# Welchen speciellen Werth von $(1 + a + bi)^{k+k_i}$ gibt die Binomialreihe, welchen die logarithmische Reihe für log. $(1 + a + bi)$, und gegen welche Grenzen hin convergirt der Binomialcoefficient $\binom{k+k_i}{\gamma}$ für $\gamma = \infty$?

**Von W. Denzler.**

---

Schon in Nro. 114 der Zürcher-Mittheilungen haben wir die Behauptung ausgesprochen, dass die Binomialreihe für $(1 + a + bi)^{k+k_i}$ in sämmtlichen Fällen ihrer Convergenz den speciellen Werth ${}_0(1 + a + bi)^{k+k_i}$ von $(1 + a + bi)^{k+k_i}$ darbietet. Wir wollen nun zunächst im Folgenden die Wahrheit dieser Behauptung darzuthun versuchen, und hiebei die im Ganzen klassische Arbeit des für die mathematischen Wissenschaften viel zu frühe verstorbenen Abel, die sich im Journal von Crelle, Bd. I. Nro. 29 abgedruckt findet, zu Grunde legen. Diese Arbeit gibt zwar ein Resultat, das nur in einem einzigen Falle unrichtig ist; aber die Begründung scheint uns schon in den ersten einleitenden Sätzen, die sich auf die bedeutendste Schwierigkeit des ganzen Beweises beziehen, auf einem für das Nachfolgende wesentlichen Irrthum zu beruhen. Wir werden es nicht unterlassen, im Folgenden das uns im Abel'schen Beweise vorzugsweise irrthümlich Scheinende ausführlich zu besprechen.

Vor Allem aus erlauben wir uns an folgende Sätze, die theils Definitionen, theils Lehrsätze sind, aus den Nro. 113 und 114 der Zürcher-Mittheilungen zu erinnern, wobei wir mit a, b, k und $k_,$ durchgehends reelle Zahlen, mit $+ i$ und $- i$ aber die beiden Werthe von $\sqrt{-1}$ andeuten wollen:

mod. $(a + bi)$ bezeichnet die absolute Zahl, deren Quadrat $=$ $= a^2 + b^2$ ist.

arg. $(a + bi)$ bezeichnet den einzigen Bogen, der entweder $= \pi$ oder zwischen $\pi$ und $- \pi$ liegt, dessen Cosinus $= a :$ mod. $(a+bi)$ und dessen Sin. $= b :$ mod. $(a+bi)$.

l r, wo r eine absolute Zahl, bezeichnet die reelle Zahl, mit der e oder 2,718.. potenzirt, r gibt.

log. $(a + bi)$ stellt jede der unendlich vielen Zahlen dar, die in die Exponentialreihe $1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdot \cdot \cdot \cdot$ für x gesetzt, dieser Reihe den Betrag $(a + bi)$ gibt.

log. $(a + bi) =$ l mod. $(a + bi) + [2\gamma\pi +$ arg. $(a + bi)]\, i$, wo $\gamma$ die 0 und jede positive oder negative ganze Zahl zu ihren Werthen hat.

${}_\tau$log. $(a + bi)$, wo $\tau$ eindeutig und entweder die 0, oder dann irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, bezeichnet denjenigen speciellen Werth von log. $(a + bi)$, der $=$ l mod. $(a + bi) +$ $[2\tau\pi +$ arg. $(a + bi)]i$ ist. ${}_0$log r ist somit $=$ l r, wenn r positiv.

$(a + bi)^{k+k_,i}$ drückt jeden der Werthe aus, welchen die Exponentialreihe $1 + x + \cdot \cdot \cdot \cdot$ erhält, wenn für x jeder der Werthe von $(k + k_,i)$ log. $(a + bi)$ gesetzt wird.

${}_\tau(a + bi)^{k+k_,i}$ bezeichnet denjenigen speciellen Werth von $(a + bi)^{k+k_,i}$, den die Exponentialreihe $1 + x + \ldots$ darbietet, wenn in derselben durchgehends die eindeutige Grösse $(k + k_,i)$ ${}_\tau$log. $(a + bi)$ für x gesetzt wird. ${}_0e^{k+k_,i}$ ist somit nichts anders als der Betrag der Exponentialreihe $1 + (k + k_,i) +$ $+ \frac{(k + k_,i)^2}{1 \cdot 2} + \cdot \cdot \cdot \cdot$

${}_\tau(a + bi)^{k+k_,i} = {}_0e^{(k+k_,i)\,{}_\tau\log. (a+bi)}$. Der Exponent dieser Potenz lässt sich nach der erwähnten Gleichung, welche die Verwandlung von ${}_{\tau}\log.(1 + a + bi)$ in eine Complexe lehrt, in eine Complexe verwandeln. Setzen wir diese $= p + qi$, so wird $e^p (\cos q + i \sin q)$ die der Potenz ${}_{\tau}(a + bi)^{k+k,i}$ gleiche Complexe sein.

${}_{\tau}\sqrt[k+k,i]{a + bi}$ ist mit der Potenz ${}_{\tau}(a+bi)^{\frac{1}{k+k,i}}$ gleichbedeutend. Es ist daher ${}_{0}\sqrt{16} = + 4$.

arc. tg. a bezeichnet den einzigen zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ enthaltenen Bogen, dessen Tangente $= a$.

arc. cos. a bezeichnet, wenn $a^2 \overline{\overline{<}} 1$, den einzigen pos. $\pi$ nicht übersteigenden Bogen, dessen Cosinus $= a$.

$\underset{\smile}{a}$ bedeutet $+ 1$, wenn $a = o$ oder eine positive Zahl, hingegen $-1$, wenn a negativ ist.

### Erster Lehrsatz.

Bezeichnen a, b, k und $k_{\prime}$ reelle Zahlen, $+i$ und $-i$ aber die beiden Werthe von $\sqrt{-1}$, so besteht die Gleichung:

$$ {}_{0}(1+a+bi)^{k+k,i} = 1 + \binom{k+k,i}{1}(a+bi) + \binom{k+k,i}{2}(a+bi)^2 + \cdots \quad 1) $$

jedoch nur in folgenden Fällen:

1) Wenn mod. $(a+bi) < 1$.
2) » » $= 1$, arg. $(a+bi) = \pi$ u. k positiv
3) » » $= 1$, $[\text{arg. }(a+bi)]^2 < \pi^2$ u. $1+k$ positiv.
4) » » $> 1$, $k_{\prime} = 0$ u. k eine pos. ganze Zahl, oder 0 ist.

### Beweis.

#### I.

Um die Vergleichung unserer Arbeit mit der oben erwähnten Abel'schen Abhandlung dem Leser zu erleichtern, wählen wir die in dieser Abhandlung gebrauchte Bezeichnung, die wir in folgenden Gleichungen darstellen:

$$\varphi\,(k+k,i) = 1 + \binom{k+k,i}{1}\alpha\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) +$$
$$\binom{k+k,i}{2}\alpha^2\cos\,(2\varphi + i\sin 2\varphi) + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

wo $\alpha = \text{mod.}\ (a+bi)$

$\varphi = \text{arg.}\ (a+bi)$, mithin eine eindeutige Grösse $= \pi$ od. zwischen $\pi$ und $-\pi$.

$$\delta_\mu = \text{mod.}\ \frac{k+k,i-(\mu-1)}{\mu}$$

$$\gamma_\mu = \text{arg.}\frac{k+k,i-(\mu-1)}{\mu} = \text{arg.}\ [k+k,i-(\mu-1)]$$

$$\lambda_\mu = \delta_1\cdot\delta_2\cdot\delta_3\cdot\cdot\cdot\cdot\delta_\mu$$

$$\Theta_\mu = \mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdot\cdot\cdot\cdot\gamma_\mu$$

$f(k, k,) = \text{mod.}\ \varphi(k+k,i)$, mithin z. B.

$$f(1,0) = \text{mod.}\ [1 + \alpha\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)]$$
$$= \text{mod.}\ (1 + a + bi)$$

$\psi(k, k,) = \text{arg.}\ \psi(k+k,i)$, mithin $\psi(k, k,)$ eine eindeutige Grösse $= \pi$ oder zwischen $\pi$ und $-\pi$.

Mit $r_b$ bezeichne ich die reelle, jedoch nicht gebrochene Zahl, für welche die Summe $2\pi r_b + b$ entweder $= \pi$, oder dann zu einem Bogen wird, der zwischen $\pi$ und $-\pi$ liegt. So ist z. B. $r_{-\frac{7}{4}\pi} = +1$, $r_{-\pi} = +1$, $r_\pi = 0$.

Bei dieser angenommenen Bezeichnung ergibt sich nun sehr leicht durch Verwandlung der Reihe $\varphi(k+k,i)$ in eine Complexe die Gleichung

$$\varphi(k+k,i) = 1 + \alpha\lambda,\cos\Theta, + \alpha^2\lambda_2\cos\Theta_2 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \quad 2)$$
$$i[\alpha\lambda,\sin\Theta, + \alpha^2\lambda_2\sin\Theta_2 + \cdot\cdot\cdot\cdot]$$

## II.

Wir gehen jetzt zur Untersuchung der Reihe $\varphi(k+k,i)$ in Beziehung auf ihre Convergenz oder Divergenz über, und erörtern hiebei folgende Fälle:

1) $\alpha < 1$.
2) $\alpha = 1$, k positiv.
3) $\alpha = 1$, $k = 0$ od. zw. 0 u. $-1$, $\varphi^2 < \pi^2$.

4) $\alpha = 1$, $k = 0$ od. zw. $0$ u. $-1$, $\varphi = \pi$.
5) $\alpha = 1$, $k = -1$ od. zw. $-1$ u. $-\infty$.
6) $\alpha > 1$.

Ad. 1 und 2. Für diese 2 Fälle wollen wir den allgemein bekannten Lehrsatz anwenden, nach welchem die Convergenz der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots$ mit lauter positiven Gliedern unzweifelhaft ist, wenn für unendlich gross werdende n

$$\lim \left[ n \frac{u_n}{u_{n+1}} - n \right] > 1 \qquad 3)$$

Die aus lauter positiven Zahlen bestehende Reihe

$$1 + \alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 + \alpha^3\lambda_3 + \cdots\cdots \qquad 4)$$

wo die Bedeutung von $\alpha$ und $\lambda_\mu$ der I.) zu entnehmen ist, wird gemäss diesem Lehrsatz convergiren, wenn

$$\lim \left[ \frac{n\lambda_n}{\alpha\lambda_{n+1}} - n \right] > 1 \qquad 5)$$

Da nun $\lambda_n$ nach I.) $= \delta_1\delta_2\delta_3 \cdots \delta_n$ und $\delta_{n+1} = {}_0\sqrt{\frac{k_,^2 + (k-n)^2}{(n+1)^2}}$,

so ist die zu untersuchende Differenz auch =

$$\frac{n+1}{\alpha} \frac{1}{{}_0\sqrt{1 - \frac{2kn - k_,^2 - k^2}{n^2}}} - n$$

Bedenken wir jetzt, dass wenn $\varepsilon$ ein positiver echter Bruch, $\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 (1-\varepsilon) < 1$, dass mithin $\frac{1}{{}_0\sqrt{1-\varepsilon}} > 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$, so wird die Relation 5) offenbar stattfinden, wenn für ein unendlich gross werdendes n

$$\frac{n+1}{\alpha}\left[1 + \frac{2kn - k^2 - k_,^2}{2n^2}\right] - n \text{ oder } \frac{n+1}{\alpha} + \frac{n+1}{\alpha}\left[\frac{k}{n} - \frac{k^2 + k_,^2}{2n^2}\right] - n$$

grösser als 1 ist; und diess findet offenbar statt, wenn entweder $\alpha < 1$, oder dann $\alpha = 1$ und zugleich k positiv ist. Wenn nun aber schon die Reihe 4) mit durchgehends positiven Gliedern convergirt, so wird um so mehr jede der 2 Reihen in 2) und mithin auch $\varphi(k + k_,i)$ selbst, unter denselben Bedingungen convergent sein.

Ad 3) Betrachten wir vorerst den Modulus des $\gamma^{\text{ten}}$ Faktors in $\binom{k+k_{,}i}{n}$, nämlich

$$\delta_\gamma = {}_0\sqrt{\frac{(k-\gamma+1)^2+k_{,}^2}{\gamma^2}}$$

so finden wir durch eine einfache Reduktion, dass dieser, wenn der Kürze wegen $1+k=2s$ gesetzt wird, auch

$$= {}_0\sqrt{1-\frac{2\gamma s-s^2}{\gamma^2}-\frac{2\gamma s-3s^2-k_{,}^2}{\gamma^2}}$$

Bezeichnet nun $\tau$ eine positive ganze Zahl, die der endlichen positiven Zahl $\left[\frac{3}{2}s+\frac{k_{,}^2}{2s}\right]$ zunächst folgt, so wird offenbar

$$\delta_\tau < 1-\frac{s}{\tau} \text{ und } \frac{1}{\delta_\tau} > 1+\frac{s}{\tau-s}$$

und um so mehr

$$\frac{1}{\delta_\tau} > 1+\frac{s}{\tau}$$

Hieraus folgt, dass

$$\left[\delta_\tau.\delta_{\tau+1}.\delta_{\tau+2}..\delta_n\right]^{-1} > \left(1+\frac{s}{\tau}\right)\left(1+\frac{s}{\tau+1}\right)\left(1+\frac{s}{\tau+2}\right)...\left(1+\frac{s}{\tau+n}\right) \quad 6)$$

Wenn aber x eine positive nicht über der Einheit liegende Zahl bezeichnet, so findet sich sogleich durch Multiplication der Exponentialreihe für ${}_0e^{\frac{x^2}{2}}$ mit $(1+x)$, dass $(1+x)\,{}_0e^{\frac{x^2}{2}} > {}_0e^x$, daher ${}_0e^{x-\frac{1}{2}x^2} < 1+x$; und da die Exponentialreihe für ${}_0e^x >$ $1+x$, so hat man offenbar

$$l(1+x) = x - bx^2 \quad \text{wo: } \quad 0 < b < \frac{1}{2} \qquad 7)$$

Vermöge dieser Gleichung ist $\left(1+\frac{s}{\tau}\right)\left(1+\frac{s}{\tau+1}\right)\left(1+\frac{s}{\tau+1}\right)...\left(1+\frac{s}{n}\right)$

$$\text{oder } {}_0e^{l\left(1+\frac{s}{\tau}\right)+l\left(1+\frac{s}{\tau+1}\right)+\cdots l\left(1+\frac{s}{n}\right)} =$$

$$ {}_0e^{\frac{s}{\tau}-b\left(\frac{s}{\tau}\right)^2+\frac{s}{\tau+1}-b_{,}\left(\frac{s}{\tau+1}\right)^2+\cdots\frac{s}{n}-b_{n-\tau}\left(\frac{s}{n}\right)^2}$$

