallenden Durchmesser, ohne Veränderung des Durchmessers oo_1, so lange, bis die erhaltene Ellipse die eine der beiden nicht durch oo_1 gehenden Ellipsen berührt, die andere entweder gar nicht trifft oder ebenfalls berührt. Im letzten Falle wäre die Aufgabe wieder gelöst; tritt aber der erste, allgemeinere Fall ein, so nehme man statt des Durchmessers oo_1 einen andern, nahe bei diesem liegenden Durchmesser der durch oo_1 gehenden Ellipse, z. B. $o'o_1'$, als ersten konjugirten Durchmesser der neuen Ellipse an; den zweiten lege man parallel zu den durch o' und o_1' gehenden Tangenten der Ellipse $b\,c\,b_1\,c_1$ und verändere ihre Grösse so lange, bis sie, ausser dieser Ellipse, auch eine der beiden andern Ellipsen berührt, ohne die dritte zu treffen. Auf diese Weise verändere man den Durchmesser $o'o_1'$ so lange, bis die erhaltene Ellipse endlich alle drei ursprünglichen Ellipsen berührt. In der Regel wird diese Ellipse die gesuchte Kugelprojektion sein. Sie wäre dieselbe nur dann nicht, wenn einer der drei Punkte a, b, c nicht ein wirklicher, sondern nur ein scheinbarer Schnittpunkt der durch sie gehenden grössten Kugelkreise wäre. Dieser letzte Fall aber tritt nur dann ein, wenn die erhaltene Ellipse von den drei Bogen ab, ac und bc entweder nur einen, oder aber alle drei zugleich berührte. Sobald sie dagegen entweder gar keinen dieser Bogen berührt, was der gewöhnlichste Fall ist, oder zugleich zwei derselben, so ist sie die gesuchte Kugelprojektion. Wäre sie es nicht, so müsste durch abermalige Veränderung ihrer conjugirten Durchmesser in ähnlicher Weise die richtige Kugelprojektion gesucht werden.

Um den Aufsatz nicht über das absolut Nöthige hinaus zu verlängern, soll von der Behandlung aller besondern Fälle, von denen viele wesentliche Erleichterungen in der Durchführung, andere nicht uninteressante Verhältnisse verschiedener Art darbieten, abgesehen und nur noch Einiges über die Zulässigkeit schiefer Parallelprojektionen als axonometrische Zeichnungen angeführt werden.

Was zunächst die wichtigste Eigenschaft axonometrischer Zeichnungen, die Deutlichkeit der drei Hauptdimensionen des dargestellten Gegenstandes anlangt, so hat man es durchaus in seiner Gewalt, dieselbe für jede einzelne Dimension beliebig zu vermehren oder zu vermindern, weil diese Dimensionen in ganz beliebigem Masse verlängert oder verkürzt werden können. Diess gilt aber nicht bloss für die drei wichtigsten Längendimensionen, sondern auch in einem gewissen Gerade von den durch die drei Axenrichtungen bestimmten drei wichtigsten Flächenrichtungen. Da man nämlich auch die Winkel zwischen den drei Axen beliebig annehmen kann, so können immer zwei von den Rechtecken, welche durch je zwei Axen bestimmt werden, in beliebigem Masse verschoben und in der einen oder andern ihrer Hauptrichtungen verkürzt dargestellt werden, so dass sie sich in beliebigem Grade ihrer wahren Gestalt nähern können. Das dritte dieser Rechtecke ist dagegen stets von den beiden ersten abhängig. Man hat es daher weit mehr in seiner Macht, die Deutlichkeit der verschiedenen Theile des dargestellten Gegenstandes zu vermehren, als bei den orthogonalen axonometrischen Zeichnungen. Diess ist namentlich oft bei Gegenständen mit etwas verwinkelter Gestalt von Werth, bei welchen nicht nur die Haupttheile, sondern auch diese oder jene einzelnen Partien deutlich dargestellt werden sollen, was dann durch eine passende Wahl der Axenlängen und Winkel erreicht werden kann.

