Am Tjapus im Salak von 4000—5500'.

An den Solfataren des Salak, 2 Mal, auch über 4000'.

Zu Tjibörrem am Gédé 5600'.

Zu Ngadisarie im Tengger-Gebirge 6060'.

Am Berge Idjen 6600'.

Zu Widodarin am Berge Semiru 6600'.

Am G. Waliran 7—8000'.

Dass auch höher noch Regen fällt, dafür spricht die Vegetation, die am Ardjuno bis zu 11000 Fuss hoch geht, wo ich selbst die grossen Töpfe an den Bittstätten voll Wasser fand, das mit einer dichten Eiskruste bedeckt war. Vermuthlich gehen also auch die Gewitter noch weit über 8000 Fuss hinaus. Ihre eigentliche Region dürfte zwischen 4—6000' gelegen sein.

Ueber die geometrische Darstellung imaginärer Grössen.

Von Dr. Durège.

Obgleich die geometrische Darstellung imaginärer Grössen erst durch Gauss in allgemeine Aufnahme gekommen ist, so ist doch die Idee, dass man eine auf einer begrenzten Geraden a senkrecht stehende Gerade von gleicher Länge durch $a\sqrt{-1}$ ausdrücken könne, viel älter [1]. Sie ist schon vor mehr als hun-

[1]) Vgl. Matzka. Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra; Prag 1850, in welchem Buche eine sehr gute Uebersicht über die diesen Gegenstand betreffenden Arbeiten gegeben ist.

dert Jahren von Heinrich Kühn (Professor an dem ehemaligen academischen Gymnasium zu Danzig) in einer Abhandlung, welche unter dem Titel: „Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis“ im 3ten Bande der neuen Petersburger Commentarien vom Jahre 1750 und 1751 abgedruckt ist, ausgesprochen worden. Später, in den Jahren 1805 und 1828, nahmen zwei Franzosen, Buée und Mourrey, und ein Engländer, John Warren, denselben Gedanken wieder auf und bildeten ihn fast bis zum heutigen Standpunkte aus. Unter den Abhandlungen der Genannten scheint die erste von John Warren: „A Treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities; Cambridge 1828“ die bedeutendste zu sein, indem Warren darin die geometrische Addition gerader Linien, welche auch von Möbius in seiner „Statik“ und den „Elementen der Mechanik des Himmels“ in anderer Weise benutzt worden ist, einer ausgedehnten Betrachtung unterwirft und ausserdem mehr als seine Vorgänger bemüht ist, Willkürlichkeiten zu vermeiden und seine Sätze auf bestimmte Principien zurückzuführen. Nichtsdestoweniger ist weder Warren's, noch die spätere durch Gauss veranlasste Darstellungsweise (Gauss selbst hat bekanntlich nur eine kurze Andeutung gegeben) von Willkürlichkeit ganz freizusprechen; namentlich gelangt man nicht zu der Ueberzeugung, dass die gewählte Form die einzig mögliche sei. Die gewöhnliche Darstellungsweise ist bekanntlich kurz folgende: Da man eine einer Strecke a direct entgegengesetzt gerichtete Strecke von gleicher Länge durch $-a$ ausdrückt, so kann man diesen Ausdruck als aus der Multiplikation von a mit -1 entstanden ansehen. Drückt man daher die auf a senkrecht stehende Strecke durch $a\lambda$ aus, so muss man dieselbe, um zur Strecke $-a$ zu gelangen, noch einmal mit λ multipliciren und erhält somit $a\lambda^2 = -a$, woraus $\lambda = \sqrt{-1}$ folgt. Hat man nun eine gegen a unter einem beliebigen Winkel α geneigte Strecke (wiederum von der Länge a), so ist die Projection derselben auf a gleich $a \cos \alpha$, und die von ihrem Endpunkte auf a herabgelassene Senkrechte $a \sin \alpha \cdot \sqrt{-1}$. Betrachtet man aber die geneigte Strecke als die Summe dieser beiden Coordinaten, so erhält dieselbe den Ausdruck

$$a\,(\cos \alpha + \sqrt{-1}\,\sin \alpha).$$

Ich will nun im Folgenden nachzuweisen versuchen, dass, wenn man von der geometrischen Addition gerader Linien ausgeht, man dadurch mit Nothwendigkeit auf die obige Form geführt wird[1]).

