Ueber die geometrische Darstellung der Werthe einer Potenz mit complexer Basis und complexem Exponenten.

Von

Dr. Durège.

(Hiezu Taf. III.)

Man kennt seit längerer Zeit die Art und Weise, wie sich complexe Grössen durch Puncte in einer Ebene geometrisch darstellen lassen, und wie man dieselben durch die Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division zu neuen Puncten mit einander verbinden kann. Weniger vollständig aber kennt man die geometrische Darstellung der verschiedenen Werthe einer complexen Potenz. Es existirt darüber meines Wissens nur die folgende Abhandlung von John Warren: „On the geometrical representation of the powers, whose indices involve the square roots of negative quantities. Philosophical Transactions. 1829.“ Zur vollständigeren Kenntniss dieses Gegenstandes etwas beizutragen, ist der Zweck des gegenwärtigen Aufsatzes.

1.

Es soll im Folgenden die Potenz als eine vieldeutige Grösse aufgefasst, und die verschiedenen Werthe einer solchen von einander unterschieden werden. Es ist daher nöthig, für dieselben eine besondere Bezeichnung einzuführen.

Bedeutet a eine positive reelle, und μ eine beliebige reelle Grösse, so befindet sich bekanntlich unter den verschiedenen Werthen der Potenz a^μ immer ein einziger positiver reeller Werth. Diesen werde ich mit

$$a_o^\mu$$

bezeichnen. Tritt an die Stelle von a die Grundzahl e der natürlichen Logarithmen, so bedeutet zugleich e_o^μ die Summe der Exponentialreihe. Irgend einen anderen Werth der Potenz a^μ, der aus dem Ausdrucke

$$a_o^\mu\,(cos\ 2n\mu\pi + i\ sin\ 2n\mu\pi)$$

($i = \sqrt{-1}$ gesetzt) hervorgeht, wenn man für n eine bestimmte positive oder negative ganze Zahl setzt, werde ich mit

$$a_n^\mu$$

bezeichnen. Ist ferner

$$u = a(cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha)$$

eine beliebige complexe Grösse, so erhält man alle Werthe der Potenz u^μ, wenn man in dem Ausdrucke

$$a_o^\mu[cos\ \mu(\alpha + 2n\pi) + i\ sin\ \mu(\alpha + 2n\pi)]$$

für n alle positiven und negativen ganzen Zahlen und Null setzt. Wenn nun α entweder Null ist, oder zwischen o und 2π liegt, werde ich den bestimmten Werth, den der vorige Ausdruck für einen bestimmten Werth von n annimmt, mit

$$(1)\qquad u_n^\mu = a_o^\mu[cos\ \mu(\alpha + 2n\pi) + i\ sin\ \mu(\alpha + 2n\pi)]$$

bezeichnen. Denn es erhellt, dass nur unter einer solchen Beschränkung diese Bezeichnungsart mit der vorigen conform sein wird. Wenn dagegen $2m\pi$ das grösste in α enthaltene Vielfache von 2π ist, so wird man haben:

$$u_{n+m}^{\mu} = a_o^{\mu}(cor\,\mu(\alpha + 2n\pi) + i\,sin\,\mu(\alpha + 2n\pi)].$$

Für einen rein imaginären Exponenten $i\beta$ werde durch $e_o^{i\beta}$ wieder die Summe der Exponentialreihe bezeichnet, oder es sei

$$e_o^{i\beta} = cos\,\beta + i\,sin\,\beta.$$

Ferner sei

$$a_o^{i\beta} = e_o^{i\beta\,log\,a},$$

wo unter *log. a* der reelle Werth des natürlichen Logarithmen zu verstehen ist. Da nun auch für einen reellen Exponenten μ

$$a_o^{\mu} = e_o^{\mu\,log\,a}$$

ist, so kann man statt der Gleichung (1) auch schreiben:

$$u_n^{\mu} = e_o^{\mu\,log\,a + i\,\mu(\alpha + 2n\pi)}\ [0 \leqq \alpha < 2\pi].$$

Nun werden aber durch den Ausdruck

$$log\,a + i(\alpha + 2n\pi)$$

alle Werthe des Logarithmen von u ausgedrückt; bezeichnet man daher mit

$$log_{\,n}u = log\,a + i(\alpha + 2n\pi)$$

denjenigen Werth des Logarithmen, der einer bestimmten positiven oder negativen ganzen Zahl n entspricht, so hat man auch

$$u_n^{\mu} = e^{\mu\,log_{\,n}u}.$$

Aehnlich möge nun auch die Bezeichnung sein, wenn der Exponent complex ist. Nämlich, ist $v = x + iy$ ein complexer Exponent, ferner, wie vorhin, $u = a(cos\,\alpha + i\,sin\,\alpha)$ und zugleich $o \leqq \alpha < 2\pi$, so sei

$$u_n^{v} = e_o^{v\,log_{\,n}u}.$$

Entwickelt man den Exponenten, so erhält man vollständig:

$$u_n^{v} = e_o^{x\,loga - y(\alpha + 2n\pi)} \cdot e_o^{i\,[y\,loga + x(\alpha + 2n\pi)]}. \qquad (2)$$

2.

Hienach ist es nun leicht, wenn irgend zwei complexe Grössen u und v, und damit auch die sie darstellenden Puncte gegeben sind, denjenigen Punct zu finden, welcher den n^{ten} Werth der Potenz u^v darstellt. Nämlich bezeichnen r_n und φ_n den Radius Vector und den Neigungswinkel des Punctes u_n^v, so erhält man aus (2)

$$(3) \qquad \begin{aligned} \log r_n &= x \log a - y(\alpha + 2n\pi) \\ \varphi_n &= y \log a + x(\alpha + 2n\pi) \end{aligned}$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$x \log a - y\alpha = \mathrm{R}\,; \qquad y \log a + x\alpha = \Phi$$

setzt,

$$(4) \qquad \begin{aligned} \log r_n &= R - 2n\pi \cdot y \\ \varphi_n &= \Phi + 2n\pi \cdot x \end{aligned}$$

Des kürzeren Ausdrucks halber mögen die Puncte, welche die verschiedenen Werthe der Potenz u^v darstellen, Potenzpunkte, und derjenige unter ihnen, welcher den einem bestimmten Werthe von n entsprechenden Werth von u_n^v darstellt, der n^{te} Potenzpunct genannt werden.

Die vorstehenden Gleichungen bieten die Mittel dar, um die Fragen über die Construction der Potenzwerthe zu beantworten. Warren untersucht vorzüglich, wie sich ein bestimmter n^{ter} Potenzpunct bewegt, wenn man einen der Puncte u und v auf gewisse einfache Weisen sich bewegen lässt. Besonders interessant aber erscheint die von Warren nur oberflächlich berührte Frage, auf welcher Curve die sämmtlichen Potenzpuncte liegen. Diese Curve erhält man, wenn man n aus den Gleichungen (3) oder (4) eliminirt. Alsdann ergiebt sich, wenn mit r und φ die laufenden Polarcoordinaten bezeichnet werden, eine lineare Gleichung zwischen $\log r$ und φ, also die Gleichung einer logarithmischen Spirale, die sich in den Formen

$$log\, r = \frac{(x^2 + y^2) log\, a}{x} - \frac{y}{x}\varphi$$

oder

$$log\, r = R - \frac{y}{x}(\varphi - \Phi)$$

schreiben lässt. Die sämmtlichen Potenzpuncte, d. h. die Puncte, welche die sämmtlichen Werthe einer und derselben Potenz darstellen, liegen also auf einer logarithmischen Spirale *), und so vertheilt, dass die Radien Vectoren je zweier auf einander folgender Potenzpuncte den constanten Winkel $2\pi x$ einschliessen. Diese Spirale hat den Anfangspunct zu ihrem Pole und durchschneidet ihre Radien Vectoren unter einem Winkel, der von der Neigung des Exponenten v um 90° verschieden ist.

Von ihr ist zuerst zu bemerken, dass sie von der Neigung α der Basis u unabhängig ist. Lässt man also den Punct u sich in einem Kreise mit dem Radius a um den Anfangspunct herumbewegen, so bewegen sich die Potenzpuncte auf derselben Spirale fort, und zwar so, dass der Winkel zwischen den Radien Vectoren je zweier auf einander folgender Potenzpuncte constant gleich $2\pi x$ bleibt. Jeder Radius Vector dreht sich also um einen gleichen Winkel, nämlich, wenn der Radius Vector des Punctes u den Winkel $\alpha' - \alpha$ beschreibt, um den Winkel $(\alpha' - \alpha)x$.

Viel wesentlicher, als von der Basis, hängt die Beschaffenheit der Spirale von dem Exponenten ab. Ist dieser nämlich zuerst reell, also $y = o$, so geht die Spirale in einen Kreis über, der um den Anfangs-

*) Dieses Resultat giebt Warren schon an.

punct mit dem Radius $e_o^{x \log a} = a_o^x$ beschrieben ist. Auf der Peripherie desselben sind die Potenzpuncte so vertheilt, dass die Radien Vectoren je zweier auf einander folgender Puncte wiederum den constanten Winkel $2\pi x$ bilden. Ist daher x ein rationaler Bruch, so fallen nach einer gewissen Anzahl von Potenzpuncten alle späteren mit früheren zusammen, so dass die Anzahl der Potenzpuncte dann eine endliche ist. Ist x aber eine ganze Zahl, so fallen alle Potenzpuncte in einen zusammen; die Potenz hat dann nur einen Werth.