Eine fernere Eigenschaft axonometrischer Darstellungen, welche, wenn nicht geradezu gefordert, doch wenigstens gewünscht wird, ist die, dass sie von einer polarperspektivischen Darstellung nicht allzusehr acweichen sollen, damit das Auge von ihnen einen Eindruck empfange, welcher von dem durch den Gegenstand selbst hervorgebrachten nicht sehr verschieden sei. Man ist geneigt, den schiefen Parallelprojektionen in zwei Beziehungen vorzuwerfen, dass sie dieses Ziel nicht so vollständig erreichen, als die orthogonalen Projektionen: weil sie den Gegenstand mehr verzerren sollen und weil sie, um richtig gesehen zu werden, in schiefer Richtung angeschaut werden müssen. Es ist wahr, dass durch schiefe Parallelprojektionen ein bis zu einem beliebigen Grade der Hässlichkeit verzerrtes Bild eines Gegenstandes hergestellt werden kann; ebenso wahr aber ist auch, dass die Verzerrung auf jedes beliebige Minimum reduzirt werden kann. Handelt es sich also um ein Bild, welches dieser mehr ästhetischen als geometrischen Anforderung genügen soll, so hängt es nicht von der Eigenthümlichkeit der Zeichnungsmethode, sondern von dem Geschmacke und der Geschicklichkeit des Zeichners ab, in welchem Masse die Zeichnung jene Eigenschaft besitze; sie kann hässlicher ausfallen, als eine orthogonale Projektion, indem die Methode sich auch den willkührlichsten Hauptverhältnissen fügt, welche der Zeichnung zu Grunde gelegt werden mögen; sie kann aber auch schöner ausfallen, indem die Methode dem Zeichner nicht für die Darstellung aller Gegenstände dieselben Grundverhältnisse vorschreibt, sondern ihm gestattet, für jeden einzelnen Fall die passendsten auszuwählen. Die Anwendung schiefer Parallelprojektionen gewährt also dem Zeichner ebensoviel in der Erlangung der dem Auge gefälligsten Form der Zeichnung, wie in dem Streben nach möglichster Deutlichkeit, einen grössern Spielraum, als die orthogonalen Projektionen.

Auch die Nothwendigkeit, eine schiefe Parallelprojektion schief anzusehen, wenn sie richtig erscheinen soll, bringt bei näherer Betrachtung keine so grossen Uebelstände mit sich, als man auf den ersten Blick glauben möchte. Zunächst darf nicht vergessen werden, dass es sich in der Regel bei guten Zeichnungen dieser Art nicht um sehr schiefe Projektionen handein wird, sondern nur um solche, welche wenig von orthogonalen abweichen. Dann aber muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass gerade das schiefe Anschauen einer Zeichnung vielleicht ebenso oft oder noch öfter absichtslos vorkommt, als das senkrechte. Legt man eine Zeichnung auf einen horizontalen Tisch, vor den man sich hinsetzt oder stellt, so schaut man das Blatt schief an, und es dürfte ganz naturgemäss sein, z. B. bei axonometrischen Illustrationen von Büchern hierauf Rücksicht zu nehmen. Man würde sich die Gegenstände in ihrer natürlichen Stellung im Raume, unter ihnen die horizontale oder etwas geneigte Fläche des Buches als Projektionsebene, und die projizirenden Linien etwa parallel zur mittlern Richtung der Strahlen, welche vom Buche nach dem Auge des Lesers gehen, denken müssen. Die letztgenanute Richtung könnte auch, zur Vermeidung einer zu starken Verkürzung der Höhendimensionen des Gegenstandes, etwas schiefer angenommen werden. Es wäre leicht eine sehr einfache Methode anzugeben, wie bei derselben Stellung der Projektionsebene, der gleichen Richtung der projizirenden Linien und bei der natürlichen senkrechten Stellung des Gegenstandes im Raume, aber für die verschiedenen Stellungen, die er bei einer Drehung um eine senkrechte Axe annimmt, die Länge und Richtung der axonometrischen Axen zu bestimmen ist, so dass das Verkürzungsverhältniss der senkrechten Seitenflächen ganz nach dem jeweiligen Bedürfniss angenommen werden könnte, während die Figur dem Leser doch stets sehr nahe richtig erscheinen würde.

Das schiefe Anblicken einer Zeichnung ist ferner in manchen Fällen beinahe nothwendig, wenn man von ihr, ohne gezwungene Voraussetzungen zu machen, einen ähnlichen Eindruck, wie vom Gegenstande selbst erhalten soll. Diess ist nämlich bei Zeichnungen von Gegenständen der Fall, welche in der Regel hoch über dem Anschauenden liegen, z. B. die Zeichnungen hoch liegender Theile eines Gebäudes. Denkt man sich dieselben auf einer senkrechten Fläche dargestellt, was wohl das natürlichste ist, so müssten die Darstellungen schief in der Richtung von unten nach oben angeschaut werden; giebt man aber auch der Bequemlichkeit wegen die hohe Placirung der Zeichnung auf, so bleibt immer noch die schiefe Richtung der Sehstrahlen als Bedingung für das richtige

Erscheinen der Zeichnung übrig. Gerade für solche Gegenstände werden also schiefe Projektionen die naturgemässeste Darstellungsart sein; kommen sie ja auch der polarperspektivischen Projektion derselben am nächsten, da bei tiefer liegendem Augpunkte sämmtliche projizirende Linien des Gegenstandes ebenfalls schief zur Bildfläche stehen.

