Ueber

die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren,

insbesondere

über einen neuen Planimeter.

Von Jakob Amsler.

(Schluss.)

Der Integrator.

18.

Diese Bezeichnung scheint mir für ein Instrument zu passen, welches die Werthe der Integrale

$$J = \int y dx, \quad S = \frac{1}{2}\int y^2 dx, \quad T = \frac{1}{3}\int y^3 dx$$

bezogen auf den Umfang einer beliebigen ebenen Figur und auf ein beliebiges Coordinatensystem, durch blosses Umfahren angiebt. Der Integrator bestimmt also den Flächeninhalt, das statische Moment und das Trägheitsmoment einer ebenen Figur, letztere beiden auf eine beliebig gerichtete Axe bezogen.

Die Berechnung der Sicherheit mancher Bau- und Maschinenconstructionen verlangt die gleichzeitige Kenntniss der genannten drei Werthe für gewisse Querschnittsflächen. Soll z. B. die relative Festigkeit eines prismatischen oder cylindrischen Stabes berechnet werden, so muss man folgende geometrische Data kennen:

1) Die Lage der sogenannten neutralen Faser; zu ihrer Bestimmung muss man den Inhalt einer Querschnittsfläche kennen, sowie deren statisches Moment bezüglich auf eine Axe M von gegebener Richtung.

2) Das Trägheitsmoment dieser Querschnittsfläche bezüglich auf eine Axe, welche durch die neutrale Faser geht und der Axe M parallel ist.

Hiezu genügt, ausser den in 1) genannten Stücken, die Kenntniss des Trägheitsmoments bezüglich auf die Axe M oder eine dazu parallele Linie.

Gewöhnlich wendet man in der Construction solche Formen an, wofür alle diese Werthe zum Voraus bekannt sind. Indessen giebt es doch manche Fälle, wo die Untersuchung neuer Formen wünschbar wäre; allein weil die Berechnung der Grössen J, S, T zu viel Mühe macht, so suchen die Practiker sie möglichst zu umgehen.

Der Integrator kann so eingerichtet werden, dass er die genannten drei Werthe einzeln oder gleichzeitig giebt. Ersteres möchte vorzuziehen sein, weil fast immer auch J und S verlangt werden, wenn es sich um T handelt. Ausserdem kann es vorkommen, dass das Instrument nicht auf eine gewünschte Axe M′, sondern nur auf eine in der Entfernung b dazu parallel gezogene Axe M eingestellt werden kann. Dann muss das auf die Linie M′ bezügliche Trägheitsmoment T′ bekanntlich mittelst der Formel

$$T' = T \pm 2\,b\,S + b^2\,J$$

berechnet werden.

Der Integrator beruht auf folgenden Betrachtungen: Sei α ein beliebiger Winkel, so ist [1])

[1]) Die allgemeinen Formeln

$$(-1)^n\, 2^{2n} \sin^{(2n+1)} \alpha = \sin (2\,n + 1)\, \alpha - \frac{2\,n+1}{1} \sin (2n - 1)\alpha + \ldots$$

$$(-1)^n\, 2^{2n-1} \sin^{2n} \alpha = \cos 2\,n\,\alpha - \frac{2\,n}{1} \cos (2\,n - 2)\, \alpha + \ldots.$$

können zu einer Erweiterung der nachfolgenden Resultate dienen.

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$
$$4 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - \sin 3\alpha$$

Bezeichnet r die Länge einer constanten Geraden C F, deren eine Endpunkt F eine Curve Z umschreibt, während der andere Endpunkt C sich auf einer Geraden X, etwa der Abscissenaxe, bewegt, und seien x, y die Coordinaten des Punktes F, α der Winkel, den r mit der Axe X bildet, so ist

$$y = r \sin \alpha$$

also
$$2 y^2 = r^2 - r^2 \cos^2 \alpha$$
$$4 y^3 = 2 r^2 y - r^3 \sin 3\alpha$$

wie aus den oben angeschriebenen Formeln folgt, und daher

$$J = \int y\, dx = r \int \sin.\alpha\, dx$$
$$S = \frac{1}{2} \int y^2\, dx = \frac{r^2}{4} \int dx - \frac{r^2}{4} \int \cos 2\alpha\, dx$$
$$T = \frac{1}{3} \int y^3\, dx = \frac{r^2}{4} \int y\, dx - \frac{r^3}{12} \int \sin 3\alpha\, dx$$