Ist zweitens der Exponent rein imaginär, also $x = o$, so geht die Spirale in eine Gerade über, und zwar in eine Gerade, welche zwar auf der einen Seite unbegrenzt, auf der anderen Seite aber durch den Anfangspunct begrenzt ist. Denn der Winkel zwischen den Radien Vectoren je zweier auf einander folgender Potenzpuncte ist dann ebenfalls Null, also fallen die Radien Vectoren sämmtlicher Potenzpuncte in einen zusammen, welcher um den Winkel $y \log a$ gegen die Abscissenaxe geneigt ist, und auf welchem der n^{te} Potenzpunct die Entfernung $e_o^{-y(\alpha + 2n\pi)}$ vom Anfangspuncte hat. Ist $a = 1$, so fällt die Gerade, auf welcher alle Potenzpuncte liegen, mit der positiven Abscissenaxe zusammen, folglich haben alle Potenzen von der Form

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{iy}$$

lauter reelle und positive Werthe.

Aus dieser Eigenschaft, dass die Potenzpuncte einer Potenz mit rein imaginären Exponenten auf einer durch den Anfangspunct begrenzten Geraden liegen, folgt ein auffallender Unterschied zwischen den Werthen einer solchen Potenz und denjenigen einer Potenz mit reellem Exponenten. Während nämlich die letzteren durchaus ungleichartig sind, indem höchstens zwei derselben reell, und ebenso auch höchstens zwei derselben rein imaginär, alle übrigen aber complex sind, so sind die sämmtlichen Werthe einer Potenz mit rein imaginärem Exponenten stets gleichartig, nämlich entweder alle reell, oder alle rein imaginär, oder alle complex, und zwar, wenn A und B zwei reelle und positive Grössen bedeuten, alle von einer und derselben der folgenden acht Formen: $+A, -A, +iB, -iB, A+iB, A-iB, -A+iB, -A-iB$.

Dieselbe Eigenschaft, lauter gleichartige Werthe zu besitzen, hat auch die allgemeinere Potenz

$$u^{x+iy},$$

wenn der reelle Theil x des Exponenten eine ganze Zahl ist. Auch dann liegen sämmtliche Potenzpuncte auf einer durch den Anfangspunct begrenzten Geraden, weil die verschiedenen Werthe von $\varphi_n = \Phi + 2n\pi \cdot x$ dann nur um eine ganze Anzahl von Peripherien von einander verschieden sind. Dasselbe erhellt auch aus folgender Betrachtung: Wie sich leicht zeigen lässt, ist allgemein

$$u_n^{x+iy} = u_n^x \, u_n^{iy}.$$

Ist nun aber x eine ganze Zahl, so sind die Werthe u_n^x alle einander gleich, die Werthe von u_n^{iy} dagegen werden durch Puncte dargestellt, welche in gerader Linie liegen. Es seien (Fig. 1) $p_1, p_2, p_3, \dots$ diese letzteren, und s der Punct, der die einwerthige Potenz u^x darstellt. Alsdann ist leicht zu sehen, dass die Producte der Puncte $p_1, p_2, p_3 \dots$ in den Punct s die ebenfalls in gerader Linie liegenden Puncte $q_1, q_2, q_3, \dots$ liefern, weil die Dreiecke $op_1 q_1$, $op_2 q_2$, $op_3 q_3, \dots$ dem Dreieck $o1s$ ähnlich sein müssen.

2.

Die Potenzpuncte einer beliebigen complexen Potenz, welche, wie wir gesehen haben, auf einer logarithmischen Spirale liegen, besitzen die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sich durch dieselben noch unendlich viele von der vorigen verschiedene logarithmische Spiralen hindurch legen lassen. Dies beruht auf der bekannten Eigenschaft der Polarcoordinaten, dass zwar durch einen bestimmten Werth r des Radius Vectors und einen bestimmten Werth φ des Neigungswinkels ein bestimmter Punct der Ebene festgesetzt wird; dass aber, wenn umgekekrt der Punct gegeben ist, demselben nicht bloss die vorigen Werthe von r und φ als Polarcoordinaten zu gehören, sondern dass man den Winkel φ um ein beliebiges Vielfaches von 2π vermehren oder vermindern kann, und dass dann diese neuen Werthe der Polarcoordinaten denselben Punct bestimmen, wie r und φ.

Denken wir uns daher die Potenzpuncte als gegeben, so gehören ihnen nicht allein die vorigen Werthe (4) von $log\, r_n$ und φ_n an, sondern dieselben Potenzpuncte werden auch durch die Werthe

$$log\, r_n = R - 2n\pi \cdot y$$
$$\varphi_n = \Phi + 2n\pi x - 2m\pi$$

bestimmt, wenn m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. So lange nun m von n ganz unabhängig ist, erhalten wir hieraus allerdings keine neue Curve für die Potenzpuncte; allein nehmen wir an, m sei ein beliebiges Vielfaches von n, setzen wir also

$$m = \lambda n,$$

wo λ wiederum eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder auch Null bedeutet, so liefert die Elimination von n aus den Gleichungen

$$\log r_n = R - 2n\pi y\,; \qquad \varphi_n = \Phi + 2n\pi(x - \lambda)$$

die Gleichung

$$(5) \qquad \log r = R + \frac{y}{\lambda - x}(\varphi - \Phi),$$

welche für jeden Werth von λ eine besondere Spirale darstellt *). Es ergibt sich also, dass man durch die sämmtlichen Potenzpuncte eine Schaar von unendlich vielen logarithmischen Spiralen hindurch legen kann. Alle diese Spiralen haben den Anfangspunct als gemeinschaftlichen Pol und werden aus (5) erhalten, wenn man für λ alle positiven und negativen ganzen Zahlen und Null setzt.

In dem Falle, dass der Exponent reell, also $y = o$ ist, fallen alle diese Spiralen mit dem schon früher gefundenen Kreise zusammen. Ist aber der Exponent rein imaginär, also $x = o$, so geht nur die dem Werthe $\lambda = o$ zugehörige Spirale in eine Gerade über, während alle übrigen logarithmische Spiralen bleiben, die paarweise gleich, aber entgegengesetzt gewunden sind. Dasselbe tritt auch ein, wenn x eine ganze Zahl ist; dann geht die Spirale, welche dem Werthe $\lambda = x$ angehört, in eine Gerade über, und jeder Spiralen mit einem Werthe $\lambda = \lambda'$ entspricht eine andere mit dem Werthe $\lambda = 2x - \lambda'$, welche ihr gleich ist, aber nach der entgegengesetzten Richtung gewunden.

*) Man könnte für m irgend eine Function von n annehmen, von der Beschaffenheit, dass allen ganzzahligen Werthen von n auch ganzzahlige Werthe von m entsprechen, z. B. die Anzahl der zu n relativen Primzahlen, welche kleiner als n sind; die Anzahl der Divisoren von n u. dgl. Eine logarithmische Spirale erhält man aber nur dann, wenn m eine lineare Function von n mit ganzzahligen Coefficienten ist. Man überzeugt sich leicht, dass der letzte Fall von dem im Text angenommenen im Resultat nicht verschieden ist.

Zur Erläuterung des Vorigen ist die Fig. 2 beigefügt worden, bei deren Verzeichnung ich von der Potenz

$$(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)^{\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ}$$

ausgegangen bin. In derselben sind P und P' zwei auf einander folgende Potenzpuncte, welche den Werthen $n = o$ und $n = -1$ angehören; ihre Polarcoordinaten haben die absoluten Werthe

$$r_0 = 7^{\text{mm}},2 \quad \varphi_0 = 57^\circ,1; \quad r_{-1} = 50^{\text{mm}},4, \quad \varphi_{-1} = 74^\circ,7.$$

Zur Einheit wurde die Länge von 10^{mm} genommen. Von den durch sämmtliche Potenzpuncte hindurch gehenden Spiralen sind sieben gezeichnet worden, nämlich diejenigen, welche den Werthen -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 von λ angehören. Von denselben sind aber, damit die Figur nicht zu complicirt werde, nur diejenigen Theile in der Zeichnung vorhanden, welche zwischen den beiden Puncten P und P' liegen.

4.

Die im vorigen §. betrachteten Spiralen schneiden sich zwar alle in den Potenzpuncten, ausserdem besitzen sie jedoch noch andere Durchschnittspuncte, welche nicht allen Spiralen zugleich angehören, und die näher untersucht zu werden verdienen.

Betrachten wir zu dem Ende zunächst die Art und Weise, wie sich zwei beliebige logarithmische Spiralen, welche denselben Pol haben, überhaupt schneiden können.