Die Voraussetzungen, welche gemacht werden müssen, wenn orthogonale axonometrische Zeichnungen richtig erscheinen sollen, sind meistens weniger naturgemäss als die für die schiefen Projektionen angegebenen. Entweder muss man sich den Gegenstand schief und die Zeichnungsfläche senkrecht oder horizontal, oder man muss sich bei senkrechtem Gegenstande die Zeichnungsfläche schief vorstellen. Die erste Annahme ist der Natur der meisten Gegenstände zuwider, die schiefe Stellung der Zeichnungsfläche bei der zweiten Annahme stimmt dagegen nicht etwa mit der gewöhnlichsten Lage überein, in welche man eine Zeichnung beim Anschauen vor das Auge bringt, sondern ist von den angenommenen Axenverhältnissen abhängig, bei deren Wahl ganz andere Rücksichten entscheidend sind.

Es bleibt endlich noch eine Eigenthümlichkeit der schiefen Parallelprojektionen zu erwähnen übrig, welche dieselben hauptsächlich dem praktischen Zeichner werthvoll machen dürfte: nämlich die ausgezeichnete Leichtigkeit, mit der sie ausgeführt werden können. Da die Axenlängen und Axenwinkel ganz unabhängig von einander sind, so ist gar keine Zeit zu Vorbereitungen, z. B. zu Construktionen oder Berechnungen der Winkel, oder auch nur zum Aufschlagen derselben in schon berechneten Tafeln nöthig;

ebenso ist man bei der Ausführung nicht an bestimmte, beim Gebrauche mehr oder minder unbequeme Winkel gebunden. Vielmehr lassen sich diese Zeichnungen, ohne dass man sich auch nur die Mühe geben müsste, irgend eine bindende Regel wieder in's Gedächtniss zurückzurufen, nur mit Rücksicht auf die jedesmaligen momentanen Bedürfnisse sofort ausführen. Schwerlich ist dem praktischen Zeichner dieses Verfahren neu, denn es liegt so nahe und es ist so einfach, dass es wohl immer vielfältig angewendet wurde, ohne dass man sich darum bekümmerte, ob es geometrisch gerechtfertigt werden könne oder nicht. Allein es mag dessenungeachtet jedem Zeichner angenehm sein, durch diesen Aufsatz auch sein geometrisches Gewissen bei fernerer Anwendung dieser Methode beschwichtigt zu sehen.

Nachschrift. Erst nach Vollendung dieses Aufsatzes erhielt ich die »Abhandlung über die verschiedenen Projektionsarten« etc. von Professor Delabar, und freute mich, in ihm einen Meinungsgenossen in der Beurtheilung des Werthes schiefer Projektionen zu finden. Ich hoffe, durch den hier mitgetheilten Aufsatz ebenfalls Einiges zur definitiven Feststellung dieses Urtheiles beigetragen zu haben.

Der Verfasser.

Fig. 1.

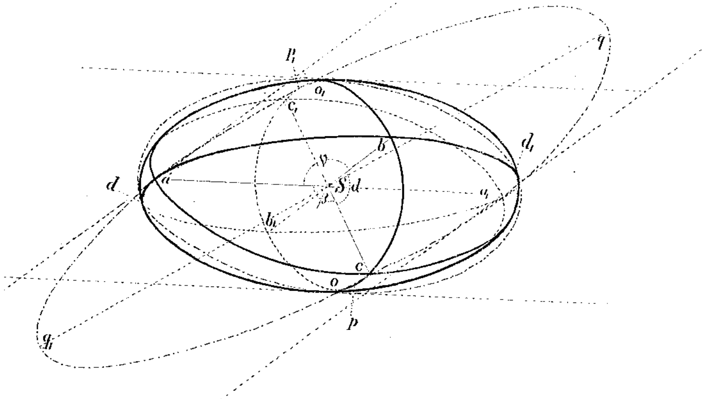

Fig. 2.