Nun ist die Reihe der positiven Summanden im Exponenten dieser letzten Potenz für ein unendlichgross werdendes n unendlich gross, und die Reihe $\left(\frac{s}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{s}{\tau+1}\right)^2 + \cdot\cdot\cdot \left(\frac{s}{n}\right)^2$, nach dem in der Relation 3) ausgedrückten Convergenz-Kennzeichen, convergent, mithin, da $b$, $b_1$, $b_2 \cdot \cdot \cdot b_{n-\tau}$ positive zwischen $0$ und $\frac{1}{2}$ liegende Zahlen sind, um so mehr die Reihe der negativen Summanden in jenem Exponenten convergent; woraus sofort mit Rücksicht auf 6) folgt, dass

$\lim. (\delta_\tau . \delta_{\tau+1} \cdot \delta_{\tau+2} \cdot \cdot \cdot \cdot \delta_n) = 0$, und daher auch, da ja $\tau$ eine positive endliche Zahl ist:

$$\lim. (\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \cdot \cdot \delta_\tau \cdot \delta_{\tau+1} \cdot \cdot \cdot \delta_n) \text{ oder } \lim. \text{mod.} \binom{k+k,i}{n} = 0$$

In Folge dieser Gleichung wird somit offenbar,

$$\text{wenn } 1+k \text{ positiv, } \lim. \binom{k+k,i}{n} = 0 \text{ sein.} \qquad 8)$$

Nun ist ferner der Unterschied zwischen der Summe der $(n+1)$ ersten Glieder in der Reihe

$$[1+\cos\varphi+i\sin\varphi] + \binom{k+k,i}{1}(\cos\varphi+i\sin\varphi)(1+\cos\varphi+i\sin\varphi) + \\ + \binom{k+k,i}{2}(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)(1+\cos\varphi+i\sin\varphi) \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad 9)$$

und der Summe der $(n+1)$ ersten Glieder in

$$1+\left[\binom{k+k,i}{1}+1\right](\cos\varphi+i\sin\varphi) + \\ + \left[\binom{k+k,i}{2}+\binom{k+k,i}{1}\right](\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi) + \\ + \left[\binom{k+k,i}{3}+\binom{k+k,i}{2}\right](\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi) + \cdot \cdot \cdot \qquad 10)$$

wie auch $n$ angenommen werden mag $= \binom{k+k,i}{n}[\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi]$, mithin vermöge der Gleichung 8) für ein unendlichgross werdendes $n$ gleich Null. Es wird daher die Summe der Quotienten aus den einzelnen Gliedern der Reihe 9) durch die von 0 verschiedene Complexe $(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)$, d. i. die Summe

$$1+\binom{k+k,i}{1}(\cos\varphi+i\sin\varphi) + \binom{k+k,i}{2}(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi) + \ldots \qquad 11)$$

gewiss nicht angebbar verschieden sein von der Summe der Quotienten aus den einzelnen Gliedern der Reihe 10) durch dieselbe Complexe $(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Können wir nun zeigen, dass diese letztere Summe convergent ist, so wird daraus dann offenbar auch die Convergenz von 11) hervorgehen. Aber dieser Beweis führt zu keinen Schwierigkeiten, denn es ist, wie sehr leicht einzusehen: $\binom{k+k,i}{\tau}+\binom{k+k,i}{\tau-1}=\binom{1+k+k,i}{\tau}$, mithin die Reihe 10)

$$=1+\binom{1+k+k,i}{1}(\cos\varphi+i\sin\varphi)+$$
$$+\binom{1+k+k,i}{2}(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \qquad 12)$$

Da nun in unserem zu erörternden Falle $k=0$ oder ein negativer echter Bruch ist, so ist $1+k$ positiv und mithin nicht bloss die Reihe 12) nach dem bereits bei der Discussion der Fälle 1) und 2) Bewiesenen convergent, sondern auch die Reihe der Moduli der einzelnen Glieder dieser Reihe. Dividirt man daher jedes Glied in 12) durch $(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)$, was dadurch geschehen kann, dass man vorerst durch Mod. $(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)$ und hernach durch den reducirten Ausdruck zu $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$ dividirt, so wird die erste Division, welche nur die Moduli der einzelnen Glieder ändert, offenbar wieder eine solche Reihe sein, bei der die Reihe der Moduli convergirt, die zweite Division aber die eben beschriebene Convergenz gewiss nicht aufheben, da sie die Moduli unverändert lässt, und nur die reduzirten Ausdrücke der einzelnen Glieder ändert.

Ad 4) Wenn in diesem Falle, $k,=k=0$ wäre, so würde offenbar der Betrag der Reihe $\varphi(k+k,i)=1$, und mithin diese Reihe convergent sein. Wenn aber $k,$ und $k$ nicht zugleich Nullen sind, dann lässt sich die Divergenz der Reihe $\varphi(k+k,i)$ auf folgende Beweise zeigen: Es ist, wenn

$$\Theta'_\gamma=\arg(k+k,i)+\arg(k-1+k,i)+\ldots\arg(k-\gamma+1+k,i) \qquad 13)$$

$$1-\binom{k+k,i}{1}+\binom{k+k,i}{2}-\ldots=1-\lambda_1\cos\Theta_1+\lambda_2\cos\Theta_2-\lambda_3\cos\Theta_3+$$
$$+\cdot\cdot\cdot+i[-\lambda_1\sin\Theta'_1+\lambda_2\sin\Theta'_2-\lambda_3\sin\Theta'_3+\cdot\cdot\cdot] \qquad 14)$$

$$\text{wo }\lambda_\gamma=\frac{{}_0\sqrt{k^2+k,^2}\cdot{}_0\sqrt{(k-1)^2+k,^2}\cdot{}_0\sqrt{(k-2)^2+k,^2}\ldots{}_0\sqrt{(k-\gamma+1)^2+k,^2}}{1.\qquad 2.\qquad 3.\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\qquad\gamma} \qquad 15)$$

Für den Fall, da $k,=0$, geht die zu untersuchende Reihe $\left[1-\binom{k+k,i}{1}+\binom{k+k,i}{2}+\cdot\cdot\cdot\right]$ über in die Reihe $1+\lambda_1+\lambda_2+\ldots$, wo $\lambda_\gamma$ bei dem Umstande, dass k negativ ist, offenbar den Quotienten $\frac{{}_0\sqrt{k^2}}{\gamma}$ übersteigt. Da nun schon die Reihe

$$\frac{{}_0\sqrt{k^2}}{2} + \frac{{}_0\sqrt{k^2}}{3} + \frac{{}_0\sqrt{k^2}}{4} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

divergirt, so wird um so mehr die Reihe $[\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \cdot \cdot \cdot]$ mit grössern und ebenfalls positiven Gliedern, und mithin auch die fragliche Reihe selbst divergiren, wenn eben $k_, = 0$ und k negativ ist.

Für den Beweis der Divergenz der Reihe 14) in dem Falle, da $k_,$ nicht 0, wird es offenbar genügen, darzuthun, dass, wenn a wie $\gamma$ eine positive ganze Zahl, stets entweder der absolute Werth der Summe

$$\lambda_{a\gamma+1} \sin \Theta'_{a\gamma+1} - \lambda_{a\gamma+2} \sin \Theta'_{a\gamma+2} + \dots \lambda_{a\gamma+\gamma} \sin \Theta'_{a\gamma+\gamma} \qquad 16)$$

oder dann der Summe

$$\lambda_{a\gamma+1} \cos \Theta'_{a\gamma+1} - \lambda_{a\gamma+2} \cos \Theta'_{a\gamma+2} + \dots \lambda_{a\gamma+\gamma} \cos \Theta'_{a\gamma+\gamma} \qquad 17)$$

für jeden noch so grossen Werth von $\gamma$ eine bestimmte endliche und positive Grösse immer überschreitet. Die Richtigkeit dieser Behauptung erhellet aus Folgendem: Es ist, wenn

$$b_n = \text{arc. tang.} \frac{k_,}{k - a\gamma - n} \qquad 18)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Theta'_{a\gamma+2} &= \Theta_{a\gamma+1} + \arg(k - a\gamma - 1 + k_, i) = \Theta_{a\gamma+1} + \underset{\smile}{k_,}\pi + b_1 \\
\Theta'_{a\gamma+3} &= \Theta_{a\gamma+2} + \arg(k - a\gamma - 2 + k_, i) = \Theta_{a\gamma+1} + 2\underset{\smile}{k_,}\pi + b_1 + b_2 \\
\Theta'_{a\gamma+4} &= \Theta_{a\gamma+3} + \arg(k - a\gamma - 3 + k_, i) = \Theta_{a\gamma+1} + 3\underset{\smile}{k_,}\pi + b_1 + b_2 + b_3 \\
&\vdots \\
\Theta'_{a\gamma+\gamma} &= \Theta_{a\gamma+\gamma-1} + \arg(k - a\gamma - \gamma + 1 + k_, i) = \Theta_{a\gamma+1} + (\gamma - 1)\underset{\smile}{k_,}\pi \\
&\qquad + b_1 + b_2 + b_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot b_{\gamma-1}
\end{aligned}\right\} 19$$

Da nun gemäss 18)

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot b_n =$$

$$= \text{arc. tg} \frac{k_,}{k - a\gamma - 1} + \text{arc. tg.} \frac{k_,}{k - a\gamma - 2} + \cdot \cdot \cdot \text{arc. tg.} \frac{k_,}{k - a\gamma - n}$$

so ist offenbar, wenn $\dot{k}_,$ den absoluten Werth von $k_,$ darstellt:

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots b_n}{-\underset{\smile}{k_,}} < \frac{\dot{k}_,}{-k + a\gamma + 1} + \frac{\dot{k}_,}{-k + a\gamma + 2} + \cdot \cdot \cdot \frac{\dot{k}_,}{-k + a\gamma + n}$$

Ueberschreitet nun n die Zahl $\gamma$ nicht, so wird gewiss $\gamma \frac{\dot{k}_{,}}{a\gamma}$ oder

$$\frac{\dot{k}_{,}}{a} > \frac{b_1 + b_2 + \cdot \cdot \cdot b_n}{-\breve{k}_{,}} \qquad 20)$$

Es wird sich demnach in jedem Falle ein solcher endlicher Werth $a_0$ von a bestimmen lassen, für welchen der absolute Werth der Summe $(b_1 + b_2 + b_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot b_n)$, wenigstens so lange n nicht über $\gamma$ steigt, immer unter einen angebbaren Arcus, z. B. unter $\frac{\pi}{360}$ fällt.

Nun findet man mit Hülfe der Gleichungen 19) für die Summen 16) und 17) sehr leicht folgende:

$$\begin{aligned}\lambda_{a\gamma+1} \sin \Theta'_{a\gamma+1} &+ \lambda_{a\gamma+2} \sin (\Theta'_{\alpha\gamma+1} + b_1) + \\ &+ \lambda_{a\gamma+3} \sin (\Theta'_{a\gamma+1} + b_1 + b_2) + \cdot \cdot \cdot \\ &\cdot \cdot \lambda_{a\gamma+\gamma} \sin (\Theta'_{a\gamma+1} + b_1 + b_2 + \cdot \cdot \cdot b_{\gamma-1})\end{aligned} \qquad 21)$$

$$\begin{aligned}\lambda_{a\gamma+1} \cos \Theta'_{a\gamma+1} &+ \lambda_{a\gamma+2} \cos (\Theta'_{a\gamma+1} + b_1) + \\ &+ \lambda_{a\gamma+3} \cos (\Theta'_{a\gamma+1} + b_1 + b_2) + \cdot \cdot \cdot \\ &\cdot \cdot \lambda_{a\gamma+\gamma} \cos (\Theta'_{a\gamma+1} + b_1 + b_2 + \cdot \cdot \cdot b_{\gamma-1})\end{aligned} \qquad 22)$$

Zur Untersuchung dieser Summen nehmen wir vorerst an, es sei, wenn a den vorhin beschriebenen Werth $a_0$ hat:

$$\tang^2 \Theta'_{a\gamma+1} \geqq 1$$

d. h. der Endpunkt des Bogens $\Theta_{a\gamma+1}$ entweder in der Mitte eines Quadranten, oder dann dem Endpunkt von $\pm \frac{\pi}{2}$ näher; alsdann ist offenbar bei diesem Werthe $a_0$ von a, der absolute Werth von der Summe 21)

$$> \sin 44^0 [\lambda_{a_0\gamma+1} + \lambda_{a_0\gamma+2} + \cdot \cdot \cdot \lambda_{a_0\gamma+\gamma}]$$

mithin auch, wenn man die Bedeutung von $\lambda_\gamma$, die in der Gleichung 15) ausgedrückt ist, ins Auge fasst:

$$> \sin 44^0 \left(\frac{1}{a_0\gamma+1} + \frac{1}{a_0\gamma+2} + \frac{1}{a_0\gamma+3} + \cdot \cdot \cdot \frac{1}{a_0\gamma+\gamma}\right) \dot{k}_{,}$$

$$> \sin 44^0 \frac{\gamma}{a_0\gamma+\gamma} \dot{k}_{,}$$

Wenn demnach in die Summe 16) oder 21) ein solcher endlicher Werth $a_0$ für a gesetzt wird, für welchen $\frac{\dot{k}_{,}}{a} < \frac{\pi}{360}$, wenn ferner $\operatorname{tang}^2 \Theta'_{a_0\gamma+1} \geqq 1$, so ist der Betrag dieser Summe, selbst wenn $\gamma$ unendlich gross wird, doch immer dem absoluten Werthe nach über der endlichen Grösse $\frac{k_{,} \sin 44^0}{a_0+1}$. Ist aber

$$\operatorname{tang}^2 \Theta'_{a_0\gamma+1} < 1$$

so findet sich eben so leicht, dass der absolute Werth der Summe 17) oder 22) bei derselben Substitution für a auch für ein unendlich gross werdendes $\gamma$, nie unter die endliche Grösse $\frac{k_{,} \cos 46^0}{1+a_0}$ herabzugehen vermag.

Ad 5) und 6) Wenn $\alpha = 1$, $k = -1$ oder zwischen $-1$ und $-\infty$, so ist die Reihe $\varphi(k + k_{,}i)$ divergent. Nach der Gleichung 2) ist nämlich, wenn $\alpha = 1$,

$\lambda_\gamma \cos \Theta_\gamma$ das $(\gamma+1)^{\text{te}}$ Glied in dem reellen Bestandtheil von $\varphi(k + k_{,}i)$.