Die Integration erstreckt sich über den ganzen Umfang der Curve Z. Offenbar ist

$$\int dx = 0$$

also
$$J = r \int \sin \alpha\, dx$$
$$S = -\frac{r^2}{4} \int \sin (2\alpha - 90)\, dx$$
$$T = \frac{r^2}{4} J - \frac{r^3}{12} \int \sin 3\alpha\, dx$$

Man denke sich nun mit der beweglichen Geraden F C drei auf der Ebene der Zeichnung laufende Rollen verbunden, deren Axen mit der Geraden X resp. die Winkel α, $(2\alpha - 90)$ und 3α bilden, und bezeichne durch u, u_1, u_2 die Bogen, welche die Rollen abwickeln, während der Punkt F die Curve Z umschreibt, so ist

$$u = \int \sin \alpha\, dx$$
$$u_1 = \int \sin (2\alpha - 90)\, dx$$
$$u_2 = \int \sin 3\alpha\, dx$$

20.

Denselben Dienst leistet folgende Einrichtung: Ein Wagen führt die horizontale Scheibe V (Fig. 26) längs der Geraden X. Ein mit der Scheibe festverbundener Arm C F trägt bei F einen Fahrstift. — Gegen den Rand der Scheibe V werden die Rollen V_1, V_2 angedrückt, deren Zapfenlager mit dem Wagen zusammenhängen. Wird die Scheibe V gedreht, so setzt sie, bloss vermöge der Reibung, oder mittelst Verzahnung oder eines umgeschlungenen Drahtes die Scheiben V_1, V_2 in Drehung. Der Durchmesser der Scheibe V ist doppelt so gross, als der Durchmesser der Scheibe V_1 und dreimal so gross als der Durchmesser der Scheibe V_2. Dreht sich also die Scheibe V um einen Winkel α, so dreht sich V_1 um $2\,\alpha$ und V_2 um $3\,\alpha$. Mit jeder der Scheiben V, V_1, V_2 ist eine verticale, auf der Zeichnungsebene laufende Rolle D, D_1, D_2 verbunden, und zwar so, dass die Axen von D und D_1 parallel zu X, die Axe von D_1 senkrecht dazu steht, wenn die von F nach dem Mittelpunkt C der Scheibe V gezogene Gerade in die Richtung von X gebracht wird.

Es ist übrigens klar, dass man nur das Verhältniss der Durchmesser der Scheiben V, V_1 und V_2 abändern dürfte, um den beschriebenen Apparat zur mechanischen Bestimmung der Integralien

$$\int \cos n\,\alpha\, d\,x \qquad \int \sin n\,\alpha\, d\,x$$

anwenden zu können, in welchen n ganz oder gebrochen sein kann.

Principiell noch einfacher, aber praktisch schwer ausführbar, könnte man zur Berechnung des Integrals

$$\int y^n\, d\,x = r^n \int \sin^n\,\alpha\, d\,x$$

n übereinander gesetzte Rollen benutzen, deren Axen mit der Geraden X abwechselnd die Winkel α und 90° bilden.

21.

Dass die entwickelten Principien benutzt werden können, um Rechenmaschinen zu verschiedenartigen Zwecken zu construiren, leuchtet wohl von selbst ein. Hier soll nur noch eine Anwendung angedeutet werden.

