Anwendung der imaginären Zahl zur Darstellung des Satzes des Parallelogramms, wie des Parallelepipedons der Kräfte.

Von Prof. Dr. Joseph Raabe.

(In der Versammlung der Zürcher. naturforschenden Gesellschaft gelesen, am 21. April 1856.)

---

1. Der Gegenstand meiner gegenwärtigen Mittheilung betrifft die Erläuterung des allerersten Princips der rationellen Mechanik, mittels einer von Gauss im Jahre 1831 aufgestellten Interpretation der imaginären Einheit, wie der auf sie beruhenden Zahlen.

Die reine Mathematik, die seit ihrer Emancipation von der Geometrie, als die Wissenschaft des Zählens aufzufassen ist, geht von einer absoluten, eigenschaftslosen Einheit, als Gegenstand des Zählens, aus und bezeichnet durch „Zahl“ das Ergebniss des Zählens. Erst im weitern Verfolge der verschiedenen Operationen (des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens u. s. w.) mit Zahlen gelangt man in der reinen Mathematik zur Einsicht, dass es verschiedene Arten von Zahlen und der ihnen zu Grunde liegenden Einheiten giebt. Ich erinnere hiezu an positive und negative Zahlen, an ganze und gebrochene Zahlen, wie an endliche und unendlich klein werdende Zahlen, die sämmtlich als Folgen der verschiedenen Elementaroperationen der reinen Mathematik hervorgehen. Es entsprechen allen diesen Zahlen in der Welt der reinen Anschauungen, wie im Raume und in der Zeit, einigen auch, als reine Ge-

gensätze aufgefasst, in der ethischen Welt, ganz unzweideutige oder völlig klare Unterlagen, — wesswegen sie auch reale oder „reelle" Zahlen genannt zu werden pflegen. Im Gegensatze zu diesen sah man die Zahlen an, von welchen ich heute zu sprechen die Ehre habe, die, in Ermangelung eines adäquaten Subtrats im Gebiete der reinen Anschauungen, „imaginäre" oder auch bisweilen vom allzugrossen Eifer verleitet, alles durch die Muttersprache auszudrücken, „unmögliche" (impossibles) Zahlen benannt wurden. Auf solche Zahlen wird man schon beim Ausziehen einer zweiten Wurzel geführt. Wenn nämlich die zweite Wurzel aus der positiven Zahl 9 gezogen werden soll, so findet man bekanntlich sowohl die positive Zahl + 3, wie auch die negative Zahl — 3; denn jede dieser angegebenen zwei Zahlen respektive mit sich multiplicirt, bietet die vorgelegte positive Zahl 9 dar. Hat man hingegen die zweite Wurzel aus der negativen Zahl — 9 zu ziehen, so kommt man allerdings, was die Qualification der gesuchten Zahl betrifft, in einige Verlegenheit, falls auch von der Grösse derselben ganz abgesehen wird. Sie kann nämlich weder zu den positiven noch zu den negativen Zahlen gehören, weil eine jede dieser bezüglich mit sich multiplicirt, nur ein positives, nicht aber ein negatives Resultat (— 9) darbieten kann. Dessen ungeachtet darf die gesuchte Zahl nicht mit „unmöglich" bebeiwortet werden; man müsste denn sonst die negativen, gebrochenen und gar die irrationalen Zahlen, aus ähnlichen Gründen, ebenfalls als unmögliche Zahlen erklären. Wenn z. B. jemand, der keine Idee von der negativen Zahl, als des reinen Gegensatzes der positiven, hat, die Frage: welche Zahl soll zu 7 addirt werden, um die Summe 4 zu geben? zu beantworten hätte; so stehe ich keinen Augenblick an, eine Antwort zu gewärtigen, die dem Sinne nach einerlei mit „Unmöglich“ sein würde. Dass aber die wahre, wissenschaftliche Antwort auf die vorhergehende Frage (— 3) keinerlei Unmöglichkeit implicirt, sondern eine Ihnen, Hochgeehrte Herrn, wohl bekannte, sehr reale, schon dem kaum begonnenen Alter der menschlichen Reife zugängliche Bedeutung hat, erachte ich für unnöthig in dieser Versammlung noch näher zu besprechen.