Es seien

$$\text{I)}\ \varrho = q + p \cdot \varphi; \qquad \text{II)}\ \varrho' = q' + p' \cdot \varphi'$$

die Gleichungen zweier beliebiger, um den Anfangspunct als Pol geschlungener, logarithmischer Spiralen, indem zur Abkürzung $\log r = \varrho$, $\log r' = \varrho'$ gesetzt ist, und darunter die reellen Logarithmen der stets als positiv angesehenen Radien Vectoren verstanden werden. Dann erhellt zunächst, da diese Gleichuugen in Bezug auf ϱ und φ linear sind, dass es nur einen einzigen Punct giebt, für welchen zu gleicher Zeit $r' = r$ und $\varphi' = \varphi$ ist. Allein, da der nämliche Punct, welcher die Polarcoordinaten r und φ hat, auch durch die Polarcoordinaten r und $\varphi + 2n\pi$ bestimmt ist, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, so folgt, dass auch alle diejenigen Puncte beiden Spiralen gemeinschaftlich sein werden, für welche zugleich

$$r' = r \quad \textit{und} \quad \varphi' = \varphi + 2n\pi$$

ist. Die beiden Spiralen durchschneiden sich daher in unendlich vielen Puncten, und man wird die Polarcoordinaten sämmtlicher Durchschnittspuncte erhalten, wenn man ϱ und φ aus den Gleichungen

$$\varrho = q + p \cdot \varphi \qquad \varrho = q' + p'(\varphi + 2n\pi)$$

bestimmt und dem n alle ganzzahligen Werthe (Null eingeschlossen) zuertheilt. Bezeichnet man daher mit ϱ_n, φ_n; ϱ'_n, φ'_n die einem bestimmten n zukommenden Werthe der Polarcoordinaten der Durchschnittspuncte, so erhält man

$$(6) \qquad \varrho_n = \varrho_n' = \frac{pq' - p'q + 2pp' \cdot n\pi}{p - p'}$$

$$\varphi_n = \frac{q' - q + 2p' \cdot n\pi}{p - p'}.$$

Alsdann sind die Winkel φ in der Spirale I gezählt. Zählt man diese Winkel in der Spirale II, so erhält man

$$\varphi'_n = \varphi_n + 2n\pi = \frac{q' - q + 2pn\pi}{p - p'}.$$

Beide Spiralen nähern sich ihrem gemeinschaftlichen Pole in unendlich vielen Windungen. Es gibt daher keine Windung, die man absolut als die erste oder nullte annehmen, und von der aus man die übrigen zählen könnte. Vielmehr kann dazu irgend eine beliebig angenommen werden. Bezeichnet man nun dem obigen gemäss mit φ_0 und φ'_0 die demjenigen Durchschnittspuncte angehörigen Winkel, welchen, in beiden Spiralen gezählt, derselbe Werth zukommt (was bestimmt ist, so bald die Constanten p, q, p', q' gegeben sind), so hat man successive

$$\begin{array}{ll} & \varphi'_0 = \varphi_0 \\ \varphi'_1 = \varphi_1 + 2\pi & \varphi'_{-1} = \varphi_{-1} - 2\pi \\ \varphi'_2 = \varphi_2 + 4\pi & \varphi'_{-2} = \varphi_{-2} - 4\pi \\ \varphi'_3 = \varphi_3 + 6\pi & \varphi'_{-3} = \varphi_{-3} - 6\pi \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

Daraus geht hervor, dass die Durchschnittspuncte der beiden Spiralen so vertheilt sind, dass der Unterschied der einem und demselben Durchschnittspuncte zugehörigen Winkel, wenn derselbe einmal in der einen und dann in der anderen Spirale gezählt wird, bei jedem folgenden Durchschnittspuncte um eine ganze Peripherie grösser wird. Man erhält nämlich leicht

$$\varphi_n - \varphi_{n-1} = \frac{2p'\pi}{p-p'}\,;\quad \varphi'_n - \varphi'_{n-1} = \frac{2p\pi}{p-p'} = \frac{2p'\pi}{p-p'} + 2\pi$$

$$\varphi'_n - \varphi_n = \varphi'_{n-1} - \varphi_{n-1} + 2\pi,$$

worin das ausgesprochene Gesetz liegt. Sind z. B. zwei gleichgewundene Spiralen so beschaffen, dass vier ihrer Durchschnittspuncte auf der 0^{ten}, 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten} Windung der einen Spirale liegen, so liegen dieselben Puncte in der anderen Spirale auf der 0^{ten}, 2^{ten}, 4^{ten}, 6^{ten} Windung. Oder nimmt man zwei gleiche, aber entgegengesetzt gewundene Spiralen an, welche immer auf jeder Windung zwei Durchschnittspuncte besitzen, so liegen die Puncte, welche in der einen Spiralen sich resp. auf der 0^{ten}, 0^{ten}, 1^{ten}, 1^{ten}, 2^{ten} Windung befinden, in der anderen Spirale der Reihe nach auf der 0^{ten}, -1^{ten}, -1^{ten}, -2^{ten}, -2^{ten} Windung.

Durch die sämmtlichen Durchschnittspuncte der beiden Spiralen I und II kann man nun auf's Neue logarithmische Spiralen hindurchlegen. Ist

$$\text{III)}\quad \varrho'' = q'' + p'' \cdot \varphi''$$

die Gleichung einer solchen, so müssen p'' und q'' so bestimmt werden können, dass für jeden Werth von n zugleich

$$\varrho''_n = \varrho_n \quad \text{und} \quad \varphi''_n = \varphi + 2m\pi$$

werde, wo m wiederum eine ganze Zahl oder Null bedeutet. Man erhält aber, wenn man in die Gleichung

$$\varrho_n = q'' + p''(\varphi_n + 2m\pi)$$

die Werthe (6) von ϱ_n und φ_n substituirt,

$$\frac{pq'-p'q}{p-p'} + \frac{2pp'\cdot n\pi}{p-p'} = q'' + p''\frac{q'-q}{p-p'} + p''\frac{2p'n\pi}{p-p'} + 2p''\cdot m\pi,$$

welche Gleichung für jeden Werth von n erfüllt sein muss. Steht nun m in keiner Verbindung mit n, so erhält man daraus nur wieder die beiden ersten Spiralen. Ist aber m ein Vielfaches von n, also $m = \lambda n$, so erhält man die beiden Gleichungen

$$\frac{pq'-p'q}{p-p'} = q'' + p''\frac{q'-q}{p-p'}; \quad \frac{pp'}{p-p'} = \frac{p'p''}{p-p'} + \lambda p'',$$

aus welchen sich

$$(7)\qquad p'' = \frac{pp'}{p'+\lambda(p-p')}; \qquad q'' = \frac{p'+\lambda(p-p')}{p'q+\lambda(pq'-p'q)}$$

ergiebt. Hieraus folgt, dass man durch alle Durchschnittspuncte zweier beliebiger logarithmischer Spiralen, die denselben Pol haben, unendlich viele andere logarithmische Spiralen hindurch legen kann, deren Bestimmungsstücke aus den Ausdrücken (7) hervorgehen, wenn man λ alle ganzzahligen Werthe zuertheilt. Für die Werthe $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ erhält man die Spiralen I und II selbst.

Heben wir nun aus allen diesen Spiralen irgend eine heraus, welche einem beliebigen, von 0 und 1 verschiedenen, Werthe von λ zugehört, und bezeichnen dieselbe, wie vorhin, durch

$$\text{III)}\quad \varrho'' = q'' + p'' \cdot \varphi'',$$

so ist für die allen drei Spiralen gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte $\varphi''_n = \varphi_n + 2\lambda n\pi$. Diese Puncte haben alse folgende Winkel:

in der Spir. I gezählt .... φ_{-2}, φ_{-1}, φ_0, φ_1, φ_2, ...
» » » II » .... $\varphi_{-2}-4\pi$, $\psi_{-1}-2\pi$, φ_0, $\varphi_1+2\pi$. $\varphi_2+4\pi$, ...
» » » III » .... $\varphi_{-2}-4\lambda\pi$, $\varphi_{-1}-2\lambda\pi$, φ_0, $\varphi_1+2\lambda\pi$, $\varphi_2+4\lambda\pi$, ...