$\lambda_\gamma \sin \Theta_\gamma$ das $(\gamma+1)^{\text{te}}$ Glied in dem imaginären Bestandtheil von $\varphi(k + k_{,}i)$.

Da nun $\lambda_\gamma$ ein Produkt aus $\gamma$ Faktoren, von welchen der $\gamma^{\text{te}} = \sqrt[0]{\frac{(k-\gamma+1)^2 + k_{,}^2}{\gamma^2}}$, da ferner k entweder $= -1$, oder dann zwischen $-1$ und $-\infty$ liegt, so ist klar, dass jeder der $\gamma$ Faktoren, deren Produkt $\lambda_\gamma$ ist, eine positive Zahl sein muss, die jedenfalls nicht unter der Einheit liegen kann, dass somit $\lambda_\gamma$ selbst entweder $+1$ oder dann $> 1$ ist. Nehmen wir nun an, für ein unendlich grosses $\gamma$, wäre $\cos \Theta_\gamma = 0$ oder unendlich nahe an 0, so würde gewiss $\sin \Theta_\gamma$ dem absoluten Werthe nach sehr nahe an 1, und mithin der absolute Werth von $\lambda_\gamma \sin \Theta_\gamma$ entweder ebenfalls sehr nahe an 1, oder dann jedenfalls grösser sein. In diesem Falle wäre mithin nicht jedes der spätesten Glieder im imaginären Bestandtheil von $\varphi(k + k_{,}i)$ unendlich klein und daher $\varphi(k + k_{,}i)$ divergent. Wäre aber für ein unendlich grosses $\gamma$ die Zahl $\cos \Theta_\gamma$ angebbar von 0 verschieden, so würde $\lambda_\gamma \cos \Theta_\gamma$ nicht unendlich klein, und daher auch in diesem Falle die Reihe $\varphi(k + k_{,}i)$ divergent sein.

Wenn $\alpha > 1$, so kann die Divergenz der Reihe, wenn sie nicht abbricht, ähnlich wie in dem eben behandelten Falle bewiesen werden. Convergent kann somit die Reihe $\varphi(k + k_{,}i)$, wenn $\alpha > 1$, nur dann sein, wenn zugleich $k_{,} = 0$ und k eine positive ganze Zahl oder 0 ist.

Wir haben somit folgendes Resultat aus der Discussion sämmtlicher Fälle gewonnen: Die Reihe $\varphi(k + k_{,}i)$ convergirt durchaus nur in folgenden 5 Fällen:

1) wenn $\alpha < 1$.
2) » $\alpha = 1$, $\varphi = \pi$ und k positiv.
3) » $\alpha = 1$, $\varphi^2 < \pi^2$ und $1 + k$ positiv.
4) » $\alpha = 1$, $\varphi = \pi$ und $k = k_{,} = 0$.
5) » $\alpha > 1$, $k_{,} = 0$ und k eine positive ganze Zahl oder 0 ist.

## III.

Wir zeigen nun das Stattfinden folgender Gleichungen für den Fall, da $\alpha < 1$:

$$\varphi(k + k_{,}i) \cdot \varphi(l + l_{,}i) = \varphi[k + l + (k_{,} + l_{,})i] \qquad 23)$$

$$f(k, k_{,}) \cdot f(l, l_{,}) = f(k + l, k_{,} + l_{,}) \qquad 24)$$

$$\psi(k, k_{,}) + \psi(l, l_{,}) + 2\pi r_{\psi(k,k_{,}) + \psi(l,l_{,})} = \psi(k + l, k_{,} + l_{,}) \qquad 25)$$

Setzen wir zu diesem Behufe $k + k_{,}i = m$, $l + l_{,} = n$ und $a + bi$ oder $\alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi) = x$, so ist nach der Bedeutung des Zeichens $\varphi$:

$$\varphi(m) = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots$$

$$\varphi(n) = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots$$

und das nach steigenden Potenzen geordnete Produkt dieser beiden Reihen $\varphi(m)$ und $\varphi(n)$

$$= 1 + \left[\binom{m}{1} + \binom{n}{1}\right]x + \left[\binom{m}{2} + \binom{m}{1}\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]x^2 + \cdots \qquad 26)$$

Nun beweisen wir, dass das allgemeine Glied dieser Reihe 26), nämlich:

$$\binom{m}{\gamma} + \binom{m}{\gamma-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{\gamma-2}\binom{n}{2} + \cdots \binom{m}{1}\binom{n}{\gamma-1} + \binom{n}{\gamma} = \binom{m+n}{\gamma} \qquad 27)$$

Zu diesem Zwecke multipliziren wir vorerst die sämmtlichen Glieder des ersten Theils dieser Gleichung mit $\frac{m + n - \gamma}{\gamma + 1}$, wodurch wir zu folgenden Gleichungen gelangen:

$$\frac{m+n-\gamma}{\gamma+1}\cdot\binom{m}{\gamma} = \binom{m}{\gamma}\left(\frac{m-\gamma}{\gamma+1}+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{\gamma+1}\right) = \\ = \binom{m}{\gamma+1}+\frac{1}{\gamma+1}\binom{m}{\gamma}\binom{n}{1}$$

$$\frac{m+n-\gamma}{\gamma+1}\cdot\binom{m}{\gamma-1}\binom{n}{1} = \binom{m}{\gamma-1}\binom{n}{1}\left(\frac{m-\gamma+1}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\gamma+1}+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2}{\gamma+1}\right) = \\ = \frac{\gamma}{\gamma+1}\cdot\binom{m}{\gamma}\binom{n}{1}+\frac{2}{\gamma+1}\binom{m}{\gamma-1}\binom{n}{2}$$

$$\frac{m+n-\gamma}{\gamma+2}\cdot\binom{m}{\gamma-2}\binom{n}{2} = \binom{m}{\gamma-2}\binom{n}{2}\left(\frac{m-\gamma+2}{\gamma-1}\cdot\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{n-2}{3}\cdot\frac{3}{\gamma+1}\right) = \\ = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\cdot\binom{m}{\gamma-1}\binom{n}{2}+\frac{3}{\gamma+1}\binom{m}{\gamma-2}\binom{n}{3}$$

$$\frac{m+n-\gamma}{\gamma+3}\cdot\binom{m}{\gamma-3}\binom{n}{3} = \binom{m}{\gamma-3}\binom{n}{3}\left(\frac{m-\gamma+3}{\gamma-2}\cdot\frac{\gamma-2}{\gamma+1}+\frac{n-3}{4}\cdot\frac{4}{\gamma+1}\right) = \\ = \frac{\gamma-2}{\gamma+1}\cdot\binom{m}{\gamma-2}\binom{n}{3}+\frac{4}{\gamma+1}\binom{m}{\gamma-3}\binom{n}{4}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$\frac{m+n-\gamma}{\gamma+1}\cdot\binom{m}{\gamma-(\gamma-2)}\binom{n}{\gamma-2} = \\ = \binom{m}{\gamma-(\gamma-2)}\binom{n}{\gamma-2}\left(\frac{m-\gamma+(\gamma-2)}{\gamma-(\gamma-3)}\cdot\frac{\gamma-(\gamma-3)}{\gamma+1}+ \\ \frac{n-(\gamma-2)}{\gamma-1}\cdot\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) = \frac{3}{\gamma+1}\binom{m}{3}\binom{n}{\gamma-2}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\binom{m}{2}\binom{n}{\gamma-1}$$

$$\frac{m+n-\gamma}{\gamma+1}\cdot\binom{m}{1}\binom{n}{\gamma-1} = \\ = \binom{m}{1}\binom{n}{\gamma-1}\left(\frac{m-\gamma+(\gamma-1)}{\gamma-(\gamma-2)}\cdot\frac{\gamma-(\gamma-2)}{\gamma+1}+\frac{n-(\gamma-1)}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\gamma+1}\right) = \\ = \frac{2}{\gamma+1}\binom{m}{2}\binom{n}{\gamma-1}+\frac{\gamma}{\gamma+1}\binom{m}{1}\binom{n}{\gamma}$$

$$\frac{m+n-\gamma}{\gamma+1}\binom{n}{\gamma} = \binom{n}{\gamma}\left(\frac{m-\gamma+\gamma}{\gamma-(\gamma-1)}\cdot\frac{\gamma-(\gamma-1)}{\gamma+1}+\frac{n-\gamma}{\gamma+1}\cdot\frac{\gamma+1}{\gamma+1}\right) = \\ = \frac{1}{\gamma+1}\binom{m}{1}\binom{n}{\gamma}+\binom{n}{\gamma+1}$$

Addiren wir nun die ersten und nachher auch die dritten Theile dieser Gleichungen zu einander, so zeigt sich, dass das Produkt aus dem ersten Theile der Gleichung 27) in $\frac{m+n-\gamma}{\gamma+1}$

$$= \binom{m}{\gamma+1} + \binom{m}{\gamma}\binom{n}{1} + \binom{m}{\gamma-1}\binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{\gamma+1}$$

und da nun das Produkt aus dem zweiten Theil von der Gleichung 27) in denselben Quotienten $\frac{m+n-\gamma}{\gamma+1}$ gleich $\binom{m+n}{\gamma+1}$, so ist klar, dass wenn die Gleichung 27) für irgend einen Werth $\gamma_,$ von $\gamma$ besteht, dieselbe Gleichung auch für den Werth $(\gamma_, + 1)$ von $\gamma$, dann wieder aus demselben Grunde für den Werth $(\gamma_, + 2)$ von $\gamma$ besteht, u. s. f., kurz für jeden Werth von $\gamma$, der $> \gamma_,$ ist, stattfinden muss. Nun zeigt sich sogleich, dass die Gleichung 27) für den Werth 1 von $\gamma$ Bestand hat, und wir können daher die Gleichung 27) als vollkommen richtig für jeden Werth von $\gamma$ erklären, der eine positive ganze Zahl ist, seien hiebei die Werthe von m und n reelle oder complexe Zahlen.

Die Reihe 26) ist also vermöge der soeben bewiesenen Gleichung 27):

$$= 1 + \binom{m+n}{1} x + \binom{m+n}{2} x^2 + \cdots = \varphi(m+n)$$

Aber diese Reihe convergirt in dem Falle, da $\alpha$ oder Mod. x $< 1$ ist, und man darf daher das nach steigenden Potenzen von x geordnete Produkt aus den convergenten Reihen $\varphi(m)$ und $\varphi(n)$ der Reihe $\varphi(m+n)$ immer gleich setzen, wenn $\alpha < 1$. Wenn die beiden Reihen $\varphi(m)$ und $\varphi(n)$ abbrechen, so wird offenbar auch $\varphi(m+n)$ eine endliche Reihe sein, und die Existenz der Gleichung $\varphi(m) \cdot \varphi(n) = \varphi(m+n)$ ist alsdann von der Grösse des $\alpha$ ganz unabhängig.

Fasst man die im Eingange von I. angegebene Bedeutung der Funktionszeichen f, $\psi$ und r genau ins Auge, so findet man als leichte Folgerungen von 23) die beiden Gleichungen 24) und 25).

## IV.

Wir beweisen nun ferner, dass, wenn $\alpha < 1$, die Gleichung stattfindet:

$$f(k, k_,) = {}_0e^{klf(1,0) + k_,lf(0,1)} = [{}_0f(1,0)]^k \cdot [{}_0f(0,1)]^{k_,} \qquad 28)$$

Vorerst bemerken wir, dass $f(1, 0)$, wenn $\alpha < 1$, offenbar nicht 0 sein kann, und dass auch jeder der Moduli $f(0,1)$ und

(0,-1) von den convergenten Reihen $\varphi(i)$ und $\varphi(-i)$ verschieden von 0 sein muss, da nach der Gleichung 23) $\varphi(i) \cdot \varphi(-i) = \varphi(0)$, und nur nach der Bedeutung des Funktionszeichens $\varphi$ die $\varphi(0) = 1$ ist. Nehmen wir nun zunächst an, k sei irgend ein positiver Bruch $\frac{p}{q}$, wo mithin p und q beliebig gewählte positive ganze Zahlen sind, dann wird $[f(1,0)]^p = f(p,0)$ sein, was man sogleich finden wird, wenn man successive mit jedem der (p—1) letzten Faktoren des Produktes $[f(1,0)]^p$ gemäss der Gleichung 24) multiplicirt. Aber ganz auf gleiche Weise überzeugt man sich von der Richtigkeit der Gleichung: $\left[f\left(\frac{p}{q},0\right)\right]^q = f(p,0)$. Man hat demnach offenbar die Gleichung:

$$\left[f\left(\frac{p}{q},0\right)\right]^q = [f(1,0)]^p$$

Bedenkt man nun, dass $f\left(\frac{p}{p},o\right)$ und $f(1,0)$ als Moduli absolute Zahlen sind, so folgt aus dieser letztern Gleichung:

$$f\left(\frac{p}{q},o\right) = {}_0\left[f(1,0)\right]^{\frac{p}{q}} \qquad 29)$$

Vermöge der Gleichung 24) und der Bedeutung von f, ist nun $f\left(\frac{p}{q},0\right) \cdot f\left[\left(-\frac{p}{q},0\right)\right] = 1$. Aber auch ${}_0[f(1,0)]^{\frac{p}{q}} \cdot {}_0[f(1,0)]^{-\frac{p}{q}}$ ist $=1$. Es geben also die beiden nach der Gleichung 29) gleichen Zahlen $f\left(\frac{p}{q},0\right)$ und ${}_0f(1,0)^{\frac{p}{q}}$ mit den Zahlen $f\left(-\frac{p}{q},0\right)$ und ${}_0\left[f(1,0)\right]^{-\frac{p}{q}}$ multiplizirt Gleiches, woraus offenbar folgt:

$$f\left(-\frac{p}{q},0\right) = {}_0\left[f(1,0)\right]^{-\frac{p}{q}} \qquad 30)$$

Da endlich, wenn $\alpha < 1$, die $f(1,0)$ nicht 0 sein kann, so ist gewiss auch $f(0,0) = f(1,0)^0$. Man hat daher für jedes reelle k, 0 nicht ausgeschlossen, die Gleichung:

$$f(k,0) = {}_0[f(1,0)]^k = {}_0e^{k\,lf(1,0)} \qquad 31)$$

Genau so lässt sich beweisen, dass

$$f(0,k_,) = {}_0[f(0,1)]^{k_,} = {}_0e^{k_,\,lf(0,1)} \qquad 32)$$

Da nun gemäss der Gleichung 24)

$$f(k,k_{,}) = f(k,0) \cdot f(0,k_{,})$$

so folgt hieraus und aus den Gleichungen 31) und 32) sofort die Gleichung 28), w. z. b. w.