Ein ähnliches Bewenden hat es auch mit dem oben vorgeführten Fall $\sqrt{-9}$. Die hier verlangte Zahl ist keine unmögliche, aber allerdings auch keine der Zahlen, die man bis zu der Lehre der Wurzelgrössen kennen zu lernen Gelegenheit hatte. Aehnlich wie beim Einführen der negativen, gebrochenen und irrationalen Zahlen führte man in der reinen Mathematik eine neue Art von Einheit, die die „imaginäre“ genannt und seit Gauss durch den Buchstaben i ($=\sqrt{-1}$) bezeichnet wird. Eine Zahl, die auf dieser Einheit ruhet, hat die Eigenschaft, wenn mit sich multiplicirt, ein negatives Produkt darzubieten, das aber der Grösse nach dasselbe ist, was eine gleich grosse reale oder reelle Zahl, ebenfalls mit sich multiplicirt, dargeboten haben würde. So ist $\sqrt{-9} = 3i$, wo $i^2 = -1$ ist. Zahlen dieser Art nennt man, wie schon gesagt, „imaginäre,“ die auch durch „erdachte“ oder „bildliche“ Zahlen übertragen werden dürften.

Dass man in der ersten Zeit nach Einführung dieser Zahlen in die reine Mathematik kein grosses Zutrauen zu den mittelst derselben gewonnenen Ergebnissen hatte, darf uns um so weniger Wunder nehmen, als man in ältern Schriften noch genugsame Spuren des Misstrauens gegen negative Zahlen antrifft. Nicht selten wird nämlich der negative Werth einer Unbekannten eines Problems ein „falscher" Werth genannt. Dass aber ein negativer, ein gebrochener, ein irrationaler, wie auch der gleich berechtigte imaginäre Werth nichts Falsches oder Unmögliches implicirt, ist dem der reinen Mathematik obliegenden Analysten gegenwärtig eine Thatsache. Den letzten Stein des Anstosses aber, auch der imaginären Einheit und Zahl ein adäquates Subtrat im Raume noch anzuweisen, räumte Gauss, wie am Eingange erwähnt worden, in den Göttinger Anzeigen nicht nur einfach weg; sondern er eröffnete zugleich eine, bis anhin nicht geahnte, neue Pforte, den Raum mit wissenschaftlichem Auge zu schauen, wodurch manches bis dahin auf mühsamen Umwegen erkannte Resultat fast als unmittelbare Anschauung sich darbietet. Als Beleg zu dieser Behauptung führe ich die einfache Art an zur Kenntniss der Formeln für $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$ zu gelangen, oder die Art wie man zur Kenntniss der Relationen zwischen Seiten und Winkel eines geschlossenen ebenen Polygons mittels Zuziehung der Gauss'schen Interpretationsweise der imaginären Zahl gelangen kann u. dgl. m.

Mit der gegenwärtigen Mittheilung wird nun der erste Versuch gemacht, die Brauchbarkeit der erwähnten Interpretationsweise auch bei Problemen der Mechanik zu constatiren, wo das Princip des Parallelogramms, wie des Parallelepipedons der Kräfte beinahe zur Anschauung (allerdings nur für das Auge eines Analytikers) gebracht werden wird.

2. Das Wesen dieser Interpretationsweise besteht nun, ohne mich auf deren Begründung hier einzulassen, in Folgendem:

In einem Kreise vom Halbmesser r denke man sich mehrere Radien gezogen, die nur durch die Verschiedenheit ihrer Lagen von einander zu unterscheiden sind. Fixiren wir einen dieser Radien, etwa jenen, dessen Lage für unser Auge als horizontal erscheint, wobei das Centrum links vom Zuschauer angenommen wird, so wird jeder andere Radius, der eine Neigung α gegen den unmittelbar vorher erwähnten eingeht, nach der Gauss'schen Interpretationsweise durch $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r\, e^{\alpha i}$ fixirt, wo i die imaginäre Einheit $(= \sqrt{-1})$ ist. Lässt man α, von Null angefangen, nach und nach (von der rechten gegen die linke Hand über der ursprünglichen horizontalen Lage von r) grösser werden, bis $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird; so geht die obige Formel in $r i$ über, welche die senkrechte Stellung (nach oben) des Radius r gegen seine anfängliche horizontale Lage fixirt. Beim fernern Zunehmen der Neigung α um $\frac{\pi}{2}$ ist der Radius in seiner neuen Lage durch $r i i$, wie auch durch $r(-1)$ darzustellen. Aus der bekannten analytischen Uebereinstimmung dieser beiden Ausdrücke nimmt man ab, dass die gegenwärtige Lage des Radius r der anfänglich angenommenen Lage desselben genau entgegengesetzt ist, welches mit der unmittelbaren geometrischen Anschauung ganz übereinstimmt. Fährt man so fort die Neigung α beständig zunehmend voraus zu setzen, so ist die Lage von r bei $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ durch $r(-1)i = -ri$, und endlich bei $\alpha = 2\pi$ durch

$- rii = + r$ fixirt, welche beide Ergebnisse nach dem Begriffe des Gegensatzes in völliger Uebereinstimmung mit der unmittelbaren Anschauung über den Gang des Radius r stehen.