Man pflegt in der Geometrie begrenzte gerade Linien nur in Rücksicht auf ihre Länge als mathematische Begriffe aufzufassen; als solche kann man sie addiren, subtrahiren u. s. w., alle Operationen mit ihnen vornehmen, die die Mathematik lehrt. Ebenso betrachtet man die Winkel, welche gerade Linien mit einander oder mit einer festen Axe bilden, als mathe-

---

[1]) Während der Ausarbeitung des gegenwärtigen Aufsatzes kam mir die Schrift Witzschel's: «Grundlinien der neueren Geometrie; Leipzig 1858,» zu Gesicht, und ich fand darin mit Vergnügen im Allgemeinen eine Uebereinstimmung mit der hier ausgesprochenen Ansicht, wenn gleich die dort gewählte Grundlage von der hier aufgestellten etwas verschieden ist. Die daselbst citirte Abhandlung von Drobisch (Berichte der K. S. Gesellschaft der Wissensch. 2ter Bd. 1848) habe ich mir nicht verschaffen können.

matische Begriffe und verfährt mit ihnen auf ähnliche Weise. Da nun aber eine begrenzte Gerade erst vollständig bestimmt ist, wenn sowohl ihre Länge, als auch ihre Richtung gegeben ist, so entsteht die Frage, ob man sie nicht nach beiden Rücksichten zugleich als mathematischen Begriff auffassen könne. Die Grundlage der ganzen Mathematik ist die Addition; alle Begriffe, die sich addiren lassen, und nur diese, sind mathematische Begriffe. Zur Beantwortung obiger Frage kommt es daher nur darauf an, zu untersuchen, ob sich gerade Linien, nach Länge und Richtung zugleich betrachtet, addiren lassen oder nicht. Die charakteristische Eigenschaft, durch welche sich die Addition von allen nicht mathematischen Begriffsverbindungen unterscheidet, ist von Aloys Mayr in dessen vortrefflicher Schrift: „Untersuchungen über die wissenchaftliche Methode, Würzburg 1845," dahin angegeben worden, dass die Addition eine solche Verbindung gleichartiger Begriffe ist, bei welcher das Resultat mit den verbundenen Begriffen wiederum gleichartig und ausserdem von der Reihenfolge, in welcher die Begriffe mit einander verbunden werden, unabhängig ist. Nun sind gerade Linien, die durch ihre Länge und ihre Richtung bestimmt sind, gleichartige Begriffe. Die Elementargeometrie lehrt ferner, dass, wenn man mehrere durch Länge und Richtung gegebene Gerade in beliebiger Reihenfolge mit einander verbindet, die Verbindungslinie des Anfangspunkts der ersten mit dem Endpunkte der letzten Geraden nach Länge und Richtung unverändert dieselbe bleibt, wie man auch die Reihenfolge, in der die Geraden mit einander verbunden werden, verändern möge. Da nun diese Verbindungslinie ebenfalls eine durch Länge und Richtung zugleich bestimmte Gerade ist, so steht nichts im Wege, die angedeutete Verbindung gerader Linien als Addition derselben, und die resultirende Gerade als ihre Summe anzusehn; denn diese Art der Verbindung gerader Linien trägt alle Merkmale der besonderen Verbindung, die man Addition nennt, an sich. Es hindert also auch nichts, die geraden Linien, wenn sie als durch Länge und Richtung zugleich bestimmt angesehen werden, als mathematische Begriffe einzuführen und als solche zu behandeln. Ich habe schon erwähnt, dass diese geometrische Addition gerader Linien namentlich von Möbius in ausgedehnter Weise angewandt worden ist.