## V.

Wir gehen jetzt, voraussetzend, dass $\alpha < 1$, zum Beweise folgender Gleichung über:

$$\psi(k,0) = k\psi(1,0) + 2\pi r_{k\psi(1,0)} \qquad 33)$$

wo $\psi(k,0)$ und $\psi(1,0)$, wie übrigens schon in I.) erwähnt, eindeutige Bogen bezeichnen, von welchen jeder $= \pi$ oder dann zwischen $\pi$ und $-\pi$ liegt, und $r_{k\psi(1,0)}$ eine reelle nicht gebrochene Zahl ist, für welche $2\pi r_{k\psi(1,0)} + k\psi(1,0)$ entweder $= \pi$ wird, oder dann zwischen $\pi$ und $-\pi$ fällt.

Ich beginne die Begründung der Gleichung 33) mit dem Beweise, dass die Binomialreihe

$$1+\binom{k}{1}a+\binom{k}{2}a^2+\binom{k}{3}a^3+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot = F(k,a) \qquad 34)$$

wo k irgend eine reelle Zahl, und a ebenfalls eine reelle Zahl, aber dem absoluten Werthe nach unter 1 liegend bezeichnet, eine von 0 verschiedene positive Zahl ist. Es ist nämlich bei dieser Bedeutung von k und a, wie wir schon in II.) gesehen haben die Reihe 34) convergent. Nehmen wir nun zunächst an, k sei $= \frac{1}{q}$, wo q eine positive ganze Zahl, und a positiv, so ist in diesem Falle die Reihe 34) =

$$1+\frac{1}{q}a-\frac{\frac{1}{q}(1-\frac{1}{q})}{1\cdot 2}a^2+\frac{\frac{1}{q}(1-\frac{1}{q})(2-\frac{1}{q})}{1\cdot 2\cdot 3\cdot}a^3-+=\cdot\cdot\cdot\cdot = F(\frac{1}{q},a)$$

Ein Blick auf diese Reihe reicht hin, um einzusehen, dass der Betrag dieser Reihe, wenn q eine positive ganze Zahl und $a<1$ und positiv ist, zwischen 1 und $1 + \frac{1}{q}a$ liegt, mithin wirklich eine positive Zahl ist. Bezeichnet nun p irgend eine positive ganze Zahl, so ist auch die Reihe $F(\frac{p}{q}, a)$, die wir nach der Gleichung 23) gleich dem Produkte aus p Reihen setzen dürfen, von welchen jede die positive Reihe $F(\frac{1}{q}, a)$, eine positive Zahl, und da ebenfalls nach 23) $F(\frac{p}{q}, a) \cdot F(-\frac{p}{q}, a) = F(0,a) = 1$, so wird auch $F(-\frac{p}{q}, a)$ eine positive Zahl sein.

Ist aber a negativ und $= -a_,$, so wird die Reihe 34) für $k = -\frac{1}{q}$ zu

$$1 + \frac{1}{q} a_, + \frac{\frac{1}{q}(1+\frac{1}{q})}{1 \cdot 2} a_,^2 + \frac{\frac{1}{q}(1+\frac{1}{q})(2+\frac{1}{q})}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_,^3 + \cdot \cdot \cdot = F(-\frac{1}{q}, -a_,)$$

mithin offenbar positiv sein. Nun ist wieder nach 23) $F(-\frac{p}{q}, -a_,)$ ein Produkt aus p Reihen, von welchen jede die positive Reihe $F(-\frac{1}{q}, -a_,)$ ist, mithin ebenfalls positiv; und da endlich vermöge der Gleichung 23) $F(-\frac{p}{q}, -a_,) \cdot F(+\frac{p}{q}, -a_,) = F(0, -a_,) = 1$, so ist auch $F(\frac{p}{q}, -a_,)$ positiv.

Wenn also in der Reihe $F(k,a)$ a irgend eine dem absoluten Werthe nach unter 1 liegende positive oder negative Zahl ist, so wird für jeden reellen Werth von k, die Reihe $F(k,a)$ nie $= 0$, sondern eine positive Zahl zu ihrem Betrage haben.

Das so eben Bewiesene macht es uns nun möglich zu beweisen, dass die Reihe

$$1 + \binom{k}{1} \alpha \cos \varphi + \binom{k}{2} \alpha^2 \cos 2\varphi + \binom{k}{3} \alpha^3 \cos 3\varphi + \ldots = f(k,0) \cos \varphi(k,0)$$

in welcher $\alpha$ positiv und $< 1$, verschieden von 0 und positiv ist, wenn k eine positive oder negative, aber dem absoluten Werthe nach die Einheit nicht überschreitende Zahl bezeichnet. Ist nämlich k zunächst positiv und $=$ dem echten Bruche $\frac{p}{q}$, so ist nach dem Vorhergehenden die Reihe

$$1 - \binom{k}{1} \alpha - \frac{k(1-k)}{1 \cdot 2} \alpha^2 - \frac{k(1-k)(2-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 - \cdot \cdot \cdot = F(k, -\alpha)$$

verschieden von 0 und positiv, mithin $[F(k,-\alpha)-1]$ eine negative dem absoluten Werthe nach unter 1 liegende Zahl; woraus sogleich folgt, dass um so mehr der absolute Werth von

$$f(k,0)\cdot\cos\varphi(k,0)-1=$$

$$=\binom{k}{1}\alpha\cos\varphi+\binom{k}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\binom{k}{3}\alpha^3\cos 3\varphi+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$=k\alpha\cos\varphi+\frac{k(1-k)}{1\cdot 2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{k(1-k)(2-k)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdot\cdot\cdot\cdot$$

unter der Einheit verbleibt, dass daher jedenfalls, wenn k positiv und nicht über 1, und zugleich $\alpha<1$, das Produkt $f(k,0)\,.\,\cos\varphi(k,0)$ nicht 0 und positiv ist.

Ist aber k eine negative dem absoluten Werthe nach die Einheit nicht überschreitende Zahl und $=-x$, dabei wieder $\alpha<1$, so bedenke man, dass nach 23) das Produkt der Reihen $\varphi(x)\cdot\varphi(-x)$, oder

$$f(x,0)\,[\cos\psi(x,0)+i\sin\psi(x,0)]\times$$

$$f(-x,0)\,[\cos\psi(-x,0)+i\sin\psi(-x,0)]=1\text{ , mithin}$$

$$f(-x,0)\,[\cos\psi(-x,0)+i\sin\psi(-x,0)]=$$

$$=[f(x,0)]^{-1}.\,[\cos\psi(x,0)-i\sin\psi(x,0)]$$

$$f(-x,0)\cos\psi(-x,0)=\frac{\cos\psi(x,0)}{f(x,0)}$$

Da nun, wie bereits bewiesen, $f(x,0)\cdot\cos\psi(x,0)$ verschieden von 0 und positiv, ferner $f(x,0)$ als Modulus nicht negativ ist, so wird aus dieser letztern Gleichung klar, dass $f(-x,0)\cdot\cos\psi(-x,0)$ nicht 0 sein kann, und nothwendig positiv sein muss.

Wir sehen also, dass $\cos\psi(k,0)$, wenn $k^2$ nicht $>1$, und $\alpha<1$, jederzeit positiv ist. Hieraus folgt, dass $\psi(k,0)$ unter diesen Voraussetzungen und bei der angenommenen Bezeichnungsweise, nach welcher $\psi$ einen Bogen bedeutet, der entweder $=\pi$, oder zwischen $\pi$ und $-\pi$ liegt, dem absoluten Werthe nach den Bogen $\frac{\pi}{2}$ weder erreichen, noch übersteigen kann. $\mathrm{r}_{\psi(n,0)+\psi(m,0)}$ wird daher immer 0 sein, so lange $\alpha<1$ und $n^2$ wie $m^2<1$ ist. Berücksichtigt man das so eben Gesagte, und die Gleichung 25) bei jeder der aufeinanderfolgenden Additionen zur Bildung der Summe aus q Summanden, wo jeder $= \psi(\frac{1}{q},0)$, so findet man sehr leicht folgende Gleichung:

$$q\psi(\frac{1}{q},0) = \psi(1,0) \qquad 35)$$

wo q eine positive ganze Zahl bezeichnet.

Ferner ist vermöge der Gleichung 25)

$$\psi(\frac{1}{q},0) + \psi(-\frac{1}{q},0) + 2\pi r_{\psi(\frac{1}{q},0)+\psi(-\frac{1}{q},0)} = \psi(0,0) = 0$$

Da aber $\psi(\frac{1}{q},0)$, wenn $\alpha < 1$, dem absoluten Werthe nach unter $\frac{\pi}{2}$ liegt, so ist klar, dass $r_{\psi(\frac{1}{q},0)+\psi(-\frac{1}{q},0)}$ unter dieser Bedingung gleich 0 sein muss, woraus folgt:

$$\psi(-\frac{1}{q},0) = -\psi(\frac{1}{q},0) \text{ und daher } -q\,\psi(-\frac{1}{q},0) = q\psi(\frac{1}{q}0,) \qquad 36)$$

Fasst man jetzt das, was die Gleichungen 35) und 36) lehren, zusammen, so ergibt sich, dass wenn n irgend eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet und $\alpha < 1$

$$n\psi(\frac{1}{q},0) = \psi(1,0) \qquad 37)$$

Bezeichnet nun p irgend eine positive ganze Zahl, so findet man durch successive Addition von p Summanden, wo jeder = $= \psi(\frac{1}{n},0)$ mit Hülfe der 25) ohne Mühe die Gleichung

$$p\psi(\frac{1}{n},0) + 2s\pi = \psi(\frac{p}{n},0)$$

Setzen wir jetzt in diese Gleichung für $\psi(\frac{1}{n},0)$ den hiefür aus 37) gezogenen Werth, und substituiren hierauf dem Quotienten $\frac{p}{n}$ den Werth k, so erhalten wir:

$$k\psi(1,0) + 2s\pi = \psi(k,0) \qquad 38)$$

Die Zahl s lässt sich nun leicht auf folgende Weise bestimmen. Nehmen wir an, es sei

$$k\psi(1,0) + 2\pi r_{k\psi(1,0)} = a$$

so finden wir durch Subtraction dieser Gleichung von 38)

$$2\pi\left[s - r_{k\psi(1,0)}\right] = \psi(k,0) - a. \qquad 39)$$

Da nun nur nach der angenommenen Bedeutung der Funktionszeichen $\psi$ und r, jede der Zahlen $\psi(k,0)$ und a entweder $= \pi$ oder dann zwischen $\pi$ und $-\pi$ liegt, so kann die Gleichung 39) durchaus nur dann bestehen, wenn $s = r_{k\psi(1,0)}$, woraus dann endlich mit Rücksicht auf 38) die Gleichung 33) folgt.

## VI.

Bezeichnet nun q eine positive oder negative unendlichgross werdende ganze Zahl, und $\omega$ den Quotienten $\frac{1}{q}$, und ist immer noch $\alpha < 1$, so hat man folgende Gleichungen:

$$\lim. \frac{\psi(0,\omega)}{\omega} = lf(1,0) = \alpha\cos\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi - \ldots \qquad 40)$$

$$\lim. \frac{\psi(\omega,0)}{\omega} = -lf(0,1) = \psi(1,0) = \alpha\sin\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi .. \qquad 41)$$

$$\psi(0,k,) = k,l\,f(1,0) + 2\pi r_{k,l f(1,0)} \qquad 42)$$

Um diess zu beweisen, untersuchen wir die Funktionen $\varphi(\omega)$ und $\varphi(\omega i)$. Es ist $\varphi(\omega)$ oder

$$f(\omega,0)[\cos\psi(\omega,0) + i\sin\psi(\omega,0)] = 1 + \omega\alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \\ + \frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}\alpha^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \cdot\cdot\cdot \qquad 43)$$

Der zweite Theil dieser Gleichung ist, da $\alpha < 1$, für jeden Werth von $\omega$ eine convergente Reihe. Die Sonderung des Reellen vom Imaginären führt zu folgenden zwei Gleichungen

$$\frac{f(\omega,0)\cdot\cos\psi(\omega,0) - 1}{\omega} = \alpha\cos\varphi + \frac{\omega-1}{1\cdot 2}\alpha^2\cos 2\varphi + \\ + \frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3\cos 3\varphi + \cdot\cdot\cdot\cdot \qquad 44)$$

$$\frac{f(\omega,0)\cdot\sin\psi(\omega,0)}{\omega}=\alpha\sin\varphi+\frac{\omega-1}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi+$$

$$\frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot}\alpha^3\cos 3\varphi+\cdot\cdot\cdot\cdot \qquad 45)$$

Die Grenzbestimmungen der in diesen 2 Gleichungen erscheinenden convergenten Reihen hat nicht die mindesten Schwierigkeiten, da die Grenzen der einzelnen Glieder sogleich hervortreten. Zur Grenzbestimmung der ersten Theile dieser Gleichungen aber, erwäge man zunächst, dass nach der Gleichung 28) $f(\omega,0)={}_0e^{\omega l f(1,0)}$ und nach der Gleichung 33) $\psi(\omega,0)=\omega\psi(1,0)+$ $+2\pi r_{\omega\psi(1,0)}$. Nun ist $f(1,0)=\mathrm{mod.}[1+\alpha(\cos\varphi+i\sin\varphi)]$ und $\psi(1,0)=\arg[1+\alpha(\cos\psi+i\sin\varphi)]$ und $\alpha<1$, mithin $1+\alpha(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ verschieden von 0, was natürlich zur Folge hat, dass weder $\omega l f(1,0)$ noch $\omega\psi(1,0)$ das Gepräge der Unbestimmtheit tragen und $r_{\omega\psi(1,0)}=0$. Da ferner für jeden Bogen x, dessen absoluter Werth unter $\frac{\pi}{4}$ liegt, ${}_0\sqrt{1-x^2}<\cos x$, und um so mehr $1-x^2<\cos x$, so wird man zur Bildung von $\cos x$ von der Einheit $bx^2$, wo b einen positiven echten Bruch bezeichnet, subtrahiren müssen, und es ist daher auch $\cos\psi(\omega,0)$ oder $\cos[\omega\psi(1,0)]=1-b\omega^2\psi(1,0)^2$. Diess beachtend findet man jetzt leicht:

$$\lim.\frac{f(\omega,0)\cdot\cos\psi(\omega,0)-1}{\omega}=$$

$$=\lim.\frac{[1+\omega l f(1,0)+b_0\omega^2 l^2 f(1,0)]^{*})\,[1-b\,\omega^2\psi(1,0)^2]-1}{\omega}=l f(1,0)$$