3. Diese Auffassungsweise der imaginären einfachen und complexen Zahl unterlegen wir, um zunächst das Princip des Parallelogramms der Kräfte festzustellen.

Wir unterlegen zwei durch eine gemeinsame Einheit der Kraft ausgedrückten Kräfte X und Y, die unter einem rechten Winkel zu einander geneigt, auf einen materiellen Punkt zugleich einwirken. Um die Einwirkung dieser beiden Kräfte zu erfahren, d. h. um die Grösse und Richtung einer Kraft kennen zu lernen, die, wenn in gleicher Ebene als die Kräfte X und Y, auf den gleichen materiellen Punkt einwirkend, dasselbe, was die unterlegten Kräfte leisten würde, welche unbekannte eine Kraft die Resultirende genannt zu werden pflegt, schicke ich folgendes allgemein bekannte und höchst einfache Axiom voraus:

„Wenn die Richtungen zweier auf einen materiellen Punkt einwirkenden Kräfte in eine Gerade fallen, so ist die Resultirende der Summe oder dem Unterschiede beider einwirkenden Kräfte gleich, je nachdem die Richtungen dieser zusammenfallen oder einander entgegengesetzt sind.“

Denken wir uns nun durch den materiellen Punkt, der durch m vorgestellt sein mag, zwei zu einander senkrechte Geraden gelegt, welche die Richtungen beider gegebenen Kräfte vorstellen; tragen wir hierauf von m aus in den bezüglichen Richtungen die Grössen der betreffenden Kräfte X und Y auf, wobei wir die Einheit der Kraft durch eine bestimmte Längeneinheit uns ersetzt denken, wodurch die Intensitäten der Kräfte X und Y nunmehr durch bestimmte Linienstücke versinnlicht erscheinen.

Diese zwei Linienstücke X und Y sind wir nach dem Vorausgeschickten in jegliche Richtungslinie, die durch m gelegt werden kann, zu bringen und, in dieser Stellung, auch analytisch zu fixiren in der Lage.

Wenn diese eben gedachte Linie gegen die Linie, in der X liegt, die Neigung α eingeht, so wird sie, falls die Art der Winkel α zu beurtheilen im ganzen Gang der Untersuchung dieselbe verbleibt, die Neigung $3\frac{\pi}{2} + \alpha$ gegen die Linie, in der Y liegt, eingehen. Diese beiden Linien X und Y in jene gedachte gebracht, werden sie bezüglich durch:

$$X(\cos\alpha + i\sin\alpha),\quad Y\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right],$$

die mit folgenden gleichbedeutend sind:

$$X(\cos\alpha + i\sin\alpha),\quad Y(\sin\alpha - i\cos\alpha)$$

zu ersetzen sein.

Diese zwei Ausdrücke können als Kräftengrössen angesehen werden, die auf den materiellen Punkt m mit gleichem Erfolge einwirken, als die ursprünglichen Kräfte X und Y, die unter einem rechten Winkel zu einander geneigt vorausgesetzt sind; jene wirken aber in einer gemeinschaftlichen Geraden, die nämlich um den unbekannten Winkel α gegen die Richtung der Kraft X geneigt ist: daher hat man, wenn R die Grösse der Resultirenden vorstellt, nach dem vorausgeschickten Axiom:

$$R = X(\cos\alpha + i\sin\alpha) \pm Y(\sin\alpha - i\cos\alpha). \quad (1)$$

welche Gleichung wegen der imaginären Einheit i in folgende zwei zerfällt:

$$\left.\begin{aligned} R &= X \cos \alpha \pm Y \sin \alpha, \\ o &= X \sin \alpha \mp Y \cos \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Man findet hieraus sehr leicht:

$$R^2 = X^2 + Y^2, \qquad (3)$$

aus der wir zunächst entnehmen, dass die Grösse der Resultirenden dieselbe verbleibt, ob man sich für das eine oder andere der Doppelzeichen in Gleichung (1) erklärt. Ferner findet man aus den Gleichungen (2):

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{Y}{R}, \qquad (4)$$

woraus auch die Grösse des Neigungswinkels α unabhängig von dem Doppelzeichen erscheint.