Betrachten wir jetzt aber die beiden Spiralen I und III für sich und bezeichnen die ihren Durchschnittspuncten zugehörigen Winkel, in der Spirale I gezählt mit $\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\psi_{-2}, \psi_{-1}, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$, so ist für irgend einen derselben, ψ_k gemäss (6)

$$\psi_k = \frac{q'' - q + 2p''k\pi}{p - p''}$$

oder, wenn man darin die Ausdrücke (7) für p'' und q'' substituirt,

$$\psi_k = \frac{q' - q + 2p'\,\frac{k}{\lambda}\pi}{p-p'}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem (6) für φ_n, so ergiebt sich, dass jedesmal, und nur dann, $\psi = \varphi_n$ ist, so oft $k = n\lambda$ ist. Unter den Durchschnittspuncten der Spiralen I und III gehören also nur diejenigen auch der Spirale II an, für welche k ein Vielfaches von λ ist, und daher liegen zwischen je zwei auf einander folgenden Durchschnittspuncten, die allen drei Spiralen gemeinsam sind, noch $\lambda - 1$ Durchschnittspuncte, die nur den Spiralen I und III angehören. Z. B. zwischen den Puncten, welche den Werthen 0 und 1 von n zugehören, liegen diejenigen Durchschnitte der Spiralen I und III, welche den Werthen $1, 2, 3, \cdots \lambda - 1$ von k entsprechen. In ähnlicher Weise ergibt sich aus der Vergleichung irgend zweier Spiralen, welche den Werthen λ_1 und λ_2 von λ angehören, wo $\lambda_2 > \lambda_1$ sei, dass diese Spiralen sich zwischen je zwei auf einander folgenden, allen gemeinschaftlichen, Durchschnittspuncten noch in $\lambda_2 - \lambda_1 - 1$ Puncten schneiden. In Fig. 2 treffen sich z. B. die beiden Spiralen für $\lambda = -2$ und $\lambda = 4$ zwischen P und P' in 5 Puncten, welche mit 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet worden sind. Je zwei Spiralen dagegen, welche zweien auf einander folgenden Werthen von λ angehören, schneiden sich nur in den gemeinschaftlichen Durchschnittspuncten und in keinen anderen.

Die durch die Reihenfolge der Zahlen λ bedingte Aufeinanderfolge der Spiralen tritt noch deutlicher hervor, wenn man die Tangenten untersucht, welche man in einem der gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte an sämmtliche Spiralen legen kann. Es sei (Fig. 3) P einer der gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte, O der gemeinschaftliche Pol. Auf den Radius Vector PO errichte man in O die Senkrechte ON (die Polarsubtangente) und lege in P an alle durch P hindurchgehenden Spiralen Tangenten, welche die Senkrechte ON in den Puncten $L_0, L_1, L_2, \cdots$ schneiden mögen. Es seien PL_0 und PL_1 die Tangenten an die Spiralen I und II, und PL_λ die Tangente an die einem beliebigen Werthe von λ zugehörige Spirale III. Bezeichnen ferner $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\lambda$ die Winkel, welche diese Tangenten mit der Senkrechten ON bilden, so ist bekanntlich

$$p = tg.\gamma_0, \quad p' = tg.\gamma_1, \quad p'' = tg.\gamma_\lambda,$$

folglich hat man wegen der zwischen p, p', p'' bestehenden Relation (7)

$$tg.\gamma_\lambda = \frac{tg\gamma_0\, tg\gamma_1}{tg\gamma_1 + \lambda(tg\gamma_0 - tg\gamma_1)}$$

woraus durch eine leichte Rechnung

$$\frac{\sin(\gamma_0 - \gamma_\lambda)}{\sin\gamma_\lambda} = \lambda \cdot \frac{\sin(\gamma_0 - \gamma_1)}{\sin\gamma_1}$$

folgt. Nun ist aber

$$\frac{\sin(\gamma_0 - \gamma_\lambda)}{\sin\gamma_\lambda} = \frac{L_\lambda L_0}{P L_0}, \qquad \frac{\sin(\gamma_0 - \gamma_1)}{\sin\gamma_1} = \frac{L_1 L_0}{P L_0},$$

folglich ergiebt sich

$$L_\lambda L_0 = \lambda \cdot L_1 L_0,$$

oder es ist

$$L_0 L_1 = L_1 L_2 = L_2 L_3 = \cdot \cdot \cdot \cdot = L_{-1} L_0 = L_{-2} L_{-1} = \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Hienach hat man folgenden Satz: Legt man durch die Durchschnittspuncte zweier logarithmischer Spiralen alle möglichen logarithmischen Spiralen, die mit den beiden gegebenen denselben Pol haben, und zieht in einem der gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte P Tangenten an sämmtliche Spiralen, so schneiden diese die auf dem Radius Vector PO im Anfangspuncte O senkrecht stehende Gerade (die Polarsubtangente) in gleichen Abständen von einander.

Mit Rücksicht auf die hiedurch hervortretende Aufeinanderfolge der Spiralen kann man den oben gefundenen Satz über das gegenseitige Durchschneiden derselben so aussprechen: Je zwei auf einander folgende Spiralen schneiden sich nur in den allen gemeinschaftlichen Durchschnittspuncten; je zwei nicht aufeinander folgende Spiralen dagegen schneiden sich zwischen je zwei auf einander folgenden, allen gemeinschaftlichen, Durchschnittspuncten noch so viele

Male, als man Spiralen zwischen den beiden in Betracht kommenden ziehen kann.

5.

Kehren wir nun zu der Form zurück, welche die Gleichungen der Spiralen erhielten, wenn wir von den Potenzpuncten ausgingen, nämlich zu der Gleichung (5)

$$log\, r = R + \frac{y}{\lambda - x}(\varphi - \Phi), \tag{8}$$

so gehen hier sämmtliche Spiralen durch die Potenzpuncte hindurch; diese sind also die allen Spiralen gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte. Es werden sich daher irgend zwei Spiralen, welche zwei aufeinanderfolgenden Werthen von λ angehören, nur in den Potenzpuncten und in keinen anderen schneiden, und die im vorigen §. ermittelten Sätze werden von diesen Spiralen gleichfalls gelten.

Man kann nun hier zuerst den oben betrachteten Winkel γ_λ noch auf eine andere Weise construiren. Man hat nämlich aus (8)

$$tg.\, \gamma_\lambda = \frac{y}{\lambda - x}.$$

Verbindet man also den Punct v (Fig. 3), welcher den Exponenten $v = x + iy$ darstellt, mit dem Puncte λ, der die ganze Zahl λ auf der Abscissenaxe darstellt, so ist der Winkel, den die Gerade $v\lambda$ mit der Abscissenaxe bildet, ebenfalls der Winkel γ_λ. Da nun dies für jeden Werth von λ gilt, so ist die Figur, welche aus den im Puncte P gezogenen Tangenten, dem Radius Vector und der Polarsubtangente ON besteht, derjenigen Figur ähnlich, welche entsteht, wenn man die, alle positiven und negativen ganzen Zahlen repräsentirenden, Puncte . . . . . — 1, 0, 1, 2, 3, ... mit v verbindet und die Ordinate vx des letzteren zieht.

Den Tangenten PL_0, PL_1, PL_2, ... entsprechen die Geraden $v0$, $v1$, $v2$, ..., der Polarsubtangente entspricht die Abscissenaxe und dem Radius Vector die Ordinate des Punctes v.

Aus dem Vorigen ergibt sich, dass die sämmtlichen Werthe einer Potenz geometrisch dargestellt werden durch die sämmtlichen Durchschnittspuncte zweier logarithmischen Spiralen, nämlich durch irgend zwei aufeinander folgende aus der durch die Gleichung (5) dargestellten Schaar. Nur in dem Falle, dass der Exponent reell ist, degeneriren beide Spiralen in den nämlichen Kreis. Derselbe hat dann den Radius a_o^x, und den Anfangspunct zum Mittelpunct, und die Radien Vectoren der Potenzpuncte bilden mit der Abscissenaxe die Winkel $x(\alpha + 2n\pi)$.

Man kann aber auch die umgekehrte Aufgabe lösen; nämlich, wenn irgend zwei um denselben Pol gewundene logarithmische Spiralen gegeben sind, so kann man immer eine Potenz bestimmen, deren sämmtliche Werthe durch die Durchschnittspuncte der gegebenen Spiralen geometrisch dargestellt werden. Denn, sind

$$\varrho = \log r = q + p \cdot \varphi; \qquad \varrho = \log r = q' + p' \cdot \varphi$$

die gegebenen Spiralen, so darf man nur die Werthe (6) den Ausdrücken (3) für jeden Werth von n gleich setzen. Dann erhält man die Basis $u = a(\cos\alpha = i \sin\alpha)$ und den Exponenten $v = x + iy$ der gesuchten Potenz, wenn man aus den Gleichungen

$$x \log a - y\alpha = \frac{pq' - p'q}{p - p'} \qquad y = -\frac{pp'}{p - p'}$$

$$y \log a + x\alpha = \frac{q' - q}{p - p'} \qquad x = \frac{p'}{p - p'}$$

die Werthe von x, y, $\log a$ und α bestimmt. — Auf den Umstand, dass man dabei verschiedene Potenzen finden kannn, welche dieselben Werthe haben, soll hier nicht näher eingegangen werden.

Anstatt zwei Spiralen durch die vier Constanten p, q, p', q' zu bestimmen, kann man auch in der Ebene zwei beliebige Puncte annehmen, gegeben durch ihre Polarcoordinaten r_0, φ_0, r_1, φ_1, und die Aufgabe stellen, durch diese beiden Puncte alle möglichen logarithmischen Spiralen hindurch zu legen, welche den Anfangspunct zum Pole haben, wobei zugleich festgesetzt sein möge, dass der dem ersteren Puncte zugehörige Winkel, in allen Spiralen gezählt, denselben Werth φ_0 habe.