Ferner ist für jeden positiven Bogen x unter $\frac{\pi}{2}$, $x<\tan x$, mithin $\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x<\sin\frac{1}{2}x$ daher $\frac{1}{2}x\cos^2\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\sin x$, und um so mehr $x(1-\frac{1}{4}x^2)<\sin x$, woraus folgt, dass man von x, was grösser

---

*) So lange das Quadrat der reellen Zahl z die Einheit nicht übersteigt, findet man die Exponentialreihe $1+z+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\ldots$ ohne Schwierigkeit $=1+z+b_0z^2$, wo $b_0$ zwischen 0 und 1 liegt.

als $\sin x$ ist, einen Bogen unter $\frac{1}{4}x^3$ zur Bildung von $\sin x$ subtrahiren muss. Es wird demnach $\sin x = x - \frac{1}{4}b_{\prime}x^3$, wo $0 < b_{\prime} < 1$. Diese Gleichung gilt, da $\sin -x = -\sin x$, auch für ein negatives x. Man darf daher dem $\sin\psi(\omega,0)$ oder $\sin[\omega\psi(1,0)]$ die Differenz $\psi(\omega,0) - \frac{1}{4}b_{\prime}\psi(\omega,0)^3$ oder $\omega\psi(1,0) - \frac{1}{4}b_{\prime}\omega^3\psi(1,0)^3$ substituiren. Diese Substitution und die der Exponentialreihe für ${}_0e^{\omega l f(1,0)}$ gleiche Grösse $[1+\omega l f(1,0)+b_0\omega^2 l^2 f(1,0)]$ in den Ausdruck $\frac{f(\omega,0)\,.\,\sin\psi(\omega,0)}{\omega}$ lässt ohne Mühe die Richtigkeit folgender Gleichung erkennen:

$$\lim.\frac{f(\omega,0)\cdot\sin\psi(\omega,0)}{\omega} = \psi(1,0) = \lim.\frac{\psi(\omega,0)}{\omega}$$

Geht man also in den Gleichungen 44) und 45) zu den Grenzen über, so findet man:

$$lf(1,0) = \alpha\cos\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi - \ldots \quad 46)$$

$$\lim.\frac{\psi(\omega,0)}{\omega} = \psi(1,0) = \alpha\sin\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi - \ldots \quad 47)$$

jedoch vorerst nur unter der Voraussetzung, dass $\alpha < 1$.

Ferner ist $\varphi(\omega i)$, oder

$$f(0,\omega)\,[\cos\psi(0,\omega) + i\sin\psi(0,\omega)] = 1 +$$
$$+ \omega i\,\alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{\omega i(\omega i - 1)}{1\cdot 2}\alpha^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \cdots \quad 48)$$
$$= 1 + \omega i[\alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{\omega i - 1}{1\cdot 2}\alpha^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \cdots]$$

Die Grenze, welcher sich die eingeklammerte Reihe, die wenn $\alpha < 1$ für jeden Werth von $\omega$ convergirt, beim unendlichen Abnehmen von $\omega$ ohne Ende nähert, ist, wie man leicht findet, die convergente Reihe:

$$\alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi) - \frac{1}{2}\alpha^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \frac{1}{3}\alpha^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) - \ldots$$

und man hat daher offenbar folgende Gleichung:

$$\lim \frac{f(0,\omega)\,[\cos\psi(0,\omega) + i\sin\psi(0,\omega)] - 1}{\omega} =$$

$$= i[\alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi) - \frac{1}{2}\alpha^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot] \quad 49)$$

Diese letztere Gleichung gibt jetzt durch Sonderung des Reellen vom Imaginären folgende 2 Gleichungen:

$$\lim \frac{f(0,\omega)\cdot\cos\psi(0,\omega) - 1}{\omega} = -\alpha\sin\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi - \frac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi + \cdot\cdot\cdot\cdot \quad 50)$$

$$\lim \frac{f(0,\omega)\cdot\sin\psi(0,\omega)}{\omega} = \alpha\cos\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi - \ldots \quad 51)$$

Zur Bestimmung der ersten Theile dieser 2 Gleichungen bemerken wir vorerst, dass nach IV.) f(0,1) nicht 0 sein kann, wenn $\alpha < 1$, mithin $\omega l f(0,1)$ entschieden eindeutig, und daher auch ${}_0e^{\omega l f(0,1)}$, was nach der Gleichung 28) $= f(0,\omega)$, von derselben Beschaffenheit ist. Wir bemerken ferner, dass für ein unendlich klein werdendes $\omega$ vermöge der Gleichungen 48) und 49)

$\psi(0,\omega) = \arg[1 + s\omega + c\omega i]$ 52), wenn nämlich

die Convergente: $-\alpha\sin\varphi + \frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi - \frac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi + \ldots. = s$

und » » $\alpha\cos\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi - \ldots. = c$

mithin

$$\frac{1}{\cos\psi(0,\omega)} = \frac{{}_0\sqrt{(1+s\omega)^2 + c^2\omega^2}}{1+s\omega} = {}_0\sqrt{1+\left(\frac{c\omega}{1+s\omega}\right)^2}$$

Da nun offenbar dieses Radikal zwischen 1 und $1 + \frac{1}{2}\left(\frac{c\omega}{1+s\omega}\right)^2$, so wird

$$\frac{1}{\cos\psi(0,\omega)} = 1 + t\omega^2 \quad 53)$$

gesetzt werden dürfen, wo t eine positive Zahl bedeutet, die unter $\frac{1}{2}\left(\frac{c}{1+s\omega}\right)^2$ liegt, und mithin gewiss nicht unendlich gross werden kann. Setzen wir denn so eben für $\frac{1}{\cos\psi(0,\omega)}$

gefundenen Werth, und für $f(0,\omega)$ den gleichwerthigen Ausdruck ${}_0e^{\omega l\, f(0,1)}$ oder $[1+\omega l f(0,1)+b_0\omega^2 l^2 f(0,1)]$ in den ersten Theil der Gleichung 50), so erhalten wir:

$$\lim \frac{f(0,\omega)\cdot\cos\psi(0,\omega)-1}{\omega} =$$

$$= \lim.\left[\frac{1}{1+t\omega^2}\,\frac{[1+\omega l f(0,1)+(b_0\omega^2 l^2 f(1,0)]-(1+t\omega^2)}{\omega}\right]$$

$$= \lim.\frac{1}{1+t\omega^2}\cdot\lim.\frac{\omega l f(0,1)}{\omega} = l f(0,1) \qquad 54)$$

und wir haben daher für die Gleichung 50) folgende:

$$-l\,f(0,1) = \alpha\sin\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi - \cdot\cdot\cdot \qquad 55)$$

Aus der Gleichung 52) ergibt sich:

$$\sin\psi(0,\omega) = \frac{c\omega}{{}_0\sqrt{(1+s\omega)^2+c^2\omega^2}} \cdot\cdot\cdot \qquad 56)$$

Multipliciren wir die beiden Theile dieser Gleichung mit denjenigen der Gleichung 53) und subtrahiren alsdann die so entstandene Gleichung von dieser Gleichung 56), so findet man:

$$\text{tang.}\,\psi(0,\omega) - \sin\psi(0,\omega) = t_1\omega^3 \qquad \text{wenn } \frac{ct}{{}_0\sqrt{(1+s\omega)^2+c^2\omega^2}} = t_1$$

Da nun der absolute Werth von $\psi(0,\omega)$ zwischen den absoluten Werthen von $\text{tang.}\psi(0,\omega)$ und $\sin\psi(0,\omega)$, so wird man

$$\sin\psi(0,\omega) + t_2\omega^3 = \psi(0,\omega) \qquad 57)$$

setzen dürfen, wo $t_2$ dem absoluten Werthe nach unter demjenigen von $t_1$ und daher nicht jede angebbare Grösse übersteigen kann. Beachtet man jetzt noch ausser dieser Gleichung 57), dass $f(0,\omega) = {}_0e^{\omega l f(0,1)} = 1 + \omega l\, f(0,1) + b_0\omega^2 l^2 f(1,0)$, so findet man sogleich

$$\lim.\frac{f(0,\omega)\cdot\sin\psi(0,\omega)}{\omega} = \lim.\frac{\psi(0,\omega)}{\omega}$$

und man darf daher aus der Gleichung 51) auf folgende Gleichung schliessen:

$$\lim.\frac{\psi(0,\omega)}{\omega} = \alpha\cos\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi - \ldots \text{ wenn } \alpha<1. \qquad 58)$$

Durch die beiden Gleichungen 46) und 58) wird nun die Gleichung 40) und durch 47) und 55) die Gleichung 41) bewiesen, und es bleibt somit nur noch die 42) zu beweisen übrig. Zu diesem Zwecke erwäge man zunächst, dass vermöge der Gleichung 40)

$$\lim. \frac{\psi(0,\omega)}{\omega} = \mathrm{l}f(1,0) \tag{59}$$

Setzen wir nun zur Grenzbestimmung von $\frac{\psi(0,\omega)}{\omega}$ den Quotienten $\frac{1}{q}$ für $\omega$, wo q eine positive oder negative unendlich gross werdende ganze Zahl vorstellt, und multipliciren wir Dividend und Divisor mit der positiven ganzen Zahl p, so haben wir vorerst die Gleichung

$$\lim. \frac{\psi(0,\omega)}{\omega} = \lim. \frac{p\psi(0,\frac{1}{q})}{(\frac{p}{q})}$$

Nun findet man durch successive Addition von p Summanden, wo jeder $= \psi(0,\frac{1}{q})$, bei jeder Addition die Gleichung 25) anwendend, die Gleichung

$$p\psi(0,\frac{1}{q}) + 2\lambda\pi = \psi(0,\frac{p}{q})$$

wo $\lambda$ eine noch unbestimmte reelle, jedenfalls aber nicht gebrochene Zahl bezeichnet; und wir haben daher auch die Gleichung

$$\lim. \frac{\psi(0,\omega)}{\omega} = \lim. \frac{\psi(0,\frac{p}{q})-2\lambda\pi}{(\frac{p}{q})}$$

Lassen wir jetzt p und q zugleich ins Unendliche wachsen, und zwar so, dass der Quotient $\frac{p}{q}$ immer bei irgend einem bestimmten von 0 verschiedenen reellen Werthe $k_{,}$ verharrt, so finden wir aus dieser letztern Gleichung mit Beachtung der Gleichung 59)

$$\mathrm{l}f(1,0) = \frac{\psi(0,k_{,})-\lim. 2\lambda\pi}{k_{,}} \text{ oder}$$

$$k_{,}\mathrm{l}f(1,0) + \lim. 2\lambda\pi = \psi(0,k_{,})$$

Aber genau so, wie wir von der Gleichung 38) auf 33) schlossen, können wir endlich von der zuletzt gefundenen Gleichung auf die Gleichung 42) schliessen, die, wie leicht einzusehen, auch noch für $k_{,} = 0$ gilt.

## VII.

Wir beweisen jetzt das Stattfinden folgender Gleichungen für den Fall, da $\alpha < 1$,

$$\psi(k,k_{,}) = k\psi(1,0) + k_{,}lf(1,0) + 2\pi r_{k\psi(1,0) + k_{,}lf(1,0)} \qquad 60)$$

$$f(k,k_{,}) = {}_{0}e^{klf(1,0) - k_{,}\psi(1,0)} \qquad 61)$$

$$\varphi(k+k_{,}i) = {}_{0}[1 + \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{k+k_{,}i}$$
$$= {}_{0}e^{klf(1,0) - k_{,}\psi(1,0)}\big[\cos[k\psi(1,0) + k_{,}lf(1,0)] +$$
$$+ i\sin[k\psi(1,0) + k_{,}lf(1,0)]\big] \qquad 62)$$

Aus der Gleichung 25) folgt zunächst:

$$\psi(k,k_{,}) = \psi(k,0) + \psi(0,k_{,}) + 2\pi r_{\psi(k,0)+\psi(0,k_{,})}$$

und hieraus mit Rücksicht auf die Gleichung 33) und 42)

$$\psi(k,k_{,}) = k\psi(1,0) + k_{,}lf(1,0) +$$
$$+ 2\pi\big[r_{k\psi(1,0)} + r_{klf(1,0)} + r_{\psi(k,0)+\psi(0,k)}\big]$$

Aus dieser Gleichung lässt sich nun die Gleichung 60) wieder genau so erschliessen, wie die Gleichung 33) aus 38).

Die Richtigkeit der Gleichung 61) wird sogleich gefunden, wenn man in die Gleichung 28) für $lf(0,1)$ den nach der Gleichung 41) gleichwerthigen Ausdruck $-\psi(1,0)$ substituirt.