Ist daher MNP ein Dreieck, und bezeichnet man mit (MN) die Gerade MN, wenn man bei derselben nicht nur ihre Länge, sondern auch ihre Richtung berücksichtigt, so hat man der mathematischen Zeichensprache gemäss

$$(MN) + (NP) = (MP).$$

Es entsteht jetzt die Aufgabe, eine Gerade, die ihrer Länge und Richtung nach gegeben ist, auch analytisch auszudrücken. Zur Bestimmung der Richtung einer Geraden wählt man gewöhnlich den Winkel, welchen dieselbe mit einer beliebigen, als fest angenommenen, Axe bildet. Behält man dies bei und bezeichnet mit a die Länge der Geraden (MN) und mit α ihre Neigung gegen die feste Axe, so hat man (MN) als eine Function von a und α zu betrachten und setze

$$(MN) = F(a, \alpha).$$

Bezeichnen dann b, β und c, γ resp. die Längen und Neigungen (gegen die feste Axe) der Geraden (NP) und (MP), so ist auch

$$(NP) = F(b, \beta); \ (MP) = F(c, \gamma)$$

und man hat

$$F(a,\alpha) + F(b,\beta) = F(c,\gamma). \tag{1}$$

Ausserdem bestehen, weil die drei Geraden (MN), (NP), (MP) ein Dreieck bilden, zwischen den sechs Grössen a, α; b, β; c, γ die Relationen

$$\begin{aligned} a \cos \alpha + b \cos \beta &= c \cos \gamma \\ a \sin \alpha + b \sin \beta &= c \sin \gamma, \end{aligned} \tag{2}$$

und es handelt sich jetzt darum, die Function F zu bestimmen. Dabei ist noch folgendes zu bemerken: Da eine Gerade $F(a, \alpha)$ durch ihre Länge a und ihre Neigung α gegen die feste Axe schon vollständig bestimmt ist, so ist bei zwei Geraden $F(a, \alpha)$ und $F(b, \beta)$, die beide ganz beliebig gewählt werden können, die Funktion $F(a, \alpha)$ unabhängig von b und β, und ebenso $F(b, \beta)$ unabhängig von a und α.

Denkt man sich die Gleichungen (2) nach c und γ aufgelöst und die daraus hervorgehenden Werthe von c und γ in (1) substituirt, so wird letztere eine identische Gleichung: man kann sie daher alsdann partiell nach den vier Grössen a, α, b, β differentiiren. Thut man dies, indem man der Kürze wegen

$$F(a,\alpha) = A;\ F(b,\beta) = B;\ F(c,\gamma) = C$$

setzt, wodurch die Gleichung (1) in

$$A + B = C$$

übergeht, so erhält man:

$$\frac{dA}{da} = \frac{dC}{dc} \cdot \frac{dc}{da} + \frac{dC}{d\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{da}; \qquad \frac{dB}{db} = \frac{dC}{dc} \cdot \frac{dc}{db} + \frac{dC}{d\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{db}$$

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{dC}{dc} \cdot \frac{dc}{d\alpha} + \frac{dC}{d\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{d\alpha}; \qquad \frac{dB}{d\beta} = \frac{dC}{dc} \cdot \frac{dc}{d\beta} + \frac{dC}{d\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{d\beta}$$

oder, wenn man die aus den Gleichungen (2) sich ergebenden Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{dc}{da} = \cos(\gamma - \alpha) \qquad \frac{dc}{db} = \cos(\gamma - \beta)$$

$$\frac{d\gamma}{da} = -\frac{\sin(\gamma - \alpha)}{c} \qquad \frac{d\gamma}{db} = -\frac{\sin(\gamma - \beta)}{c}$$

$$\frac{dc}{d\alpha} = a\sin(\gamma - \alpha) \qquad \frac{dc}{d\beta} = b\sin(\gamma - \beta)$$