Setzt man

$$log\, r_o = \varrho_o, \quad log\, r_1 = \varrho_1 = \varrho_o + t, \quad \varphi_1 = \varphi_o + \Theta$$

und ist

$$\varrho = q + p \cdot \varphi$$

die Gleichung von irgend einer der gesuchten Spiralen, so müssen derselben die Werthe ϱ_0 und $\varrho_0 + t$ von ϱ, und die Werthe φ_0 und $\varphi_0 + \Theta - 2\lambda\pi$ von φ genügen, und es kann dabei λ keine andere als eine ganze Zahl oder Null sein, weil sonst durch $\varrho_0 + t$ und $\varphi_0 + \Theta - 2\lambda\pi$ nicht derselbe Punct bestimmt wäre, wie durch $\varrho_0 + t$ und $\varphi_0 + \Theta$. Man hat also die beiden Gleichungen

$$\varrho_o = q + q \cdot \varphi_o; \qquad \varrho_o + t = q + p(\varphi_o + \Theta - 2\lambda\pi).$$

Daraus folgt zuerst

$$p = \frac{t}{\Theta - 2\lambda\pi} \qquad q = \varrho_o - \frac{t}{\Theta - 2\lambda\pi}\varphi_o.$$

Da man aber den Grössen t und Θ immer die Form

$$t = -2\pi\eta \qquad \Theta = 2\pi\xi$$

geben kann, so kann man auch schreiben

$$p = \frac{\eta}{\lambda - \xi} \qquad q = \varrho_o - \frac{\eta}{\lambda - \xi}\varphi_o$$

und erhält dadurch die Gleichung

$$\varrho = \varrho_0 + \frac{\eta}{\lambda - \xi}(\varphi - \varphi_0), \tag{9}$$

welche für jeden ganzzahligen Werth von λ (Null eingeschlossen) eine Spirale darstellt, die durch die beiden Puncte hindurchgeht, welche durch die Werthe ϱ_0, φ_0 und $\varrho_0 - 2\pi\eta$, $\varphi_0 + 2\pi\xi$ bestimmt sind.

Nun hat aber die vorstehende Gleichung genau dieselbe Form, wie die Gleichung (5), welche alle durch die Potenzpuncte hindurchgehenden Spiralen darstellt. Man kann also die durch zwei gegebene Puncte hindurchgehende Schaar immer als identisch mit der durch die Potenzpuncte hindurchgehenden betrachten und daher auch folgenden Satz aufstellen: Durch zwei beliebig gegebene Puncte kann man unendlich viele um denselben Pol sich windende logarithmische Spiralen hindurch legen. Diese Spiralen schneiden sich ausser in den gegebenen Puncten noch in unendlich vielen, allen gemeinsamen, Durchschnittspuncten, und die letzteren nebst den gegebenen Puncten kann man als die geometrische Darstellung der sämmtlichen Werthe einer und derselben Potenz ansehen.

6.

Um das Gewebe der in Rede stehenden Schaar von Spiralen vollständig zu durchschauen, suchen wir noch diejenigen unter den nicht allen gemeinschaftlichen Durchschnittspuncten auf, durch welche drei oder mehrere Spiralen zugleich hindurchgehen.

Heben wir aus den durch die Gleichung (9) dargestellten Spiralen irgend drei heraus, welche den ganzen Zahlen λ, $\lambda + \delta$, $\lambda + \delta'$ angehören, so erhalten wir die Durchschnittspuncte der beiden ersten durch Auflösung der Gleichungen

$$\varrho = \varrho_0 + \frac{\eta}{\lambda - \xi}(\varphi - \varphi_0), \qquad \varrho = \varrho_0 + \frac{\eta}{\lambda + \delta - \xi}(\varphi - \varphi_0 + 2k\pi)$$

wo k jede ganze Zahl und Null sein kann. Daraus folgt

$$\varrho - \varrho_0 = \frac{\eta \cdot 2k\pi}{\delta}, \qquad \varphi - \varphi_0 = \frac{(\lambda - \xi)\, 2k\pi.}{\delta}$$

Ebenso erhält man für die Durchschnittspuncte der Spiralen λ und $\lambda + \delta'$

$$\varrho - \varrho_0 = \frac{\eta \cdot 2k'\pi}{\delta'}; \qquad \varphi - \varphi_0 = \frac{(\lambda - \xi) 2k'\pi}{\delta'},$$

wo k' ebenfalls jede ganze Zahl und Null sein kann. Sollen nun die drei Spiralen sich in einem Puncte schneiden, so müssen die entsprechenden der obigen Ausdrücke einander gleich werden, also muss

$$\frac{k'}{\delta'} = \frac{k}{\delta} \tag{10}$$

sein. Halten wir jetzt irgend einen Werth von δ und irgend einen von k fest und bezeichnen mit ε den grössten gemeinschaftlichen Theiler von δ und k, so folgt aus

$$\delta' = \frac{k' \cdot \frac{\delta}{\varepsilon}}{\frac{k}{\varepsilon}},$$

dass k' ein Vielfaches von $\frac{k}{\varepsilon}$ und daher δ' das nämliche Vielfache von $\frac{\delta}{\varepsilon}$ sein muss. Demnach gehen durch irgend einen Durchschnittspunct der Spiralen λ und $\lambda + \delta$, welcher irgend einem Werthe von k zugehört, auch alle diejenigen Spiralen, welche durch die Zahlen

$$\lambda,\ \lambda \pm \frac{\delta}{\varepsilon},\ \lambda \pm 2\frac{\delta}{\varepsilon},\ \lambda \pm 3\frac{\delta}{\varepsilon}, \ldots\ldots$$

bestimmt werden, wobei ε den grössten gemeinschaftlichen Theiler von δ und k bedeutet. Ist k ein Vielfaches von δ, so ist $\frac{\delta}{\varepsilon} = 1$; die vorige Zahlenreihe verwandelt sich dann in die aller ganzen Zahlen, und daher gehen durch diejenigen Durchschnittspuncte der Spiralen λ und $\lambda + \delta$, für welche k ein Vielfaches von δ ist, sämmtliche Spiralen hindurch, wie wir diess auch schon früher gefunden haben. Ist δ' ein Vielfaches von δ, so wird der Gleichung (10) für jeden Werth von k genügt, wenn k′ das gleiche Vielfache von k ist. Daher gehen die Spiralen, welche den Zahlen

$$\lambda,\ \lambda \pm \delta,\ \lambda \pm 2\delta,\ \lambda \pm 3\delta, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

angehören, durch alle Durchschnittspuncte der Spiralen λ und $\lambda + \delta$ hindurch.

Beispiele zu dem Vorigen zeigt die Fig. 2, in welcher im Puncte 3 die Spiralen $\lambda = 2$, $\lambda = 0$, $\lambda = 2$, $\lambda = 4$; in den Puncten 2 und 4 die Spiralen $\lambda = -2$, $\lambda = 1$, $\lambda = 4$, und im Punkte c die Spiralen $\lambda = -1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ zusammentreffen.

7.

Auch die von den Spiralen eingeschlossenen Flächenräume bieten eigenthümliche Verhältnisse dar. Der Sector einer logarithmischen Spirale vom Pole an bis zu einem beliebigen Puncte P der Spirale ist bekanntlich gleich der Hälfte des rechtwinkligen Dreiecks POL_λ (Fig. 3), welches von dem Radius Vector PO, der Polarsubtangente OL_λ und der Tangente PL_λ gebildet wird. Wir wollen nun für P einen der allen Spiralen gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte nehmen und den in der Spirale λ genommenen Sector mit S_λ bezeichnen, so ist

$$S_0 = \frac{1}{2} POL_0, \quad S_1 = \frac{1}{2} POL_1, \quad S_2 = \frac{1}{2} POL_2, \text{ etc.},$$

wobei wir diejenigen Sectoren und Dreiecke als positiv annehmen wollen, welche auf derjenigen Seite des Radius Vector liegen, auf welcher die Zahlen λ wachsen, die auf der entgegengesetzten Seite liegenden aber als negativ. Zieht man je zwei auf einander folgende Sectoren von einander ab, so erhält man

$$S_\lambda - S_{\lambda-1} = \frac{1}{2} PL_{\lambda-1} L_\lambda.$$

Nun sind aber die Dreiecke $PL_{\lambda-1} L_\lambda$ für jeden Werth von λ einander gleich, weil sie alle eine gemeinschaftliche Spitze und nach dem im §. 4 bewiesenen Satze auch gleiche Grundlinien haben. Also ist

$$S_1 - S_0 = S_2 - S_1 = S_3 - S_2 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Macht man dieselbe Betrachtung für den auf P folgenden Durchschnittspunct P' und bezeichnet die bis zu diesem Puncte reichenden Sectoren mit S'_λ, so ist auch

$$S'_1 - S'_0 = S'_2 - S'_1 = S'_3 - S'_2 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

und wenn man

$$S'_\lambda - S_\lambda = s_\lambda$$

setzt, gleichfalls

$$s_1 - s_0 = s_2 - s_1 = s_3 - s_2 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Nun bedeutet s_λ den Sector der Spirale λ, welcher zwischen den beiden auf einander folgenden gemeinschaftlichen Durchschnittspuncten oder Potenzpuncten P und P' enthalten ist; die Differenz $s_\lambda - s_{\lambda-1}$ bedeutet also das Flächenstück, welches von zwei auf einander folgenden Spiralen λ—1 und λ begrenzt wird, wenn von diesen Spiralen nur die zwischen zwei aufeinander folgenden Potenzpuncten enthaltenen Theile in Betracht gezogen werden. Wir erhalten daher folgenden Satz: Nimmt man von der durch zwei Puncte hindurchgehenden Schaar von Spiralen diejenigen Theile, welche zwischen zwei auf einander folgenden gemeinschaftlichen Durchschnittspuncten enthalten sind, so haben die von je zwei aufeinander folgenden Spiralen eingeschlossenen Flächenstücke gleichen Flächeninhalt.