Was nun die Gleichung 62) betrifft, so beachte man vorerst, dass nun nach der in I.) angeführten Bezeichnung

$$\varphi(k+k_{,}i) = f(k,k_{,})\,[\cos\psi(k,k_{,}) + i\sin\psi(k,k_{,}i)]$$

ist, woraus sofort mit Beachtung von den Gleichungen 60) und 61) die Gleichung folgt:

$$\varphi(k+k_{,}i) = {}_{0}e^{klf(1,0) - k_{,}\psi(1,0)} \times$$
$$\big[\cos[k\psi(1,0) + k_{,}lf(1,0)] + i\sin[k\psi(1,0) + k_{,}lf(1,0)]\big] \qquad 63)$$

oder nach dem bekannten Lehrsatz über die Verwandlung einer Complexen in eine Potenz

$$\varphi(k+k_{,}i) = {}_{0}e^{klf(1,0)-k_{,}\psi(1,0)\;+\;i[k\psi(1,0)+k_{,}lf(1,0)]} \qquad 64)$$

Da nun der Exponent dieser Potenz gleich $(k+k_{,}i)(lf(1,0) + + i\,\psi(1,0))$, so hat man offenbar auch die Gleichung

$$\varphi(k+k_{,}i) = {}_{0}e^{(k+k_{,}i)[lf(1,0)+i\,\psi(1,0)]}$$

Nun ist ferner nach dem Lehrsatz über die Verwandlung von dem Logarithmus einer Complexen in eine Complexe

$$lf(1,0) + i\,\psi(1,0) = {}_{0}\log.\left[f(1,0)\cdot[\cos\psi(1,0) + i\sin\psi(1,0)]\right]$$

und man hat daher auch die Gleichung:

$$\varphi(k+k_{,}i) = {}_{0}e^{(k+k_{,}i)_{0}\log[f(1,0)\,\cdot\,[\cos\psi(1,0)\,+\,i\,\sin\psi(1,0)]]}$$

Endlich ist der zweite Theil dieser Gleichung nur nach der Erklärung einer Potenz mit complexen Exponenten $= {}_{0}[f(1,0)[\cos\psi(1,0) + i\sin\psi(1,0)]]^{k+k_{,}i}$ und da nach der in I.) angeführten Bezeichnung

$$f(1,0) = \mathrm{mod.}\varphi(1) = \mathrm{mod.}(1 + a + bi)$$
$$\psi(1,0) = \arg.\varphi(1) = \arg.(1 + a + bi)$$

so ist die Richtigkeit der folgenden Gleichung für den Fall, da $\alpha < 1$, ausser Zweifel:

$$\varphi(k+k_{,}i) = 1 + \binom{k+k_{,}i}{1}(a+bi) + $$
$$+ \binom{k+k_{,}i}{2}(a+bi)^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot = {}_{0}(1+a+bi)^{k+k_{,}i} \qquad 65)$$

## VIII.

Die Gleichung 65) findet ferner in folgenden 2 Fällen statt:

1) Wenn $\varphi^2 < \pi^2$, $\alpha = 1$, $(1 + k)$ positiv ist, und man hat dann insbesondere:

$${}_{0}(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^{k+k_{,}i} =$$
$$= 1 + \binom{k+k_{,}i}{1}(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \binom{k+k_{,}i}{2}(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\ldots.$$
$$= {}_{0}e^{\frac{k}{2}l(2+2\cos\varphi) - \frac{k_{,}}{2}\varphi + i\left[\frac{k_{,}}{2}l(2+2\cos\varphi) + \frac{k}{2}\varphi\right]} \qquad 66)$$

2) Wenn $\varphi = \pi$, $\alpha = 1$, k positiv ist, und man hat alsdann die Gleichung:

$$0 = 1 - \binom{k + k_{,}i}{1} + \binom{k + k_{,}i}{2} - \binom{k + k_{,}i}{3} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad 67)$$

Beweis zu 1). Setzen wir in der Gleichung 2)

$p_\alpha$ = dem reellen Theil der der Reihe $\varphi(k + k_{,}i)$ gleichen Complexen,

$iq_\alpha$ = dem imaginären Theil der der Reihe $\varphi(k + k_{,}i)$ gleichen Complexen.

$P_\alpha$ = dem reellen Theil der der Potenz $_0[1 + \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{k + k_{,}i}$ gleichen Complexen,

$iQ_\alpha$ = dem imag. Theil der der Potenz $_0[1 + \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{k + k_{,}i}$ gleichen Complexen,

so hat man zum Zwecke des Beweises der Gleichung 66) nur darzuthun, dass unter den Voraussetzungen, unter welchen diese Gleichung behauptet wird,

$$p_{,} = P_{,} \quad \text{und} \quad q_{,} = Q_{,}$$

Das Stattfinden dieser 2 Gleichungen ergibt sich leicht aus folgenden Betrachtungen: Vorerst findet man, einerseits durch Verwandlung der Potenz $_0[1 + \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{k + k_{,}i}$ in eine Complexe und anderseits aus der Gleichung 2), dass, wenn $\varepsilon$ positiv und $< 1$,

$$P_{1-\varepsilon} = {}_0e^{\frac{k}{2}l[(2 + 2\cos\varphi)(1 - \varepsilon) + \varepsilon^2] - k_{,}\,\text{arc. tang.}\frac{(1-\varepsilon)\sin\varphi}{1 + (1-\varepsilon)\cos\varphi}} \times$$
$$\cos\left[k\,\text{arc. tg.}\frac{(1 - \varepsilon)\sin\varphi}{1 + (1 - \varepsilon)\cos\varphi} + \frac{k_{,}}{2}l[(2 + 2\cos\varphi)(1 - \varepsilon) + \varepsilon^2]\right] \qquad 68)$$

$$p_{1-\varepsilon} = 1 + (1-\varepsilon)\lambda_{,}\cos\Theta_{,} + (1-\varepsilon)^2\lambda_2\cos\Theta_2 + (1-\varepsilon)^3\lambda_3\cos\Theta_3 + \ldots \qquad 69)$$

$$P_1 = {}_0e^{\frac{k}{2}l(2 + 2\cos\varphi) - \frac{k_{,}\varphi}{2}}\cos\left(\frac{k\varphi}{2} + \frac{k_{,}}{2}l(2 + 2\cos\varphi)\right) \qquad 70)$$

$$p_1 = 1 + \lambda_{,}\cos\Theta_{,} + \lambda_2\cos\Theta_2 + \lambda_3\cos\Theta_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad 71)$$

Nehmen wir nun, entgegen der zu begründenden Behauptung, an, es finde zwischen $P_{,}$ und $p_{,}$ ein angebbarer Unterschied statt $= D$, so könnte bei dem Umstande, dass der absolute Werth von $\varphi$ unter $\pi$ vorausgesetzt wird, und nach dem bereits Bewiesenen die Reihen $p_{,}$ und $p_{1-\varepsilon}$, wenn auch $\varepsilon$ unendlich klein wäre, convergiren, aus den Gleichungen 68) bis 71) auf das Vorhandensein eines solchen angebbaren Werthes $\varepsilon,$ von $\varepsilon$ geschlossen werden, für welchen der absolute Werth $[P_1 - P_{1-\varepsilon}]$ und zugleich derjenige von $[p_1 - p_{1-\varepsilon}]$ unter dem von $\frac{1}{2}D$ läge. Wenn nun

$$P_1 = P_{1-\varepsilon,} + \omega_1 \quad \text{und} \quad p_1 = p_{1-\varepsilon,} + \omega_2$$

so müsste offenbar in Folge dieser 2 Gleichungen und da für ein angebbares $\varepsilon,$ die Grösse $P_{1-\varepsilon,} = p_{1-\varepsilon,}$, die Gleichung bestehen

$$P, - p, = \omega, - \omega_2$$

wo nun jedenfalls $\omega, - \omega_2$ dem absoluten Werthe nach unter D sein müsste. Hieraus folgt, dass $P, - p,$ unter jeder angebbaren Kleinheit liegt, mithin $= 0$ ist. Genau auf gleiche Weise lässt sich die Identität des $q,$ mit $Q,$ beweisen.

B e w e i s z u 2). Voraussetzend, dass $\alpha = 1$ und k positiv, bezeichnen wir mit

$p_\varphi$ den reellen Bestandtheil der Reihe für $\varphi(k + k,i)$ in der Gleichung 2),

$iq_\varphi$ den imaginären Bestandtheil der Reihe für $\varphi(k + k,i)$ in der Gleichung 2),

$P_\varphi$ den reellen Bestandtheil in der der Potenz $_0[1 + \cos\varphi + i\sin\varphi]^{k+k,i}$ gleichen Complexen,

$iQ_\varphi$ den imaginären Bestandtheil in der der Potenz $_0[1 + \cos\varphi + i\sin\varphi]^{k+k,i}$ gleichen Complexen.

Nun führen die Verwandlung der Potenz $_0(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^{k+k,i}$ in eine Complexe, und die Substitution von $A_m + m\varphi$ für $\Theta_m$ in den zweiten Theil der Gleichung 2) zu folgenden Gleichungen:

$$P_{\pi-\varepsilon} = {_0e}^{\frac{k}{2}l(2-2\cos\varepsilon) - \frac{k,}{2}(\pi-\varepsilon)} \cos\left(\frac{k}{2}(\pi-\varepsilon) + \frac{k,}{2}l(2-2\cos\varepsilon)\right) \tag{72}$$

$$p_{\pi-\varepsilon} = 1 - \lambda_1\cos(A_1-\varepsilon) + \lambda_2\cos(A_2-2\varepsilon) - \lambda_3\cos(A_3-3\varepsilon) + \ldots \tag{73}$$

$$P_\pi = {_0e}^{\frac{k}{2}l0 - \frac{1}{2}k,\pi} \cos\left(\frac{1}{2}k\pi + \frac{1}{2}k,l0\right) \tag{74}$$

$$p_\pi = 1 - \lambda_1\cos A_1 + \lambda_2\cos A_2 - \lambda_3\cos A_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \tag{75}$$

wo $\varepsilon$ einen positiven unter $\pi$ liegenden Bogen bezeichnet.

Gesetzt nun, der Unterschied zwischen $P_\pi$ und $p_\pi$ wäre $=$ $= D$, wo $D$ weder 0, noch unendlich klein, so könnte doch jedenfalls ein solcher angebbarer Werth $\varepsilon$, von $\varepsilon$ vermittelt werden, für welchen

1) der Unterschied zwischen $P_\pi$, was, wenn k positiv und nicht unendlich klein, entschieden 0 ist, und $P_{\pi-\varepsilon}$, was unter derselben Voraussetzung bei unendlich abnehmendem $\varepsilon$ entschieden unendlich klein würde, dem absoluten Werthe nach unter $\frac{1}{2}D$ fiele.

2) der Unterschied zwischen den Reihen $p_{\pi-\varepsilon}$ und $p_\pi$ ebenfalls dem absoluten Werthe nach unter $\frac{1}{2}D$ fiele, da ja nach dem bereits Bewiesenen, wenn k positiv und nicht unendlich klein ist, die Reihe $p_\pi$ convergirt, und diess unter derselben Bedingung bei der Reihe $p_{\pi-\varepsilon}$ auch dann noch stattfindet, wenn $\varepsilon$ in $p_{\pi-\varepsilon}$ unendlich klein würde.

Wenn aber die absoluten Werthe der Differenzen $(P_\pi - P_{\pi-\varepsilon})$ und $p_\pi - p_{\pi-\varepsilon}$, für ein angebbares $\varepsilon$, unter dem absoluten Werth von $\frac{1}{2}D$ fallen, so wird natürlich auch der Unterschied dieser Differenzen, nämlich $P_\pi - p_\pi - P_{\pi-\varepsilon} + p_{\pi-\varepsilon}$, dem absoluten Werthe nach unter D sein. Da nun für ein angebbares $\varepsilon$, vermöge der bewiesenen Gleichung 66) $P_{\pi-\varepsilon} - p_{\pi-\varepsilon} = 0$, so müsste nothwendig $P_\pi - p_\pi$ dem absoluten Werthe nach unter D sein.

Dieser letzte Schluss zwingt zu der Annahme, dass $P_\pi - p_\pi =$ $= 0$ ist; und da sich nun offenbar auf ganz gleiche Art beweisen lässt, dass $Q_\pi = q_\pi = 0$, so folgt, dass auch $p_\pi + q_\pi i$, oder der zweite Theil der Gleichung 67) $= 0$ sein muss.

## IX.

Wenn $k = k_{,} = 0$, $\alpha = 1$, $\varphi = \pi$, so ist die im Lehrsatze behauptete Gleichung unbrauchbar. In diesem Falle ist nämlich die Reihe $\varphi(k + k_{,}i) = 1$, dagegen die Potenz ${}_{0}(1 + \cos\varphi + i \sin\varphi)^{k+k_{,}i}$ ganz unbestimmt, was sich auf folgende Weise zeigen lässt: Da diese Potenz unter den erwähnten Voraussetzungen die unbestimmte Form ${}_{0}0^{0}$ annimmt, so werden wir genöthigt den Nachbarwerth in Betracht zu ziehen. Setzen wir zu diesem Zwecke $\varphi = \pi - \varepsilon$, so finden wir die fragliche Potenz nach dem Satze über die Verwandlung einer Potenz in eine Complexe

$$= {}_{0}e^{\frac{k}{2}l(2-2\cos\varepsilon) - k_{,}\,\mathrm{arc.tang.}\frac{\sin\varepsilon}{1-\cos\varepsilon} + i\left[\frac{k_{,}}{2}l(2-2\cos\varepsilon) + k\,\mathrm{arc.tang.}\frac{\sin\varepsilon}{1-\cos\varepsilon}\right]} \tag{76}$$

In VI.) haben wir gesehen, dass, wenigstens so lange $\varepsilon^2$ unter $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$, $\cos\varepsilon = 1 - b\varepsilon^2$ und $\sin\varepsilon = \varepsilon - \frac{1}{4}b_{,}\varepsilon^3$, wo b und $b_{,}$ positive echte Brüche bezeichnen. Diess beachtend findet man für ein unendlich klein werdendes positives $\varepsilon$

$$\lim.\,\mathrm{arc.tang.}\frac{\sin\varepsilon}{1-\cos\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$$

Ferner ist

$$kl(2-2\cos\varepsilon) = kl[2-2(1-b\varepsilon^2)] = klb + 2kl\varepsilon$$

Lassen wir nun in $kl\varepsilon$ die Grössen k und $\varepsilon$ unendlich abnehmen, so finden wir, dass hiebei $kl\varepsilon$ sich keiner bestimmten Grenze allmälig nähert. Setzen wir z. B. $k = n\varepsilon$, wo n irgend eine endliche reelle Zahl bedeutet, so wird die Grenze von $kl\varepsilon = 0$ sein, da

$$\varepsilon l\varepsilon = -\frac{-l\varepsilon}{{}_{0}e^{-l\varepsilon}} = -\frac{-l\varepsilon}{1+(-l\varepsilon)+\frac{(-l\varepsilon)^2}{1\cdot2}+\frac{(-l\varepsilon)^3}{1\cdot2\cdot3}+\ldots}$$

$$= -\frac{1}{\frac{1}{-l\varepsilon}+1+\frac{-l\varepsilon}{1\cdot2}+\frac{(-l\varepsilon)^2}{1\cdot2\cdot3}+\ldots}$$

woraus sich sogleich ergibt, dass $\lim(\varepsilon l \varepsilon)$, mithin auch $\lim(n\varepsilon l\varepsilon) = 0$ ist. Setzen wir aber bei derselben Bedeutung von n, $k = \frac{n}{l\varepsilon}$, so wird $\lim(kl\varepsilon) = n$ sein.

Die in Untersuchung stehende Potenz 76) hat mithin, wenn $k$, $k_,$, $\varepsilon$ unendlich klein werden, durchaus keinen fixen Werth, und kann lediglich nur in speciellen Fällen, in welchen $k$, $k_,$ und $\varepsilon$ in gewissen Verhältnissen zu einander stehen, z. B. wenn $k = n\varepsilon$ und $k_, = n_,\varepsilon$ wo $n$ und $n_,$ reelle endliche Grössen bedeuten, den Werth 1 mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit darbieten.