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{a\cdot\cos(\gamma - \alpha)}{c} \qquad \frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{b\cos(\gamma - \beta)}{c}$$

substituirt,

$$\frac{dA}{da} = \cos(\gamma - \alpha)\frac{dC}{dc} - \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{c}\frac{dC}{d\gamma}$$

$$\frac{dA}{d\alpha} = a\sin(\gamma - \alpha)\frac{dC}{dc} + \frac{a\cos(\gamma - \alpha)}{c}\frac{dC}{d\gamma}$$

$$\frac{dB}{db} = \cos(\gamma - \beta)\frac{dC}{dc} - \frac{\sin(\gamma - \beta)}{c}\frac{dC}{d\gamma}$$

$$\frac{dB}{d\beta} = b\sin(\gamma - \beta)\frac{dC}{dc} + \frac{b\cos(\gamma - \beta)}{c}\frac{dC}{d\gamma}$$

Eliminirt man aus diesen vier Gleichungen die beiden Differentialquotienten $\frac{dC}{dc}$ und $\frac{dC}{d\gamma}$, so erhält man

$$(3) \qquad a\frac{dB}{db} = a\cos(\beta - \alpha)\frac{dA}{da} + \sin(\beta - \alpha)\frac{dA}{d\alpha}$$

$$(4) \qquad a\frac{dB}{d\beta} = -ab\sin(\beta - \alpha)\frac{dA}{da} + b\cos(\beta - \alpha)\frac{dA}{d\alpha}$$

oder auch

$$(5) \qquad b\frac{dA}{da} = b\cos(\beta - \alpha)\frac{dB}{db} - \sin(\beta - \alpha)\frac{dB}{d\beta}$$

$$(6) \qquad b\frac{dA}{d\alpha} = ab\sin(\beta - \alpha)\frac{dB}{db} + a\cos(\beta - \alpha)\frac{dB}{d\beta}$$

von welchen zwei Paaren von Gleichungen jedes die Folge des andern ist. Betrachtet man dieselben als partielle Differentialgleichungen zur Bestimmung von A als Function von a und α, so hat man in ihnen $\frac{dB}{db}$

und $\frac{dB}{d\beta}$ als constant anzusehen; will man hingegen daraus B als Function von b und β bestimmen, so sind $\frac{dA}{da}$ und $\frac{dA}{d\alpha}$ constante Grössen. Löst man nun eine dieser partiellen Differentialgleichungen, z. B. die Gleichung (3), indem man sie auf die gewöhnliche Weise auf die beiden simultanen Differentialgleichungen

$$dA : da : d\alpha = a\frac{dB}{db} : a \cos(\beta-\alpha) : \sin(\beta-\alpha)$$

zurückführt, deren vollständige Integrale

$$a \sin(\beta-\alpha) = c_1 \text{ und } A - a\frac{dB}{db}\cos(\beta-\alpha) = c_2$$

mit den beiden willkürlichen Constanten c_1 und c_2 sind, so erhält man, wenn mit φ eine willkürliche Function bezeichnet wird,

$$A = a\frac{dB}{db}\cos(\beta-\alpha) + \varphi\,[a \sin(\beta-\alpha)] \tag{7}$$

als die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (3). Dies ist die allgemeinste Form, welche die Funktion A haben kann, wenn man nur auf die erste der beiden partiellen Differentialgleichungen (3) und (4) Rücksicht nimmt. Aus der Verbindung beider geht aber sogleich eine nähere Bestimmung der willkürlichen Function φ hervor. Denn, da B und also auch $\frac{dB}{db}$ und $\frac{dB}{d\beta}$ von a und α unabhängig sind, so zeigt die Gleichung (5), dass der partielle Differentialquotient der Function A, nach a genommen, die Grösse a gar nicht enthält, folglich eine Function von α allein sein muss. Differentiirt man aber den rechten Theil der Gleichung (5) noch einmal nach α und multiplicirt mit a, so erhält man den rechten Theil der Gleichung (6). Setzt man daher dem Vorigen gemäss

$$\frac{dA}{da} = f(\alpha)$$

so ergibt sich aus (6)