Denselben Satz kann man noch in einer etwas andern Form aussprechen. Betrachtet man irgend drei auf einander folgende Spiralen, so haben die beiden von ihnen eingeschlossenen Flächenstücke stets ein gewisses Stück gemeinschaftlich. Nämlich zwischen je zwei auf einander folgenden Potenzpuncten P und P' liegt dann noch der Durchschnittspunct Q (Fig. 4 und 5) der beiden äusseren Spiralen, und das Stück, welches von den zwischen den beiden Puncten P und Q liegenden Theilen der beiden äusseren Spiralen begrenzt ist, ist beiden Flächenräumen gemeinschaftlich. Die übrig bleibenden, einander ebenfalls gleichen Flächenstücke aber bilden zwei krummlinigte Dreiecke, welche die Puncte P, Q, und P' zu Ecken und die drei Spiralen zu Seiten haben. Daher hat man auch folgenden Satz: Von irgend drei aufeinander folgenden logarithmischen Spiralen aus der durch zwei Puncte hindurchgehenden Schaar schneiden sich die beiden äusseren zwischen je zwei auf einander folgenden gemeinschaftlichen Durchschnittspuncten P und P' in einem dritten Puncte Q; und die beiden krummlinigten Dreiecke, welche die Puncte P, Q und P' zu Ecken und die drei Spiralen zu Seiten haben, sind an Flächeninhalt einander gleich. In Fig. 4 und 5 sind die Spiralen für die Werthe 1, 2, 3 und 2, 3, 4 von λ aus Fig. 2 besonders gezeichnet, und die zwischen zwei auf einander folgenden Spiralen enthaltenen, einander gleichen Flächenräume durch verschiedene Schraffirung unterschieden worden, wodurch die gemeinschaftlichen Stücke und die übrig bleibenden krummlinigten Dreiecke deutlicher hervortreten.

8.

Zum Schlusse mögen noch einige Worte über die Construction der Logarithmen der Potenzwerthe hinzugefügt werden. Versteht man unter $log\, u_n^v$ denselben Werth, welcher nach der Bezeichnung des §. 1 auch durch $v\, log_n\, u$ ausgedrückt ist, so erhält man aus (2)

$$log\,(u_n^v) = x\, log\, a - y\,(\alpha + 2n\pi) + i\,[y\, log\, a + x\,(\alpha + 2n\pi)]\,.$$

Bezeichnet man daher mit ξ_n und η_n die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $log\,(u_n^v)$, setzt man also

$$log\,(u_n^v) = \xi_n + i\,\eta_n,$$

so ist

$$\begin{aligned} \xi_n &= x\, log\, a - y\,(\alpha + 2n\pi) \\ \eta_n &= y\, log\, a + x\,(\alpha + 2n\pi). \end{aligned} \qquad (11)$$

Eliminirt man daraus n, so erhält man für die Linie, auf welcher die Logarithmen sämmtlicher Werthe der Potenz u^v liegen, die Gleichung

$$x\xi + y\eta = (x^2 + y^2)\, log\, a,$$

wenn ξ und η die laufenden Coordinaten dieser Linie bedeuten. Diese Gleichung schreibt sich auch, wenn mit b und β der Radius Vector und der Neigungswinkel des Exponenten v bezeichnet worden,

$$\xi\, cos\, \beta + \eta\, sin\, \beta = b \cdot log\, a,$$

und zeigt, dass die Puncte, welche die Logarithmen der Werthe der Potenz u^v darstellen, auf einer Geraden liegen, welche senkrecht auf dem Radius Vector des Exponenten v steht und denselben in der Entfernung $b\, log\, a$ vom Anfangspuncte durchschneidet.

Die Werthe (11) sind dieselben, welche sich auch für $log\, r_n$ und φ_n ergeben haben, wenn r_n und φ_n die Polarcoordinaten des Punctes u^n sind. Setzt man nun

$$\begin{aligned} log\,(u_n^v) &= X = \xi + i\,\eta \\ u_n^v &= Y = r\,(cos\, \varphi + i\, sin\, \varphi), \end{aligned}$$

so dass

$$Y = e_o^X$$

ist, so hat man stets

$$\xi = \log r \quad \text{und} \quad \eta = \varphi.$$

Daraus kann man den Schluss ziehen, dass, wenn der Punct X eine Curve beschreibt, die in rechtwinkligen Coordinaten ξ und η durch die Gleichung

$$f(\xi, \eta) = o$$

ausgedrückt ist, der Punct Y in der besonderen isogonalen Verwandtschaft *), welche durch die Gleichung

$$Y = e_o^X$$

gegeben ist, eine Curve durchläuft, deren Gleichung in Polarcoordinaten r und φ ausgedrückt, die folgende:

$$f(\log r, \varphi) = o$$

ist. In dem besonderen Falle, dass der Punct X eine Gerade durchläuft, beschreibt der Punct Y eine logarithmische Spirale. Jeder Geraden in X entspricht also eine logarithmische Spirale in Y; weil aber, wenn k eine ganze Zahl bedeutet,

$$e_o^{X + 2ki} = e_o^X = Y$$

ist, so entspricht jeder logarithmischen Spiralen in Y eine Schaar paralleler Geraden in X, deren Durchschnitte mit der Ordinatenaxe den constanten Abstand 2π von einander haben. Ebenso entspricht jeder durch die Gleichung $f(\log r, \varphi) = o$ gegebenen Curve in Y, eine Schaar von Curven in X, die durch die Gleichung $f(\xi, \eta + 2k\pi) = o$ bestimmt werden, wenn man für k alle ganzen Zahlen und Null setzt.

Zürich im April 1860.

H. Durège.

---

*) Vgl. Siebeck. Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen. Crelle's Journal Bd. 55.

Notizen.