## X.

Wenn $\alpha > 1$, $k_, = 0$ und k eine positive ganze Zahl, dann geht die Wahrheit unsers Lehrsatzes einfach aus dem Umstande hervor, dass nach III.) im Falle des Abbrechens der beiden Reihen $\varphi(k + k_,i)$ und $\varphi(l + l_,i)$ die Existenz der Gleichung

$$\varphi(k + k_,i) \cdot \varphi(l + l_,i) = \varphi[k + l + (k_, + l_,)i]$$

von der Grösse des $\alpha$ unabhängig ist. Bildet man nun nach und nach, bei jeder Multiplication diese Gleichung anwendend, das Produkt aus k Faktoren, wo jeder $= \varphi(1)$ oder $= [1+\alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)]$, so erhält man $\varphi(k)$, und man hat daher offenbar die Gleichung:

$$\varphi(k) = [1 + \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^k \qquad 77)$$

Wenn aber ausser $k_,$ auch $k = 0$, dann ist $\varphi(k) = 1$, da ferner $\alpha > 1$, so kann $[1 + \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)]$ nicht 0 sein und es ist daher $[1 + \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^0$ ebenfalls $= 1$, mithin die Gleichung 77) auch in diesem Falle richtig.

## XI.

Aus dem unter den obigen Nummern I.) bis X.) enthaltenen Raisonnement folgt nun, dass ${}_0(1 + a + bi)^{k+k_,i}$ oder gemäss der Gleichung 62) die gleichwerthige Complexe

$$ {}_0e^{klf(1.0)-k,\psi(1,0)}[\cos[k,lf(1,0)+k\psi(1,0)]]+i\sin[k,lf(1,0+k\psi(1,0)]], $$

wo $f(1,0) = {}_0\sqrt{(1+a)^2+b^2}$

$$ \psi(1,0) = \underbrace{b}[1-\underbrace{1+a}]\frac{\pi}{2} + \text{arc. tg.}\frac{b}{1+a} = \underbrace{b}\,\text{arc. cos}\frac{1+a}{{}_0\sqrt{(1+a)^2+b^2}} $$

den Betrag der Reihe $\varphi(k+k,i)$ oder

$$ 1 + \binom{k+k,i}{1}(a+bi) + \binom{k+k,i}{2}(a+bi)^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot $$

ausdrückt, und zwar in sämmtlichen Fällen ihrer Convergenz, den einzigen Fall ausgenommen, da $k = k, = b = 0$ und zugleich $a = -1$ ist.

Diess Resultat stimmt mit dem, welches Abel in Crelle's Journal 1ter Band, pag. 333, in I.) der Uebersicht gibt, nur in dem Fall nicht überein, da $1 + a$ negativ und k eine positive ungerade Zahl ist. In diesem Falle sind dann auch die Gleichungen auf der Mitte der pag. 326 der erwähnten Abhandlung unrichtig, wovon man sich schon durch folgendes einfache Beispiel überzeugt. Nach Abel hätte man für $k = 1$, $k, = 0$, die Gleichung:

$$ 1+a+bi = [(1+a)^2+b^2]^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\text{arc.tg.}\frac{b}{1+a}\right) + i\sin\left(\text{arc.tg.}\frac{b}{1+a}\right)\right] $$

welche Gleichung, da nach Abel arc. tg. $\frac{b}{1+a}$ eine zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ enthaltene Grösse und $[(1+a)^2+b^2]^{\frac{1}{2}}$ als Modulus positiv sein soll, in dem Falle, da $1+a$ negativ wird, offenbar unrichtig ist.

## Erster Zusatz.

Wenn $1 + k$ positiv, mithin nicht 0, so hat man nach VIII) die Gleichung:

$$ {}_02^{k+k,i} = 1 + \binom{k+k,i}{1} + \binom{k+k,i}{2} + \cdot\cdot\cdot = {}_0e^{kl2}(\cos k,l2 + i\sin k,l2) $$

Ferner ist, wenn k positiv, mithin nicht 0, vermöge dieser letztern Gleichung und der Gleichung 67):

$$ {}_02^{k+k,i} = 2\left[1 + \binom{k+k,i}{2} + \binom{k+k,i}{4} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right] $$

$$ {}_02^{k+k,i} = 2\left[\binom{k+k,i}{1} + \binom{k+k,i}{3} + \binom{k+k,i}{5} + \cdot\cdot\cdot\right] $$

### Zweiter Zusatz.

Es ist

$$\mathrm{l\,f}(1,0)+i\psi(1,0)=[\alpha\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots]+ i[\alpha\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots] \qquad 78)$$

und zwar nur in folgenden Fällen:

1) wenn $\alpha < 1$,
2) wenn $\alpha = 1$ und $\varphi^2 < \pi^2$.

### Beweis.

Wir haben schon in VI) nachgewieseu, dass wenn $\alpha < 1$ folgende 2 Gleichungen stattfinden:

$$\mathrm{l\,f}(1,0)=\alpha\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots \qquad 79)$$

$$\psi(1,0)=\alpha\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots \qquad 80)$$

In dem Falle, da $\alpha < 1$, besteht mithin offenbar die Gleichung 78).

Ist aber $\alpha = 1$ und $\varphi^2 < \pi^2$, so kann die Richtigkeit der Gleichungen 79) und 80) und mithin auch der Gleichung 78) auf folgende Weise ins Klare gesetzt werden. Setzen wir $\varphi(\pi-x)$ für $\varphi$, wo x in Folge der Voraussetzung einen jedenfalls von 0 verschiedenen unter $\pi$ liegenden positiven Bogen bezeichnet, in die Reihe

$$\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}\cos 3\varphi-\cdots$$

die wir der Kürze wegen $=$ C setzen wollen, und multipliciren sie mit $2\sin\frac{1}{2}x$, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}-2C\sin\tfrac{1}{2}x &= 2\cos x\sin\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\cdot 2\cos 2x\sin\tfrac{1}{2}x+\\ &\qquad+\tfrac{1}{3}\cdot 2\cos 3x\sin\tfrac{1}{2}x+\cdots\\ &=(\sin\tfrac{3}{2}x-\sin\tfrac{1}{2}x)+\tfrac{1}{2}(\sin\tfrac{5}{2}x-\sin\tfrac{3}{2}x)+\\ &\qquad+\tfrac{1}{3}(\sin\tfrac{7}{2}x-\sin\tfrac{5}{2}x)+\cdots\\ &=-\sin\tfrac{1}{2}x+(1-\tfrac{1}{2})\sin\tfrac{3}{2}x+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})\sin\tfrac{5}{2}x+\\ &\qquad+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})\sin\tfrac{7}{2}x+\cdots\end{aligned}$$

Da nun die Reihe $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ mit durchgehends positiven Gliedern convergirt, so wird natürlich auch die Reihe, die wir für $-2C\sin\frac{1}{2}x$ fanden, und mithin auch, da $\sin\frac{1}{2}x$ nicht 0 ist, C selbst convergent sein.

Setzen wir ferner $\underset{\smile}{\varphi}(\pi-x)$ für $\varphi$ in die Reihe

$$\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\sin 3\varphi-\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

die wir mit S bezeichnen, und multipliciren auch diese mit $2\sin\frac{1}{2}x$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}2S\sin\tfrac{1}{2}x &= \underset{\smile}{\varphi}\Big[2\sin x\sin\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}2\sin 2x\sin\tfrac{1}{2}x+\\ &\qquad +\tfrac{1}{3}2\sin 3x\sin\tfrac{1}{2}x+\cdot\cdot\cdot\cdot\Big]\\ &= \underset{\smile}{\varphi}\Big[\cos\tfrac{1}{2}x-\cos\tfrac{3}{2}x+\tfrac{1}{2}(\cos\tfrac{3}{2}x-\cos\tfrac{5}{2}x)+\\ &\qquad +\tfrac{1}{3}(\cos\tfrac{5}{2}x-\cos\tfrac{7}{2}x)+\cdot\cdot\cdot\cdot\Big]\\ &= \underset{\smile}{\varphi}\cos\tfrac{1}{2}x-\underset{\smile}{\varphi}\Big[(1-\tfrac{1}{2})\cos\tfrac{3}{2}x+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})\cos\tfrac{5}{2}x+\\ &\qquad +(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})\cos\tfrac{7}{2}x)+\cdot\cdot\cdot\cdot\Big]\end{aligned}$$

Wir sehen hieraus, dass die Convergenz von S, wie diejenige von C bewiesen werden kann.

Da nun die in 79) und 80) erscheinenden Reihen, so lange $\varphi^2<\pi^2$ und $\alpha$ die Einheit nicht übersteigt, ihre Convergenz immer beibehalten und überdiess die Stetigkeit der einzelnen Glieder dieser Reihe, indem $\alpha$ von 0 aus allmälig in die Einheit übergeht, nicht bezweifelt werden kann; da ferner bei demselben Uebergang $lf(1,0)$ oder $\frac{1}{2}l(1+\alpha^2+2\alpha\cos\varphi)$, so wie auch $\psi(1,0)$ oder $\underset{\smile}{\sin\varphi}$ arc. $\cos\dfrac{1+\alpha\cos\varphi}{{}_0\sqrt{1+\alpha^2+2\alpha\cos\varphi}}$, wenn eben $\varphi^2<\pi^2$, ihre Stetigkeit nie verlieren; und da endlich die Gleichungen 79) und 80) für jeden Werth von $\alpha$, der unter 1 liegt, Bestand haben, so ist klar, dass sich die Richtigkeit dieser Gleichungen für den Fall, da $\alpha=1$, ebenso beweisen lässt, wie diejenige der Gleichung $P,=p$, in VIII) bewiesen wurde.

Ist nun ferner $\alpha=1$ und $\varphi=\pi$, so divergirt offenbar 79) und somit auch 78).

Ist endlich $\alpha>1$, so wird für ein unendlich gross werdendes n entweder das $n^{te}$ Glied in 79) oder dann das $n^{te}$ Glied in 80) nicht 0 zur Grenze haben, und daher offenbar die Reihe in 78) divergent sein.

## Anmerkungen, betreffend den Abel'schen Beweis.

1) Die grösste Schwierigkeit, die sich beim Beweise des binomischen Lehrsatzes entgegenstellt, zeigt sich in der Bestimmung von $\psi(k,k_,)$. Abel leitet diese Bestimmung mit folgenden Worten ein: »Zuerst behaupte ich, dass $\psi(k,k_,)$ eine stetige Funktion von k und $k_,$ zwischen beliebigen Grenzen dieser veränderlichen Grössen sein wird. In der That sind p oder $1 + \alpha\lambda_1 \cos\Theta_1 + \alpha^2\lambda_2 \cos\Theta_2 + \cdot \cdot \cdot$ und q oder $1 + \alpha\lambda_1 \sin\Theta_1 + \alpha^2\lambda_2 \sin\Theta_2 + \cdot \cdot \cdot$ stetige Funktionen. Es ist aber

$$\cos\psi(k,k_,) = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \quad \text{und} \quad \sin\psi(k,k_,) = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

folglich ist $\cos\psi(k,k_,)$ und $\sin\psi(k,k_,)$ eine stetige Funktion. Daher kann man voraussetzen, dass es $\psi(k,k_,)$ ebenfalls ist. Da nun $\psi(k,k_,)$ eine stetige Funktion ist, so muss m in der Gleichung

$$\psi[k + l + (k_, + l_,)i] = 2m\pi + \psi(k,k_,) + \psi(l,l_,) \qquad 81)$$

für alle Werthe von k, $k_,$, l, $l_,$ denselben Werth haben.«

Im Nachfolgenden behandelt nun Abel dieses m wirklich als eine von k, $k_,$, l und $l_,$ ganz Unabhängige, was natürlich die Bestimmung von $\psi(k,k_,)$ sehr erleichtert, und rechnet mit $\psi$ genau so, wie es es durchaus nur mit eindeutigen Grössen zu rechnen erlaubt ist, woraus offenbar folgt, dass Abel sich unter $\psi(k,k_,)$ nur Einen der unzählig vielen Bogen sich dachte, die alle $\frac{p}{{}_0\sqrt{p^2+q^2}}$ zur Cosinus und $\frac{q}{{}_0\sqrt{p^2+q^2}}$ zum Sinus haben. $\psi$ musste also von Abel im Verlauf der ganzen Recsnung nothwendig als ein Zeichen angesehen werden, welches die Aushebung eines speciellen Werthes von dem Argument der der Reihe $\varphi(k+k_,i)$ gleichen Complexen $p + qi$ in bestimmter Weise vorschreibt. Wie man aber auch diese Aushebung reguliren mag, so wird man doch stets hiedurch gezwungen werden, dem eindeutigen $\psi$ für gewisse Stellen das Gepräge der Unstetigkeit aufzudrücken. Will man für die Bildung eines eindeutigen $\psi(k,k_,)$ denjenigen der Werthe des Argumentes von $p + qi$ nehmen, der entweder 0, oder zwischen 0 und $2\pi$ liegt, so werden in den unzählig vielen Fällen, in welchen k, $k_,$, $\alpha$ und $\varphi$ der Funktion $\psi(k,k_,)$

den Werth 0 ertheilen, die Nachbarwerthe von $\varphi(k,k_{,})$, die um $2\pi$ verschiedenen Grössen $\varepsilon$ und $2\pi-\varepsilon$ sein, wenn $\varepsilon$ eine unendlich klein werdende Grösse bezeichnet. Will man aber jene Aushebung in der Weise reguliren, wie es in unserm Beweise geschah, so wird $\psi(k,k_{,})$ freilich nicht mehr wie vorhin an der Stelle 0, sondern bei $\pi$ unstetig, sie springt von $\pi-\varepsilon$ in $-\pi+\varepsilon$ über, was von $\pi-\varepsilon$ wieder um $2\pi$ differirt. Fasst man also $\psi$ als eine eindeutige Funktion auf, und zu dieser Auffassung ist man geradezu gezwungen, so darf man aus der zwar allerdings vorhandenen Stetigkeit von $\cos\psi(k,k_{,})$ und $\sin\psi(k,k_{,})$ gewiss nicht auf die Stetigkeit von $\psi(k,k_{,})$ und somit auch nicht auf die Unabhängigkeit des m von k, $k_{,}$, l und $l_{,}$ schliessen. Versteht man unter $\psi$ einen Bogen, der entweder $=\pi$ oder zwischen $\pi$ und $-\pi$ ist, so muss dieses m in 81) einen solchen von k, $k_{,}$, l und $l_{,}$ abhängenden Werth haben, für welchen $2m\pi +$ $+ \psi(k,k_{,}) + \psi(l,l_{,})$ zu einem Bogen wird, der entweder $=\pi$ oder zwischen $\pi$ und $-\pi$, mithin offenbar entweder 0, oder $+1$, oder $-1$ sein.