In neuester Zeit sind meteorologische Beobachtungen jeder Art in so enormer Anzahl publizirt und in noch grösserer Menge angestellt worden, dass eine umfassende und tiefergehende Bearbeitung derselben ohne Anwendung ganz besonderer Hülfsmittel kaum mehr denkbar ist. Die Anwendung selbstregistrirender Instrumente, welche die Beobachtungen graphisch darstellen, wird auf den meteorologischen Stationen immer häufiger. Dass man das Planimeter anwenden kann, um aus solchen graphischen Darstellungen Mittelwerthe zu bestimmen, ist von verschiedenen Seiten bemerkt worden [1]) Diese Mittelwerthe sind aber nur eine dürftige Frucht der meteorologischen Beobachtungen, und diese müssen noch nach ganz andern Richtungen hin combinirt werden. Ein wesentlicher Schritt, den man in diesem Sinne weiter ging, ist die Darstellung meteorologischer Veränderungen durch periodische Reihen von der Form

$$\begin{aligned} f(t) = A_0 + A_1 \cos \mu t + A_2 \cos 2 \mu t + \dots \\ + B_1 \sin \mu t + B_2 \sin 2 \mu t + \dots \end{aligned}$$

---

[1]) Mittel aus numerisch gegebenen Werthen oder aus zerstreuten graphischen Angaben (wie z. B. Mittel für den nämlichen Jahrestag) kann man mit Hülfe einer sehr einfach montirten getheilten Laufrolle bestimmen.

wo μ, A, B Constanten, t die Zeit bezeichnen. Die Coefficienten A, B, ... findet man durch Rechnungen, deren Complication rasch mit der Anzahl der berücksichtigten Glieder zunimmt, und man begnügt sich daher in der Regel mit 5 bis 7 Gliedern. — Hieraus entspringt aber der Uebelstand, dass einzelne Abweichungen einen sehr bedeutenden Einfluss auf den Werth der ersten Glieder ausüben, während bei weiter gehender Rechnung erst spätere Glieder davon berührt werden können. Diesem könnte man begegnen durch Anwendung eines Instrumentes, mit Hülfe dessen sich die bezeichneten Coefficienten mechanisch aus den graphischen Darstellungen der periodischen Erscheinungen ableiten lassen. Zugleich wäre damit die Möglichkeit gegeben, die analytische Behandlung in weit ausgedehnterem Masse anwenden zu können. Die Idee zu einem solchen Instrumente soll hier angegeben werden.

Sei $y = f(t)$ die durch eine Reihe von der oben angeschriebenen Form zwischen $t = -T$ und $t = +T$ darzustellende Function, so bestimmen sich die Coefficienten A und B bekanntlich durch die Formeln

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t) \cos\left(\frac{n \pi t}{T}\right) dt$$

$$B_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t) \sin\left(\frac{n \pi t}{T}\right) dt$$

$$A_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, dt$$

Setzt man $\mu = \frac{\pi}{T}$, $y = 2r \sin \alpha$ (wo r constant sei), so wird

$$\begin{aligned} f(t)\cos n\mu t &= 2r \sin\alpha \cos n\mu t \\ &= r\,[\sin(n\mu t+\alpha) - \sin(n\mu t-\alpha)] \\ f(t)\sin n\mu t &= 2r \sin\alpha \sin n\mu t \\ &= -r\,[\cos(n\mu t+\alpha) - \cos(n\mu t-\alpha)] \end{aligned}$$

folglich, wenn man zur Abkürzung setzt

$$M_n = \int_{-T}^{T} \sin(n\mu t+\alpha)\,dt,\quad M'_n = \int_{-T}^{T} \sin(n\mu t-\alpha)\,dt$$

$$N_n = \int_{-T}^{T} \cos(n\mu t+\alpha)\,dt,\quad N'_n = \int_{-T}^{T} \cos(n\mu t-\alpha)\,dt$$

so erhält man

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{r}{T}(M_n - M'_n) \\ B_n &= -\frac{r}{T}(N_n - N'_n) \\ A_0 &= \frac{r}{T} M_0 \end{aligned}$$

Eine Vorrichtung zur Berechnung der Grössen M und N ist in Fig. 27 und Fig. 27_a dargestellt, jedoch ohne alle Rücksicht auf die practische Ausführung; diese ist indessen mit keinen besondern Schwierigkeiten verknüpft.