$$\frac{dA}{d\alpha} = a \frac{df(\alpha)}{d\alpha}$$

und folglich

$$A = a f(\alpha) + h,$$

wo h eine willkürliche Constante bezeichnet. Demgemäss erhellt aus der Gleichung (7), dass auch die willkürliche Function φ die Form

$$a \cdot \psi\, [\sin\, (\beta - \alpha)] + h$$

haben muss, wo ψ eine andere willkürliche Function bedeutet. Dadurch, dass die Grösse a nur in der ermittelten einfachen Verbindung in der Function A enthalten ist, geht nun die partielle Differentialgleichung (3) in eine gewöhnliche Differentialgleichung über; ihre vollständige Lösung muss daher statt einer willkürlichen Function nur eine willkürliche Constante enthalten. Man wird also auch die willkürliche Function ψ bestimmen und durch eine willkürliche Constante ersetzen können. In der That, da nun auch

$$\frac{dB}{db} = f(\beta)$$

ist, so erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{\psi\, [\sin\, (\beta - \alpha)]}{f(\beta)} = \Psi(\alpha)$$

setzt,

$$A = a\, f(\beta)\, [\cos\, (\beta - \alpha) + \Psi(\alpha)] + h$$

$$\frac{dA}{da} = f(\alpha) = f(\beta)\, [\cos\, (\beta - \alpha) + \Psi(\alpha)],$$

und wenn man dies in die Gleichung (3) substituirt,

$$o = \cos\, (\beta - \alpha)\, \psi(\alpha) + \sin\, (\beta - \alpha)\, \frac{d\, \Psi(\alpha)}{d\alpha},$$

welche Gleichung vollständig integrirt

$$\Psi(\alpha) = n \sin(\beta - \alpha)$$

ergibt, worin n die willkürliche Constante bedeutet. Man erhält also

$$f(\alpha) = f(\beta)\,[\cos(\beta - \alpha) + n \sin(\beta - \alpha)].$$

Die Bestimmung der willkürlichen Constanten n ergibt sich nun aus der schon benutzten Bedingung, dass $f(\alpha)$ von β und $f(\beta)$ von α unabhängig sein muss. Denn daraus folgt, dass $f(\beta)$ denselben Werth behält, welchen Werth man auch der Grösse α zuertheilen möge. Setzt man $\alpha = o$, so erhält man

$$f(\beta) = \frac{f(o)}{\cos\beta + n \sin\beta}$$

Dann ist aber auch

$$f(\alpha) = \frac{f(o)}{\cos\alpha + n \sin\alpha}$$

Mithin erhält man die Relation

$$\frac{1}{\cos\alpha + n \sin\alpha} = \frac{\cos(\beta - \alpha) + n \sin(\beta - \alpha)}{\cos\beta + n \sin\beta},$$

aus welcher

$$n = \pm \sqrt{-1}$$

folgt. Demnach ist

$$A = a\, f(o)\,(\cos\alpha \pm \sqrt{-1} \sin\alpha) + h$$

$$B = b\, f(o)\,(\cos\beta \pm \sqrt{-1} \sin\beta) + h$$

$$C = c\, f(o)\,(\cos\gamma \pm \sqrt{-1} \sin\gamma) + h$$

Weil aber $A + B = C$ sein soll, so muss wegen der Relationen (2) die Constante h verschwinden. Zur Bestimmung der Constanten $f(o)$ muss man noch eine Voraussetzung machen, nämlich, dass eine Gerade schon durch ihre Länge allein vollständig ausgedrückt sei, wenn ihre Richtung mit der der festen Axe zusammenfällt, dass also für $\alpha = o$ $A = a$ werde; dann wird $f(o) = 1$, und man erhält schliesslich den bekannten Ausdruck

$$A = a\,(\cos\alpha \pm \sqrt{-1}\,\sin\alpha).$$

Das doppelte Zeichen bleibt willkürlich, indem man darüber nach Belieben entscheiden muss, ob man für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $A = +a\sqrt{-1}$ oder $= -a\sqrt{-1}$ annehmen wolle.