2) Der Beweis, den Abel für die Divergenz der Reihe $\varphi(k+k_{,}i)$ gibt, in dem Falle, da $\varphi=\pi$, $\alpha=1$, $k=0$ oder zwischen 0 und $-1$, ist folgender:

»Wäre die Reihe $\varphi(k+k_{,}i)$ in diesem Falle convergent, so hatte sie zur Summe die Grenze der Function

$$e^{k\delta-k_{,}\delta_{,}}[\cos(k_{,}\delta+k\delta_{,})+i\sin(k_{,}\delta+k\delta_{,})] \qquad 82)$$

wenn man $\alpha$ gegen 1 hin convergiren lässt, und $\varphi=\pi$ setzt. Es ist aber $\delta=\frac{1}{2}\log.(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)$ und $\delta_{,}=\text{arc.tg.}\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}$, folglich für $\varphi=\pi$: $\delta=\log(1-\alpha)$ $\delta_{,}=0$. Die in Rede stehende Function 82) geht also in

$$(1-\alpha)^{k}\left[\cos[k_{,}\log(1-\alpha)]+i\sin[k_{,}\log(1-\alpha)]\right]$$

über. Da aber $k=0$ oder negativ ist, so ist klar, dass diese Function, wenn man $\alpha$ sich 1 nähern lässt, keine endliche und bestimmte Grenze hat. Die Reihe $\varphi(k+k_{,}i)$ ist also divergent, w. z. z. w.«

Dieser Beweis ist wohl schon desswegen unzulässig, da durch diesen die Divergenz der Reihe $\varphi(k+k_{,}i)$ in einem Falle bewiesen wird, in welchem sie offenbar convergent ist. Wenn nämlich $k=k_{,}=0$, so hat $\varphi(k+k_{,}i)$ ganz entschieden den

Werth 1, obschon die von Abel untersuchte Function 82) wirklich auch in diesem Falle keine endliche und bestimmte Grenze hat.

### Zweiter Lehrsatz.

Es ist

$$ {}_0\log(1+a+bi) = a + bi - \frac{1}{2}(a+bi)^2 + \frac{1}{3}(a+bi)^3 - \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad 83) $$

jedoch nur in folgenden Fällen:

1) wenn mod. $(a+bi) < 1$.
2) wenn mod. $(a+bi) = 1$ und $[\arg(a+bi)]^2 < \pi^2$.

### Beweis.

Wenn wir die beim Beweise des ersten Lehrsatzes eingeführte Bezeichnung beibehalten, so findet nach dem Lehrsatz über die Verwandlung von dem Logarithmus einer Complexen in eine Complexe die Gleichung statt:

$$ {}_0\log[1 + \alpha(\cos\varphi + i \sin\varphi)] = {}_0\log f(1,0) + i\,\psi(1,0) \qquad 84) $$

Nun ist nach dem zweiten Zusatz zum ersten Lehrsatz, nur dann, wenn entweder $\alpha < 1$, oder wenn $\alpha = 1$ und zugleich $\varphi^2 < \pi^2$, der zweite Theil dieser Gleichung

$$ = [\alpha\cos\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi + \cdot \cdot \cdot \cdot] + i[\alpha\sin\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi + \ldots] $$

und da dieser letztere Ausdruck

$$ = \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi) - \frac{1}{2}\alpha^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \cdot \cdot \cdot \cdot $$

so wird man sogleich die Richtigkeit unsers Lehrsatzes erkennen.

### Dritter Lehrsatz.

Bezeichnen k und $k_{,}$ reelle Zahlen, 0 nicht ausgenommen, hingegen $\mu$ eine positive ganze Zahl, und setzt man, wie bisher

$$ \frac{(k+k_{,}i)\cdot(k+k_{,}i-1)(k+k_{,}i-2)\cdot\cdot\cdot(k+k_{,}i-\mu+1)}{1\cdot\quad 2\cdot\quad 3\cdot\quad\quad \mu} = \binom{k+k_{,}i}{\mu} $$

so wird beim unendlichen Zunehmen von $\mu$, wenn c eine von 0 verschiedene angebbare Complexe bezeichnet, die wenn $k_{,}=0$, den Werth 1 hat:

1) $\lim\binom{k+k_{,}i}{\mu}=\pm c$ , wenn $1+k=0$.

2) $\lim\binom{k+k_{,}i}{\mu}=0$ , wenn $1+k$ positiv.

3) $\lim\binom{k+k_{,}i}{\mu}=\pm\infty$ , wenn $1+k$ negativ ist.

## Beweis.

### I.

Das Product aus den sämmtlichen Modulis zu den Faktoren

$$k+k_{,}i,\ \frac{k+k_{,}i-1}{2},\ \frac{k+k_{,}i-2}{3},\ \ldots\ldots \frac{k+k_{,}i-\mu+i}{\mu}$$

der Faktorielle $\binom{k+k_{,}i}{\mu}$ bildet den Modulus von $\binom{k+k_{,}i}{\mu}$, und ist, wenn $k=-1$, wie leicht einzusehen,

$$=\sqrt[0]{(1+\frac{k_1^2}{1^2})(1+\frac{k_1^2}{2^2})(1+\frac{k_1^2}{3^2})\cdots(1+\frac{k_1^2}{\mu^2})}$$

Nun sei $\gamma$ eine endliche positive ganze Zahl, deren Quadrat nicht unter $k_1^2$ liegt; dann wird, wenn

$$(1+\frac{k_1^2}{\gamma^2})\left[1+\frac{k_1^2}{(\gamma+1)^2}\right]\left[1+\frac{k_1^2}{(\gamma+2)^2}\right]\cdots\cdots(1+\frac{k_1^2}{\mu^2})=P$$

P eine positive endliche Zahl sein, so gross man sich auch $\mu$ denken mag. Denn, bedenken wir, dass $P={}_0e^{lP}$ und

$$lP=l\left(1+\frac{k_1^2}{\gamma^2}\right)+l\left(1+\frac{k_1^2}{(\gamma+1)^2}\right)+\cdots\cdots l\left(1+\frac{k_1^2}{\mu^2}\right)$$

so werden wir in Berücksichtigung, dass $\frac{k_1^2}{\gamma^2}$ die Einheit nicht übersteigt, vermöge der Gleichung 7) folgende Gleichung haben:

$$lP=\frac{k_1^2}{\gamma^2}-b\left(\frac{k_{,}}{\gamma}\right)^4+\left(\frac{k_{,}}{\gamma+1}\right)^2-b_{,}\left(\frac{k_{,}}{\gamma+1}\right)^4+\left(\frac{k_{,}}{\gamma+2}\right)^2-b_2\left(\frac{k_{,}}{\gamma+2}\right)^4+\ldots.$$

wo $b$, $b_1$, $b_2$ . . . positive zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegende Zahlen bezeichnen.

Da nun nach dem in 5.) angeführten Kennzeichen der Convergenz die Reihe der positiven Summanden, und noch weit mehr die Reihe der negativen Summanden im zweiten Theil dieser Gleichung convergirt, so ist offenbar lP und mithin auch ${}_0e^{lP}$ oder P selbst eine von 0 verschiedene bestimmte endliche Grösse. Beachtet man nun, dass $\gamma$ eine positive endliche Zahl, so wird man sogleich einsehen, dass

$$\text{lim. mod.}\left(\frac{-1+k_{,}i}{\mu}\right)=C_0$$

wo $C_0$, wenn $k_{,}$ nicht 0, eine über 1 liegende positive endliche Zahl, und wenn $k_{,}=0$, die Einheit bedeutet. Setzen wir jetzt ferner $\arg\dfrac{k+k_{,}i-\nu+1}{\nu}$, oder was, da $\nu$ nicht 0, dasselbe ist:

$$\arg(k+k_{,}i-\nu+1)=\gamma_\nu \qquad \text{und}$$

$$\arg\left(\frac{k+k_{,}i}{\nu}\right) \quad \text{oder} \quad \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\ldots\gamma_\nu=A_\nu$$

so behaupte ich, dass beim unendlichen Zunehmen von $\nu$

$$\lim\left[\cos A_\nu+i\sin A_\nu+\cos A_{\nu+1}+i\sin A_{\nu+1}\right]=0 \qquad 85)$$

den einzigen Fall ausgenommen, da $k_{,}=0$ und zugleich $k=0$ oder eine positive ganze Zahl ist. Es ist nämlich

$$A_{\nu+1}=A_\nu+\arg(k+k_{,}i-\nu)$$

und für ein unendlich gross werdendes $\nu$ das $\arg(k+k_{,}i-\nu)$, wenn k und $k_{,}$ von angebbarer Grösse von $\pi$ durchaus nicht angebbar verschieden, mithin $A_{\gamma+1}=A_\gamma+\pi$, woraus man sofort auf die Richtigkeit unserer Behauptung schliessen darf.

Wir sehen also, dass, wenn in

$$\left(\frac{-1+k_{,}i}{\gamma}\right)=(\cos A_\gamma+i\sin A_\gamma)\,.\,\text{mod.}\left(\frac{-1+ki}{\gamma}\right)$$

$\gamma$ ohne Ende successive um eine Einheit wächst, der reducirte Ausdruck zu $\left(\frac{-1+ki}{\gamma}\right)$ nach jeder Zunahme um 1 um so genauer in das Entgegengesetzte seiner Werthes übergegangen ist, je grösser $\gamma$ geworden, dass hingegen der Modulus zu $\left(\frac{-1+k_{,}i}{\gamma}\right)$ sich hiebei einer bestimmten endlichen Grenze fortwährend nähert. Der Ausdruck $\lim\left(\frac{-1+k_{,}i}{\gamma}\right)$ hat demnach die Zweideutigkeit eines Radikals mit dem Wurzelexponenten 2.

Wenn insbesondere $k_, = 0$, so ist bei unendlich gross werdendem $\gamma$: $\cos A_\gamma + i \sin A_\gamma = +1$, wenn $\gamma$ gerade, und $= -1$, wenn $\gamma$ ungerade; da jedes der Argumente $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots\ldots$ in diesem Falle offenbar $= \pi$ ist; und da, wenn $k_, = 0$, wie wir schon gesehen haben,

$$\mathrm{mod.}\binom{-1}{\gamma} = +1$$

so ergibt sich sofort, dass $\binom{-1}{\gamma} = (-1)^\gamma$ ist.

## II.

Nehmen wir jetzt $k = -1 - n$ an, wo $n$ eine positive Zahl bezeichnet, so wird

$$\mathrm{Mod}\binom{k+k_,i}{\mu} = \frac{{}_0\sqrt{k_1^2+(n+1)^2}\,.\,{}_0\sqrt{k_1^2+(n+2)^2}\ldots {}_0\sqrt{k_1^2+(n+\mu)^2}}{1.\quad 2.\quad .\quad .\quad .\quad \mu}$$

$$= {}_0\sqrt{\left(1+\frac{2.1.n+k_1^2+n^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{2.2.n+k_1^2+n^2}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{2\mu n+k_1^2+n^2}{\mu^2}\right)}$$

mithin offenbar

$$\mathrm{Mod}\binom{-1-n+k_,i}{\mu} > {}_0\sqrt{\left(1+\frac{2n}{1}\right)\left(1+\frac{2n}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{2n}{\gamma}\right)\ldots\left(1+\frac{2n}{\mu}\right)} \quad 86)$$

sein. Nun hat man nach dem ersten Lehrsatz, wenn $\gamma$ eine positive ganze Zahl, die Gleichung:

$$\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^{2n} = 1 + \frac{2n}{\gamma} - \frac{2n\,(1-2n)}{1\,.\,2\,.\,\gamma^2}\,.\left(1 - \frac{2-2n}{3\gamma}\right) - - \ldots$$

Wenn daher $2n$ ein positiver ächter Bruch, so wird immer

$$1 + \frac{2n}{\gamma} > \left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^{2n}$$

Setzen wir nun in dieser Gleichung für $\gamma$ die Zahlen $1, 2, 3, \ldots. \mu$, jedoch immer in der Voraussetzung, dass $2n < 1$, und multipliciren hierauf die so erhaltenen Ausgleichungen mit einander, so gelangen wir zu folgender Relation:

$$\left(1+\frac{2n}{1}\right)\left(1+\frac{2n}{2}\right)\left(1+\frac{2n}{3}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{2n}{\mu}\right) >$$

$$> \left[(1+1)\cdot\frac{2+1}{2}\cdot\frac{3+1}{3}\cdot\frac{4+1}{4}\cdot\ldots\ldots\frac{\mu+1}{\mu}\right]^{2n}$$

$$> (\mu+1)^{2n}$$

Diese Ungleichheit und die 86) geben die volle Gewissheit, dass beim unendlichen Zunehmen von $\mu$, wenn 2n ein positiver ächter Bruch und noch weit mehr, wenn $2n \overline{>} 1$

$$\lim.\bmod.\left(\frac{-1-n+k,i}{\mu}\right) = +\infty \qquad 87)$$

Da überdiess die Gleichung 85) auch für den Fall, da $k = -1 - n$, bewiesen wurde, so ergibt sich hieraus die Wahrheit der dritten Behauptung unsers Lehrsatzes.

Die zweite Behauptung haben wir schon unter II.) im Beweise des ersten Lehrsatzes begründet, und in der Gleichung 8) dargestellt.

---

# Beobachtungen über die gegenwärtig im Mailändischen herrschende Krankheit der Seidenraupe, der Puppe und des Schmetterlings.

Von **H. Frey** und **H. Lebert.**

(Vorgetragen den 17. Nov. 1856.)

Da wir nur nach aus der Lombardei übersendeten Materialien unsere Untersuchungen angestellt haben, konnten wir natürlich weniger die bei den lebenden Insekten eintretenden krankhaften Erscheinungen beobachten, als eine Reihe anatomischer und mikroskopischer Forschungen vornehmen, um uns von dem Wesen und der Verbreitungsart dieser fürchterlichen Seuche, welche bereits der Seidenzucht in verschiedenen Ländern sehr gefährlich geworden ist, einigermassen eine Vorstellung zu machen.

Wir haben eine Reihe mehr äusserlicher Veränderungen einerseits, sowie aber auch anderseits tiefere innerliche Modifikationen und Fremdbildungen in der Säftemasse und in den Organen gesehen.