Fig. 27 zeigt das Instrument im Grundriss; Fig. 27_a stellt einen verticalen Durchschnitt längs der Geraden C G dar.

Der Wagen W, dessen Räder in einer geraden Nuth laufen, trägt den Lineal F′ H, der durch die Laufrollen m m in einer zur Nuth senkrechten Stellung gehalten wird. Bei F′ trägt der Lineal einen Fahrstift. C bezeichnet die Mitte einer verticalen Axe, welche durch den Arm n mit dem Wagen W zusammenhängt. Um diese Axe drehen sich 1) ein verticaler Kegel K, 2) die unter dem Kegel liegende Rolle L und 3) der zwischen Kegel und Rolle hindurchgehende Lineal a.

Der Lineal a trägt die auf einer gemeinsamen Axe festsitzenden Rollen P und P′. Um das ausgekerbte Basisende des Kegels und die Rolle P ist eine Schnur ohne Ende geschlungen; ebenso um die Rollen L und P′. Die Durchmesser der Kegelbasis und der Rollen sind so gewählt, dass einer Umdrehung des Kegels zwei Umdrehungen der Rolle L entsprechen, wenn der Lineal a während der Drehung eine feste Richtung behält.

Dreht sich der Lineal a um einen Winkel α von rechts nach links, während der Kegel stehen bleibt, so dreht sich daher die Rolle um einen Winkel α von links nach rechts.

Mit der Rolle L sind die beiden auf der Zeichnungsebene laufenden Rollen D und D′ verbunden, deren Axen einen Winkel von 90° mit einander bilden.

Ein horizontaler, zur Nuth X′ paralleler Lineal Q kann so gestellt werden, dass er in beliebiger Höhe den Kegel berührt. Wird der Wagen längs seiner Bahn geführt, so dreht sich der Kegel vermöge der Reibung gegen den Lineal Q, setzt also mittelst der Schnur s die Rollen P und P′ und dadurch die Rolle L in Drehung.

Sei t der Weg, den der Punkt C von einem beliebigen Anfangspunkt O aus von links nach rechts zurückgelegt hat, so kann die von der Rolle L bei einer bestimmten Stellung des Lineals Q ausgeführte Drehung durch μt bezeichnet werden, wo μ eine gewisse Constante bezeichnet. Die constante Entfernung der Kegelspitze vom Berührungspunkt des Lineals Q sei hiebei $= h$, so ist klar, dass der Entfernung $\frac{h}{n}$ unter sonst gleichen Umständen eine Drehung der Rolle L um den Winkel $n\mu t$ entsprechen wird.

Hiebei wurde angenommen, dass der Lineal a eine constante Richtung behalte. Dreht er sich dagegen gleichzeitig um einen Winkel α (von rechts nach links), so wird dadurch die Rolle L um einen gleichen Winkel im entgegengesetzten Sinne gedreht, so dass also die Gesammtdrehung

$$n\mu t + \alpha$$

ist.

Der Lineal a ist mit dem Arme b des Lineals F' H durch den Lineal F G verbunden mittelst verticaler Axen F und G. Die Dimensionen der einzelnen Theile sind so gewählt, dass