Ich habe absichtlich den im Vorigen eingeschlagenen, allerdings weitläufigen Weg nicht vermieden, um darüber keine Zweifel übrig zu lassen, dass die angegebene Form die einzig mögliche ist, und man mit Nothwendigkeit auf dieselbe geführt wird.

Indem auf diese Weise die geometrische Bedeutung eines complexen Ausdrucks als die nothwendige Folge davon erscheint, dass man die geraden Linien, als durch Länge und Richtung zugleich bestimmt, den Gesetzen der Addition unterwirft und dadurch als mathematische Begriffe einführt, hört diese Betrachtung auf, ein blosses Curiosum, eine interessante Analogie zu sein; es scheint vielmehr darin ein gebotener Fortschritt zu liegen, dass man von der gesonderten Betrachtung der Längen und der Richtungen gerader Linien zur Verbindung beider übergeht, wozu der Anfang in der Einführung der negativen Grössen in die Geometrie enthalten ist.

Man hat einen Widerspruch darin zu finden geglaubt, dass die imaginären Grössen sich geometrisch construiren lassen, während sie doch, analytisch betrachtet, unmöglich, ja undenkbar seien. So sieht sich Warren genöthigt, sich in einer ausführlichen Abhandlung: „Consideration of the objections raised against the geometrical representation of the square roots of negative quantities" (Philosophical transactions 1829), gegen die ihm gemachten Einwürfe zu vertheidigen. Man hat behauptet, die Constructionen imaginärer Grössen thäten gleichsam bildlich den Irrthum dar und Aehnliches. Aus diesem Grunde haben Matzka und Scheffler (Ueber das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, insbesondere über die geometrische Bedeutung der imaginären Zahlen; Braunschweig 1846) geglaubt, den Begriff der Richtung schon in die Arithmetik einführen, der rein mathematischen Grösse eine Richtung zuschreiben zu müssen. Allein es ist gewiss nicht richtig, dass die imaginären Grössen undenkbare Grössen seien. Sie sind nicht weniger und nicht mehr denkbar, als negative Grössen, als Brüche, als irrationale Grössen u. s. w. Die reine Mathematik basirt auf dem unmittelbar aus der Wirklichkeit abstrahirten Begriffe der Eins oder der Einheit. Verbindet man mehrere Einheiten, mittelst der besonderen Begriffsverbindung der Addition mit einander, so gelangt man zunächst nur zu denjenigen Begriffen, die man nach dem heutigen Sprachgebrauche positive ganze Zahlen nennt. Hätte man nun hiebei stehen bleiben wollen, so würde der Umfang der Mathematik ein sehr geringer geblieben sein. Der ungehinderte Fortschritt der Wissenschaft erforderte daher bei jeder indirecten Operation die Einführung neuer Begriffe, nämlich jedesmal dann, wenn die Lösung der gestellten Aufgaben mittelst der schon bekannten Begriffe unmöglich wurde. So erforderte die Subtraction die Einführung der Null und der negativen ganzen Zahlen, die Division die Brüche; die Umkehrung der Potenziirung einerseits die Logarithmen, anderseits die irrationalen und die imaginären Grössen; so sind alle Integrale, deren Zurückführung auf schon bekannte Functionen unmöglich ist, neue Begriffe, die Eulerschen und elliptischen Integrale die bedeutendsten derselben. Wollte man also die Einführung neuer Begriffe überhaupt nicht zulassen, so würde man es in der Mathematik nur mit den positiven ganzen Zahlen zu thun haben[1]; wollte man hingegen bei der Wurzelausziehung der Einführung neuer Begriffe eine Grenze setzen, so ist klar, dass die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl, die nicht ein vollständiges Quadrat bildet, gerade so unmöglich sein würde, als die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl. Es erhellt also hieraus, dass die imaginären Grössen, weit entfernt, unmöglich, undenkbar und für die Mathematik von keiner Bedeutung zu sein, vielmehr im consequenten Fortgange der Wissenschaft nothwendig in die Mathematik eingeführt werden mussten, und vermöge der ihnen zukommenden besonderen Eigenschaften von der allergrössten Bedeutung sind. Dies ist, ausser in andern Disciplinen, vorzüglich in der Theorie der elliptischen Functionen zu Tage getreten, so dass Jacobi sich in Beziehung auf diese Theorie einmal zu dem Ausspruche veranlasst sah: Hätte Legendre die imaginären Grössen nicht zu ängstlich vermieden, so würde er schwerlich seinen Nachfolgern noch etwas zu thun übrig gelassen haben.