Sonach folgern wir, dass man in der Gleichung (1), wie in denen aus derselben gefolgerten (2) entweder das obere oder das untere Zeichen allein anzunehmen berechtiget ist, wenn man nur unter dem Neigungswinkel α, dessen Grösse jede der Gleichungen (4) vollkommen bestimmt, eine positive oder negative versteht, worüber auch jedesmal aus der Beschaffenheit der Stellungen der Kräfte X und Y ohne Mühe zu entscheiden sein wird.

Die hier aus (1) gezogenen Ergebnisse, entweder die in (2) oder die in (3) und (4), geben das Princip des Parallelogramms der Kräfte ab.

4. Denken wir uns nun drei zu einander senkrecht stehende Ebenen, in deren gemeinschaftlichem Schnittpunkte ein materieller Punkt m sich befindet. Auf diesen wirken drei Kräfte ein, die bezüglich in den drei Durchschnittslinien der erwähnten drei Ebenen liegen und deren Grössen oder Intensitäten durch eine

gemeinsame Einheit der Kraft gemessen, bezüglich durch X, Y, Z vorgestellt sein mögen.

Sehen wir für einen Augenblick von dem Dasein der Kraft Z ab, stellen die Resultirende der beiden noch übrigen Kräfte durch R′ und ihre Neigung (im positiven oder negativen Sinn) gegen die Ricktung der Kraft x durh α dar, so haben wir nach dem Vorausgeschickten:

$$R' = X \cos\alpha + Y \sin\alpha,$$
$$o = X \sin\alpha - Y \cos\alpha.$$

Zu dieser Kraft R′ komme noch die Kraft Z hinzu, deren Richtungen gleichfalls zu einander senkrecht stehen, so wird die neue Resultirende in die Ebene fallen, in der R′ und Z liegen; stellt man ihre Grösse durch R und ihre Neigung gegen R′ durch β dar: so wird man, wenn β ebenfalls positiv oder negativ gedacht wird, analog der Gleichung (1) vorangehender Nr. folgende haben:

$$R = R' (\cos\beta + i \sin\beta) + Z (\sin\beta - i \cos\beta),$$

welche Gleichung wegen der imaginären Einheit i in folgende zerfällt:

$$R = R' \cos\beta + Z \sin\beta,$$
$$O = R' \sin\beta - Z \cos\beta.$$

Ersetzt man hier R′ gemäss der erstern der obigen zwei Gleichungen, so hat man mit Zuziehung der zweiten obiger Gleichungen die folgenden drei Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} R &= X \cos\alpha \cos\beta + Y \sin\alpha \cos\beta + Z \sin\beta, \\ O &= X \cos\alpha \sin\beta + Y \sin\alpha \sin\beta - Z \cos\beta, \\ O &= X \sin\alpha - Y \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Aus diesen zieht man die Werthe von R wie von α und β als Functionen von X, Y, Z, d. h. drei unter gegenseitigen rechtwinkligen Neigungen zu einander stehenden Kräfte, die auf einen materiellen Punkt einwirken, sind jedesmal durch eine Kraft der Lage und Grösse nach zu ersetzen möglich.

Man findet aus den obigen drei Gleichungen sehr bald folgende:

$$X = R \cos\alpha \cos\beta,\ Y = R \sin\alpha \cos\beta,\ Z = R \sin\beta, \quad (6)$$

aus denen sehr bald

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (7)$$

gezogen wird, die vereint mit den vorhergehenden vollständige Aufklärung über Grösse und Richtung der Resultirenden darbieten.

Aus Gründen der Geometrie kann man die Gleichungen in (6) auch durch folgende ersetzen:

$$X = R \cos a,\ Y = R \cos b,\ Z = R \cos c, \quad (8)$$

wo man

$$\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1$$

hat, und wo a, b, c die Neigungen der Resultirenden R gegen die Richtungen der drei einwirkenden Kräfte X, Y, Z bezüglich vorstellen.

Die Gleichung (7) vereint mit denen (8) stellen das Princip des Parallelepipedons der Kräfte dar. Mittelst dieser Gleichungen kann man erstens aus drei unter rechten Winkeln zu einander geneigten Kräften die Grösse und Richtung ihrer Resultirenden als zusammenfallend mit der Diagonale des aus den drei unter rechten Winkeln zu einander geneigten Geraden X, Y, Z construirten Parallelepipedons erkennen; umgekehrt erkennt man auch aus diesen Gleichungen (7) und (8), dass man je eine, auf einen materiellen Punkt einwirkende Kraft durch drei andere ersetzen kann, die zu einander rechtwinklig geneigt sind.