$$F\,G = G\,C \text{ und } F\,C \parallel F'\,H$$

ist. Setzt man also $C\,G = r$, $\angle F\,G\,C = 2\,\alpha$, $F\,C = y$ so wird

$$y = 2r \sin \alpha$$

Wir nehmen nun die vom Punkte C durchlaufene Gerade X als Abscissenaxe und irgend einen Punkt O auf derselben als Anfangspunkt an und setzen voraus, der Apparat sei so eingestellt, dass die Axe der Rolle D parallel zu X sei, wenn C sich im Punkte O befindet, und zugleich $\alpha = o$ ist. Alsdann ist klar, dass wenn die Axe F auf einen Punkt geführt wird, dessen Ordinate $= y = 2r \sin \alpha$ und dessen Abscisse $= t$ ist, dass dann die Rollenaxe mit der Geraden X einen Winkel $(n\mu t + \alpha)$ bildet. Wird nun der Punkt F um ein Stück dt in der Richtung der Abscissenaxe und zugleich um ein Stück dy senkrecht dazu verschoben, so wickelt die Rolle D in Folge der ersten Bewegung einen Bogen $ab = \sin(n\mu t + \alpha)\,dt$ (vergleiche N° 5); und in Folge der zweiten Bewegung einen gewissen Bogen ds, welcher proportional mit der Veränderung von α ist. Der ganze abgewickelte Bogen ist daher

$$du_n = \sin(n\mu t + \alpha)\,dt + ds$$

Beschreibt der Punkt F ein Curvenstück P Q, dessen Endabscissen — T und + T sind, und sei u der von der Rolle D hiebei abgewickelte Bogen, so ist also

$$u_n = \int_{-T}^{T} \sin n\mu t = \alpha)\,dt + \int_{-T}^{T} ds$$

Das letzte Integral verschwindet offenbar, wenn die Endordinaten einander gleich sind. Am zweckmässigsten ist es, diese Ordinaten $RP' = SQ' = 2r$ zu machen (Fig. 28). Man bringe also den Punkt F auf den Punkt P' und notire den Stand der Rolle D; sodann verfolge man die Ordinate P' R bis P und gehe von P längs der Curve nach Q über; endlich führe man den Punkt F auf der Ordinate S Q nach Q'. Dann ist

$$u_n = \int_{-T}^{T} \sin(n\mu t + \alpha)\,dt$$

Geht man mit dem Punkte F von Q' nach Q zurück, so aber, dass der Lineal F' G in die Lage Q G' kommt, und verfolgt dann die Curve Q P bis P, und von da an die Ordinate R P bis P', so wickelt die Rolle D einen Bogen u' ab, der durch die Gleichung

$$u'_n = \int_{T}^{-T} \sin(n\mu t - \alpha)\,dt$$

$$= -\int_{-T}^{+T} \sin(n\mu t - \alpha)\,dt$$

ausgedrückt wird. Der ganze auf dem Hin- und Rückweg abgewickelte Bogen, also $u_n + u'_n$ werde durch U_n bezeichnet, so ist daher

$$U_n = \int_{-T}^{T} \sin(n\mu t + \alpha)\,dt - \int_{-T}^{T} \sin(n\mu t - \alpha)\,dt$$

Den von der Rolle D′ gleichzeitig abgewickelten Bogen U'_n findet man ebenso =

$$U'_n = -\int_{-T}^{T} \cos(n\mu t + \alpha)\, dt + \int_{-T}^{T} \cos(n\mu t - \alpha)\, dt$$

Diese Werthe in die Ausdrücke für A und B eingesetzt geben

$$A_n = \frac{r}{T} U_n$$

$$B_n = \frac{r}{T} U'_n$$

$$A_0 = \frac{r}{T} u_0$$

Statt mit dem Punkte F kann man mit dem Punkte F′ die Curve PQ verfolgen, da beide Punkte offenbar congruente Curven beschreiben. — Ausserdem ist nicht nöthig, dass die Gerade X mit der Abscissenaxe der Curve zusammenfalle, sondern es genügt, dass sie derselben parallel ist. Einzig auf den Werth des Coefficienten A_0 hat die Lage der Geraden X einen Einfluss. Sei nämlich ϱ die Strecke, um welche der Fahrstift F′ der Abscissenaxe näher liegt, als im Vorangehenden vom Punkte F angenommen wurde, so ist der wahre Werth von A_0 um $2r\varrho$ grösser, als ihn das Instrument unter Anwendung der angeschriebenen Formel angiebt.