Was nun die geometrische Interpretation des Ima-

---

[1]) So verwarfen die Alten die negativen Wurzeln einer Gleichung und nannten sie taube Wurzeln.

ginären anbelangt, so muss zuvörderst offen ausgesprochen werden, dass die Geometrie, im Gegensatze zur reinen Mathematik, ebenso wie die Mechanik und die physikalischen Wissenschaften, eine Erfahrungswissenschaft ist, insofern nämlich, als es in ihr Sätze gibt, deren Wahrheit schlechterdings nicht anders als aus der Erfahrung bewiesen werden kann, so viele Mühe man sich auch gegeben hat, sie unabhängig von der Erfahrung zu beweisen. Allerdings ist die Geometrie, weil sie nur äusserst wenig der Erfahrung entlehnt, die vollkommenste aller Erfahrungswissenschaften, wodurch sie auch die Grundlage für die Mechanik und Physik geworden ist; aber sie hat das mit diesen Wissenschaften gemein, dass sie nicht selbst Mathematik ist, sondern, dass man die Mathematik auf sie anwendet. Da nämlich die Begriffe, mit denen man es in der Geometrie, Mechanik und Physik zu thun hat, sich als mathematische Begriffe erweisen, so kann man mit ihnen alle mathematischen Operationen vornehmen; die dadurch gewonnenen Resultate sind dann aber zunächst nur rein mathematisch; sie werden erst zu geometrischen, mechanischen oder physicalischen Resultaten, dadurch, dass man sie den gegebenen Bedingungen gemäss wieder interpretirt. Da nun im Vorigen nachgewiesen ist, dass der mathematische Ausdruck für eine Gerade, die durch ihre Länge und ihre Richtung zugleich gegeben ist, sich als eine complexe Grösse ergibt, so wird man, wenn man bei der mathematischen Behandlung einer geometrischen Untersuchung auf einen complexen Ausdruck stösst, denselben geometrisch interpretiren können. Daher ist es unnöthig, ja unzulässig, einer rein mathematischen Grösse, einer Zahl, eine Richtung zuzuschreiben, da der Begriff der Richtung rein geometrisch ist. Es erscheint als sehr wahrscheinlich, dass die imaginären Grössen auch in der Mechanik und Physik ihre Anwendung finden werden. Eine sehr glückliche physicalische Interpretation des Imaginären ist ja schon von Fresnel bei der Untersuchung der totalen Reflexion wirklich ausgeführt worden, indem Fresnel annahm, dass der Multiplication mit $\sqrt{-1}$ die Verzögerung eines Lichtstrahls um den vierten Theil der Wellenlänge entspreche. Wäre es nun gerechtfertigt, der rein mathematischen Grösse eine Richtung beizulegen, so könnte man auch mit demselben Rechte den optischen Begriff der Verzögerung mit ihr verbinden, und würden noch andere physicalische oder mechanische Deutungen des Imaginären entdeckt werden, so würden ihr noch mancherlei physicalische oder mechanische Eigenschaften beizulegen sein. Es liegt wohl auf der Hand, dass man damit dem Begriff der rein mathematischen Grösse den allergrössten Zwang anthun würde. Die imaginären Grössen finden ihre Berechtigung unabhängig von jeder geometrischen Interpretation in dem inneren Zusammenhange der reinen Mathematik selber; ihre geometrische Deutung aber kann nur aus der Geometrie geschöpft werden.