Gletschersturz in Randa 1819 (aus officiellen ältern Urkunden). Proclamation für eine Steuersammlung zu Gunsten des Dorfes Randa. — Der Staatsrath der Republik und Kantons Wallis an seine Mitlandleute der löblichen Zehnen: Wir kommen, Euch über ein Zerstörungsereigniss zu unterhalten, welches sich im Christmonat des Jahres 1819 im Dorfe Randa Zehnen Visp begeben hat. Besondere Umstände haben uns verhindert, die allgemeine Aufmerksamkeit auf dieses Unglück ehender zu erwecken; wir sind aber darum nicht minder überzeugt, dass Ihr die Auseinanderlegung aller diesfälligen Umstände mit eben so warmer Theilnahme an dem Schicksale derjenigen, welche dies Schreckensereigniss betroffen hat, vernehmen werdet. Wenn der in Randa erlittene Verlust nicht so beträchtlich als jener der Ueberschwemmung des Bagnesthales, so ist er jedoch ebensowohl als diese die Wirkung solcher ausserordentlichen Zufälle, welche die Natur von Zeit zu Zeit auf unsern Bergen hervorbringt, und da dieser nur auf eine kleine Völkerschaft drückt, so hat dieselbe nach Massgabe eben so sehr gelitten, als die Einwohner der Thäler von Bagnes, St. Branchier und Martinach. Wir wollen demnach auch das Gemälde dieser Verwüstung vor Augen legen; es ist das Resultat eines Berichtes, der uns von dem Ingenieur der Republik gemacht wurde, welcher durch den Staatsrath auf Ort und Stelle hingesandt worden. — Das unglückliche Dorf Randa befindet sich unter einem Gletscher, welcher auf einer hohen Gipfelwand des Weisshornberges sich anlehnt. Am 27. Dezbr. 1819 riss sich ein Theil desselben los und stürzte mit einem schaudervollen Gekrach in den Thalgrund hinab; diesem Falle wehte ein so heftiger Orkan voraus, dass viele der stärksten Lerchbäume mit sammt den Wurzeln aus dem Boden gerissen und Eisblöcke von vier Kubikfuss im Inhalt eine halbe Stunde weit über das Dorf hinaus geschleudert wurden. Der Giebel des Glockenthurms ward abgebrochen, mehrere Häuser bis auf die Keller niedergerissen, ihr Holzwerk über eine Viertelmeile weit verworfen; acht Ziegen aus ihrem Stalle mehrere hundert Klafter weggetragen; hundertvierzehn Gebäude, seys Häuser, seys Scheunen etc. sind zerstört oder äusserst beschädigt worden; die in der Nähe des Dorfes liegenden Güter, mit Schnee, Eis, Holz und Steinen auf eine Strecke von vierhundert Klafter, mit einer Breite von beinahe 200 und auf eine Höhe zum mindesten von 150 Schuh überdeckt. Ganze Familien wurden mit sammt den Häusern, worin sie sich befanden, vertragen, doch aber zeitlich durch den ehrwürdigen Herrn Pfarrer und seine zwei Küster, welche das Glück hatten, in die Greuelscene nicht verwickelt zu werden, gerettet; zwei Personen allein sind zu Grunde gegangen, die andern sind noch lebend unter den Trümmern hervorgezogen worden. Die amtlich angestellten Schatzungen bringen den Schaden auf eine Summe von 18,128 Franken, ohne die in den Wäldern durch den fürchterlichen Wind verursachten Verheerungen mitzurechnen. — Diesen traurigen Umständlichkeiten müssen wir noch jene einer nicht minder betrübenden Aussicht beifügen: noch ist nur der kleinste Theil des Gletschers heruntergestürzt; was übrig bleibt, drohet einen neuen Sturz und hiemit neue Unglücksfälle, wie solche sich schon mehrmals ereigneten, die vielleicht noch verheerender und schrecklicher werden könnten. Es würde daher sehr wichtig sein, vorbeugende Schutzarbeiten zu unternehmen. Noch hat man keinen bestimmten Entschluss über die anzuwendenden Mittel getroffen, aber welches immer als das Nützlichste vorgeschlagen sein möchte, wird die daraus erfolgenden Unkösten nicht anders als sehr beträchtlich machen. Wie viel Beweggründe ergeben sich hier, um in Euch, werthe Mitlandleute, das Gefühl der Mitleidigkeit und des Beistandes zu erwecken, welches der Zusammenfluss aller dieser Umstände verdient! Wir zweifeln daher keineswegs an dem ganzen Eindrucke, den in Euerm Herzen das von uns Euch eben vorgestellte Gemälde machen wird, und dass Ihr Euch beeilen werdet, Alles was von Euch abhängen kann, zu Gunste und zum Troste dieser unglücklichen Gemeinde zu thun. (Hier folgen die Anordnungen der Steuersammlung.) Gegeben, um in allen Gemeinden der Republik kund gemacht und angeschlagen zu werden. Sitten den 17. Jenner 1821. Im Namen des Staatsrathes: der Landshauptmann der Republik und Kantons Wallis, von Stockalper.

Erdbeben 1755 im Briger- und Mörjerzehnen. (Aus alten Manuscripten.) „Am 9. Christmonat 1755, Nachmittag um halb drei Uhr, war ein äusserst starkes Erdbeben verspürt, welches die darauf folgende Nacht sich öfters durch heftige Stösse erneuerte. Zu Mörell sollen bei dieser Erschütterung die Glocken angeschlagen haben. In Glis ist auf der Abendseite ein Stück von dem Kirchthurm ausgebrochen und heruntergestürzt, dessen Fall durch das Dach und Gewölbe oberhalb dem Rosenkranzaltar eine Oeffnung machte, worauf man das Hochwürdige in der Kirche zum hl. Antonius nach Brig übertrug. Bis Lichtmess ist in dieser Pfarrkirche kein Gottesdienst mehr gehalten worden. Das Erdbeben im besagten Jahre hat den Zehnen Brig am meisten betroffen, und die allenthalben sichtbaren Spuren von Mauerrissen an Kirchen, Klöstern und andern Gebäuden in und um die Stadt Brig sind meistens bei diesem furchtbaren Ereignisse entstanden. Naters blieb gleichfalls nicht verschont, denn hier stürzte der dritte Theil des Kirchengewölbes ein und zerschmetterte das Portal, die Orgel sammt den Stühlen. — „Brig. An dem sehr grossen Spitalthurme ist ein grosser Spalt sichtbar, ebenso bedeutende Mauerrisse an den drei Thürmen des Hauses von Stockalper, wahrscheinlich Folgen der früherhin stattgefundenen Erschütterungen von Erdbeben. — Wallis wurde oft von Erdbeben heimgesucht, als an den Jahren: 829, 858, 1021, 1117, 1170, 1356, 1394, 1531, 1577, 1621, 1633, 1682, 1755. — Von allen Theilen des Kantons ist der Brigerzehnen dem Erdbeben nebst dem Visp am meisten ausgesetzt. Zur Zeit der Zerstörung von Lissabon gab es zu Brig, Naters, Glis, Visp, Leuk vom 1. November 1755 bis zum 27. Februar 1756 fast tägliche Stösse. Einige waren so heftig, dass Kirchen borsten, Glockenthürme einstürzten, Häuser unbrauchbar gemacht wurden, einige Quellen versiegten, das Wasser der Rhone sich trübte, und der Strom rückwärts gehende Bewegungen machte und wie in's Sieden gerieth. Auf den Feldern entstanden breite und lange Spalten, aus denen Wasser hervorsprudelte und die sich oft plötzlich öffneten und schlossen. Zu drei verschiedenen Malen mussten die Einwohner dieser Gemeinden ihre wankenden Häuser verlassen und sich auf's freie Feld flüchten.«

Seltsamer Wind vor dem Erdbeben. Obwohl mehrere es bestätigen und ich selbst oft die Erfahrung davon gemacht, dass oft ein seltsamer schauriger Wind einem grössern Erdbeben vorausgegangen, so wollen doch Andere diess in Zweifel ziehen. Es sei mir erlaubt, noch einen Zeugen aufzuführen, welcher dieses Erdbebenzeichen durch Erfahrung bezeuget. Eine glaubwürdige Person erzählte mir Folgendes: Als im Jahre 1837, zur Fastnachtszeit, das heftige Erdbeben sich in Glis und Brig ereignete, musste sie Geschäfte halber von zwölf bis ein Uhr in der Nacht sich nach Brig begeben. Ungefähr eine Viertelstunde vor dem Erdbeben befand sie sich auf der schönen Pappelallee von Brig nach Glis. Alles war so still, dass man jedes Blatt rauschen hörte. Da wehte plötzlich von den Trimsten herüber NW.—SO., ein so seltsamer, warmer und schaurig durch die Blätter rauschender Wind, dass ihr, ohne zu wissen warum, recht zu fürchten anfing. „Ja nu," sagte sie zu sich selbst, «a so a schühliche Wind, der mer fast der Bozo macht, hän ich no nie g'hört." Ein kalter Schauer überlief mich und ich fing an, nach meiner Herberge die Schritte zu verdoppeln. Kaum eine Viertelstunde später fing die Erde zu balanciren an; der Boden schwankte so auf und nieder, dass die Leute aus den Häusern stürzten und die ganze Nacht meistens auf dem Felde zubrachten.

Das Pfortenöffnen vom Erdbeben. Mehrere Zeugnisse von Unterbäch, Törbel, St. Niclaus, Stalden, Visp, Visperterbinen bestätigen, dass unmittelbar vor einem stärkern Stosse Erdbeben es an der Stubenpforte rüttelte oder dieselbe zum Theil oder ganz öffnete, oder langsam aufdrückte oder rasch aufthat, kurz ohne abzuwarten auf das Wort: »Herein!« oder: »Ingredere!« [M. Tscheinen.]

Die Nordlichtbeobachtungen von Placidus Heinrich. Beim Ausziehen der Sonnenfleckenbeobachtungen Professor Heinrich's in Regensburg (siehe Vierteljahrsschrift IV, 84 bis 87) fand ich zugleich eine Reihe von Nordlichterscheinungen aufgeführt, welche meinem Cataloge (s. Viertelj. II, 354 bis 371) fehlten. Es sind Folgende:

1779 März 15; April 11.
1780 August 15.
1781 Mai 4; Juni 6, 28, 29; August 26.
1782 März 31; September 13.
1783 Mai 29; Juli 2; August 1, 9.
1784 Juni 21.
1802 Juni 3.
1810 October 5.
1814 April 15; Mai 22.
1815 März 2; Mai 29.
1816 Mai 17.
1817 Februar 10; Juni 12; August 16.
1818 April 4.
1819 April 26.