Endlich ist auch nicht nöthig, dass der Punkt O die Mitte der Geraden R S einnimmt; wenn nur $\mu = \frac{\pi}{T}$ ist. — Der Beweis dieser Behauptungen ergiebt sich leicht aus der Betrachtung der für die Grössen A und B angeschriebenen Integralausdrücke.

Oppikofer's Planimeter.

22.

Wie schon in der Einleitung bemerkt, gebührt das Hauptverdienst um die Erfindung der umschreibenden Planimeter dem Ingenieur Oppikofer aus Untereppikon im Kanton Thurgau, indem die eigenthümliche Anwendung eines theils rollenden, theils gleitenden Laufrädchens von ihm ausging. Die von Mechaniker Ernst in Paris am Oppikofer'schen Planimeter angebrachten Verbesserungen sind so unwesentlich, dass man denselben in Frankreich mit Unrecht den Ernst'schen Planimeter genannt hat. — Der Wetli'sche, wie der Polarplanimeter und wohl alle Instrumente ähnlicher Art, sind als nothwendige Folgen der Oppikofer'schen Erfindung zu bezeichnen.

Eine genaue Abbildung und Beschreibung dieses Planimeters findet sich im *Bulletin de la soc. d'encouragement* vom Jahr 1841, welche in *Dinglers polyt. Journal* Bd. 86 überging. Eine etwas hievon abweichende Skizze zeigt Fig. 16.

Die Rollen n n eines Wagens W laufen in einer geraden Nuth X. Die Stelle einer dritten Rolle versieht das Basisende des Kegels K, der um seine Axe zwischen Spitzen drehbar ist. Die Kegelaxe liegt in einer zur Nuth senkrechten Verticalebene und ist so geneigt, dass die obere Seite des Kegels horizontal liegt. Der Lineal HF wird durch Leitrollen in einer horizontalen und zur Richtung der Nuth senkrechten Stellung erhalten. Bei F trägt er einen Fahrstift, in der Mitte den Rahmen einer auf dem Kegel aufsitzenden Rolle D, deren Axe mit der Kegelaxe in der nämlichen Verticalebene liegt.

Umschreibt der Stift F eine geschlossene Figur, so führt die Rolle D eine doppelte Bewegung aus, nämlich sie gleitet in der Richtung ihrer Axe während einer Verschiebung des Lineals FH, und dreht sich während einer Verschiebung des Wagens W. Der ganze hiebei von der Rolle D abgewickelte Bogen ist dem Inhalt der umfahrnen Fläche proportional.

Der strenge Beweis dieses Satzes beruht auf folgenden Voraussetzungen und Betrachtungen:

a) Wird der Fahrstift in einer zur Nuth X senkrechten Richtung bewegt, so dreht sich die Rolle D nicht.

b) Befindet sich der Berührungspunkt des Kegels und der Rolle D um eine Längeneinheit von der Kegelspitze entfernt, während der Wagen einen Weg von einer Längeneinheit durchläuft, so wickelt die Rolle D einen gewissen Bogen λ ab. Beträgt jene Entfernung y Einheiten, so ist auch der abgewickelte Bogen y mal so gross, also $= \lambda y$. Einer Verschiebung des Wagens um h Einheiten wird unter denselben Umständen eine h fache Drehung der Rolle, also ein abgewickelter Bogen $= \lambda yh$ entsprechen.

c) Wird der Wagen fortgeschoben, während die Rolle D die Kegelspitze berührt, so beschreibt der Fahrstift eine zur Nuth X parallele Gerade, welche wir als Abscissenaxe annehmen wollen. Wird der Fahrstift von dieser Linie um y entfernt, so entfernt sich der Berührungspunkt der Rolle gleichfalls um y von der Kegelspitze. Legt der Stift F einen Weg h parallel zur Abscissenaxe zurück, so durchläuft der Wagen eine gleiche Strecke. Ist im letztern Fall y die Entfernung des Fahrstifts von der Abscissenaxe, so wickelt (nach b) die Rolle den Bogen λyh ab.

d) In Fig. 17 bezeichnen PR, P_1R_1 die Gränzordinaten eines beliebigen Bogens PP_1, dessen Ordinaten von P nach P_1 hin beständig zunehmen; die Geraden PQ_1 und PQ seien parallel der in c) bezeichneten Abscissenaxe RR_1. Durchläuft der Fahrstift F nach der Reihe den Bogen PP_1, die Geraden QP_1 und PQ_1, so ist im ersten Fall die Abwicklung der Rolle D kleiner als im zweiten, aber grösser als im dritten Fall.

e) Es sei PP_n (Fig. 17) ein Bogen, dessen Ordinaten von P nach P_n hin beständig zunehmen. Man denke sich das von dem Bogen, seinen Endordinaten PR und P_nR_n und der Abscissenaxe begränzte Flächenstück durch die Ordinaten P_1R_1, P_2R_2 ... in n Streifen von gleicher Breite h zerlegt. — Durch $v_1, v_2, \ldots v_n$ bezeichne man die Bogen, welche die Rolle D abwickelt, während der Fahrstift successive die Bogenstücke PP_1, P_1P_2, ... $P_{n-1}P_n$ durchläuft; durch u den ganzen abgewickelten Bogen

$$= v_1 + v_2 + \ldots + v_n;$$

ausserdem setze man

$$y_0 = PR, \quad y_1 = P_1R_1, \quad \ldots \quad y_n = P_nR_n$$

so ist, zufolge d)

$$\lambda y_0 h < v_1 < \lambda y_1 h$$
$$\lambda y_1 h < v_2 < \lambda y_2 h$$
$$\cdots\cdots$$
$$\lambda y_{n-1} h < v_n < \lambda y_n h$$

woraus durch Addition folgt

$$\lambda(y_0h + y_1h + \ldots + y_{n-1}h) < u < \lambda(y_1h + y_2h + \ldots + y_nh) \quad (\alpha)$$

Bezeichnet J den Flächeninhalt der Figur PP_nR_nR, so ist offenbar

$$y_0h + y_1h + \ldots + y_{n-1}h < J < y_1h + y_2h + \ldots + y_nh \quad (\beta)$$

Die beiden vorstehenden Summen unterscheiden sich nur um $(y_n - y_0)$ h von einander. Dieser Unterschied wird aber um so kleiner, je grösser n, also je kleiner h angenommen wird; für unendlich grosses n geht daher jede der beiden Summen in das beständig zwischen ihnen enthaltene J über. Also liegt (in Gleichung α) die Grösse u zwischen zwei Ausdrücken, deren jeder für unendlich grosses n in λ J übergeht; folglich ist

$$u = \lambda J \qquad (\gamma)$$

f) Eben dieses gilt, wenn die Ordinaten des Bogens PP_n von P nach P_n hin beständig a b- statt zunehmen, was auf ganz ähnliche Weise gezeigt wird.

g) Nimmt die Ordinate eines vom Fahrstift F durchlaufenen Bogens PP_4 (Fig. 13) abwechselnd bald zu, bald ab, so gilt die Gleichung (γ) gleichfalls noch; man darf zum Beweise nur den Bogen in Stücke PP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 zerlegen, welche die in e) oder f) gemachten Voraussetzungen einzeln erfüllen.

h) Das nämliche Resultat findet man, wenn der Fahrstift einen Bogen in entgegengesetzter Richtung durchläuft; nur dreht sich dann die Rolle D gleichfalls im entgegengesetzten Sinne.

Diese Resultate können in folgenden Satz zusammengefasst werden:

„Der von der Rolle D abgewickelte Bogen u misst die von der Ordinate des Punktes F durchlaufene Fläche. Diese Fläche, so wie die entsprechende Abwicklung u, nimmt zu, wenn die Ordinate sich in der Richtung der positiven Abscissenaxe bewegt; im entgegengesetzten Falle nehmen beide Grössen ab.“

Hieraus folgt aber sofort, dass man beim Umfahren einer geschlossenen Curve die davon begränzte Fläche erhält.