Zwei von Basler erwähnte Nordlichterscheinungen. In dem schon früher (s. Viertelj. IV, 389—390) erwähnten Manuscripte erwähnt Basler folgende zwei Nordlichterscheinungen, welche meinem Cataloge (s. Viertelj. II, 354—371) fehlten:

1603 März 3 (13) »hat man in den Pündten zu angender nacht den Himmel gegen Mitternacht gantz blutrot und erschrocklich gesehen: sonderlich zu Meyenfeld.“

1604 November 27 (December) „sah man in Pünten den Himmel gegen Mitternacht ganz blutroth und erschrocklich.“

Fortunatus de Felice an Christoff Jetzler, Yverdon 12 Avril 1782: «Ayant ouï parler de votre établissement d'une maison d'orphelins, j'en ai demandé le plan, pour l'insérer dans le Journal que je publie sous le titre de Tableau raisonné de l'histoire littéraire du XVIII. siècle, pour en instruire le public, et exciter l'émulation dans d'autres pays. M. Vildermet de Bienne a traduit votre pièce. M. le Banneret Bourgeois me l'a remise, et M. Bertrand en a fait un abrégé; pour le mettre dans le journal. Mais à la lecture de la pièce de M. Bertrand, je n'y ai trouvé que le simple projet, les sentiments que ce projet a produit chez les différents membres de l'Etat, votre fermeté à surmonter les obstacles, et votre générosité pour en faciliter l'exécution. Mais tout cela n'instruit point le public: il faudrait lui présenter le plan de l'établissement, et les lois à suivre dans l'administration, ce qui offrirait un modèle à suivre. Voulez-vous bien, Monsieur, avoir la bonté de me donner un tableau de votre établissement, et les détails nécessaires de l'administration.»

Marc Auguste Pictet an Franz Samuel Wild, Genf, 6. April 1801: «L'électricité vient de tirer miraculeusement d'une apoplexie nerveuse mon ami Saladin. Il était au dernier degré de l'affaissement et tous les secours de la médecine avoient échoué, lorsque l'électricité exactement semblable en ce cas au flambeau de Prométhée l'a précisément *rallumé*. Il n'y a plus à guérir que la paralysie d'un côté, mais tout le reste est parfaitement dans l'état naturel; et en huit jours cet effet a été produit. C'est un très beau triomphe de la physique.»

[R. Wolf.]

Von der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich sind früher herausgegeben worden und ebenfalls durch die Buchhandlung S. Höhr zu beziehen:

Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Heft 1—10 à 2 fl. Rheinisch. 8. Zürich 1847—56.

Meteorologische Beobachtungen von 1837—46. 10 Hefte. 4. Zürich. 2 fl. Rh.

Denkschrift zur Feier des hundertjährigen Stiftungsfestes der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Mit einem Bildniss. 4. Zürich 1846. 1 fl. Rh.

Heer, Dr. O. Ueber die Hausameise Madeiras. Mit einer Abbildung. 4. Zürich. 1852. Schwarz 45 kr. Col. 1 fl.

— Der botanische Garten in Zürich. Mit einem Plane. 4. Zürich 1853. Schwarz 45 kr. Col. 1 fl.

Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Vier Jahrgänge. 8. Zürich 1856—1859 à 2½ Thlr.

Aus den obigen Mittheilungen ist besonders abgedruckt zu haben:

Pestalozzi, H. Ing. Oberst. Ueber die Verhältnisse des Rheins in der Thalebene bei Sargans. Mit einem Plane der Gegend von Sargans. 8. Zürich 1847. 24 kr.

Druck von Zürcher & Furrer.

Taf. III.

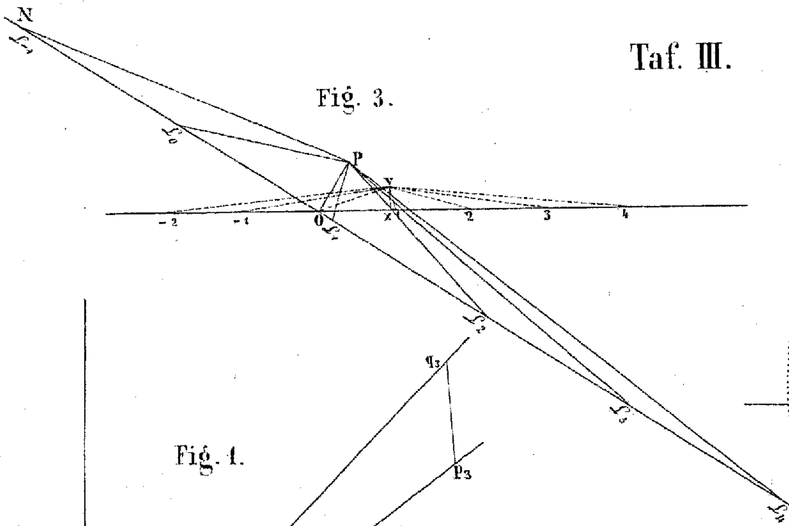

Fig. 3.

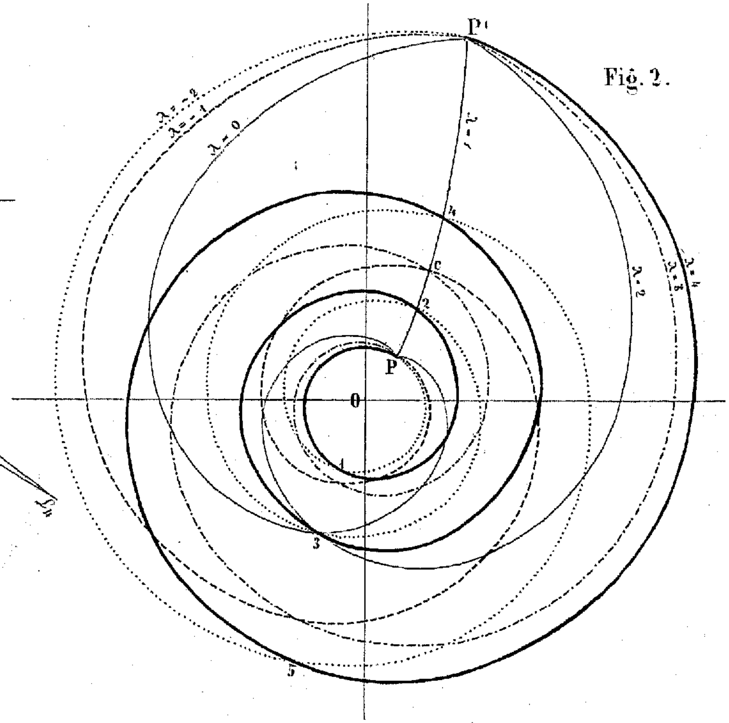

Fig. 2.

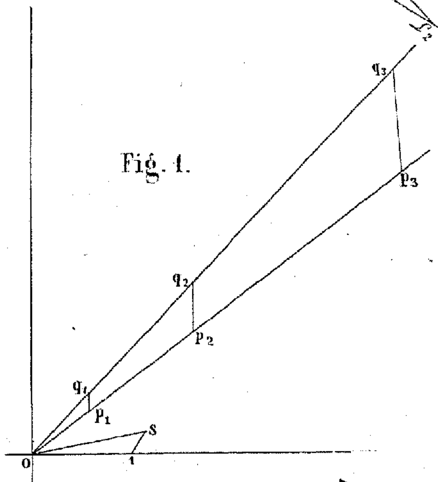

Fig. 1.

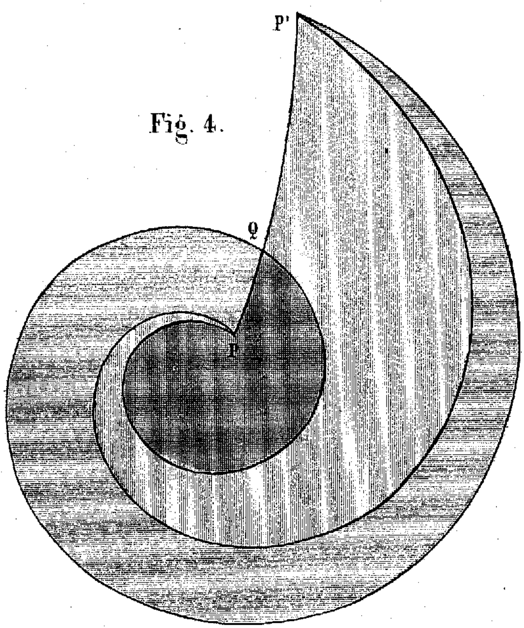

Fig. 4.

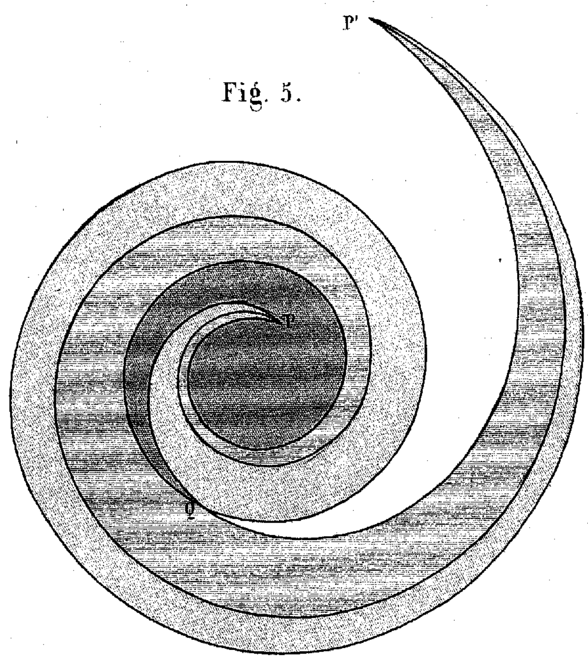

Fig. 5.