Dieses Endresultat behält auch dann noch seine Gültigkeit, wenn die Axe des Kegels K eine beliebige Richtung hat, und nicht in einer zu FH parallelen Verticalebene liegt. Nur müssen dann die Axen der Rolle D und des sie tragenden Rahmens parallel zur Kegelaxe sein. — In diesem Fall macht freilich, wenn der Lineal FH nach seiner Längenrichtung verschoben wird, die Rolle D nicht bloss eine gleitende, sondern auch eine drehende Bewegung; allein diese hebt sich beim Umfahren einer geschlossenen Figur auf.

Wetli's Planimeter.

23.

Die erste Beschreibung und Theorie dieses Instrumentes veröffentlichte Stampfer[1]). — Die von Hansen angebrachten Abänderungen und Verbesserungen beschrieb Bauernfeind.[2])

Der einzig wesentliche und wichtige Unterschied zwischen Wetli's und Oppikofer's Planimeter besteht in der Vertauschung des Kegels K mit einer horizontalen Scheibe. In Fig. 19 ist die Einrichtung des Wetli'schen Instrumentes angedeutet.

In den geraden Nuthen einer horizontalen Fuss-

---

1) Sitzungsbericht der k. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien v. 1850, abgedruckt in Dingler's polyt. Journal Bd. 116.

2) Zeitschrift des polyt. Vereins für Bayern von 1853; die Bauernfeind'sche Abhandlung wurde besonders abgedruckt unter dem Titel: Die Planimeter von Ernst, Wetli und Hansen, & C. München 1853.

platte laufen die drei Räder n eines Wagens, der eine horizontale, leicht um ihre Axe drehbare Scheibe K trägt. Der Wagen wird mittelst des Lineals F H geführt, welcher durch vier Leitrollen in einer zur Richtung der Bahn senkrechten Stellung erhalten wird. Am einen Ende ist ein Fahrstift F angebracht. Längs des Lineals ist ein Metalldraht ausgespannt und um eine unterhalb der Scheibe K auf deren Axe sitzende Rolle L geschlungen. Auf der Scheibe liegt die Laufrolle D, deren Axe parallel zur Wagenbahn in einem horizontalen Rahmen spielt, welcher durch die Ständer bb mit der Fussplatte zusammenhängt. — Die Drehungsaxen der Scheibe K und der Rolle D treffen verlängert in einem Punkte zusammen.

Umschreibt der Fahrstift F eine geschlossene Figur, so misst der von der Rolle D abgewickelte Bogen die umfahrne Fläche.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf denselben Voraussetzungen und kann genau ebenso geführt werden, wie beim Oppikofer'schen Planimeter. Nämlich, wird der Stift F in der Richtung der Wagenbahn geführt, so gleitet die Rolle D längs eines Durchmessers der Scheibe K, ohne dass eine Drehung stattfindet. Wird dagegen der Fahrstift in der Richtung des Lineals FH verschoben, so dreht sich die Scheibe K, und vermöge der Reibung die auf ihr liegende Rolle D. Gesetzt, die Rolle D wickle den Bogen λ ab, wenn F in der Richtung des Lineals um eine Strecke $= 1$ verschoben wird, während die Entfernung des Scheibenmittelpunktes vom Berührungspunkt der Rolle ebenfalls $= 1$ ist; so wird offenbar der abgewickelte Bogen $= \lambda y h$ sein, wenn F in der Richtung des Lineals eine Strecke h zurücklegt, während der Scheibenmittelpunkt sich in der Entfernung y vom Berührungspunkt der Rolle befindet. — Hieran lassen sich genau dieselben Betrachtungen anschliessen, wie oben für das Oppikofer'sche Instrument, indem man als Abscissenaxe eine zum Lineal F H parallele Gerade annimmt, welche durch die Spitze des Fahrstifts hindurch geht, wenn die Rolle D den Mittelpunkt der Scheibe K berührt. Der einzige Unterschied ist, dass y hier auch negativ werden kann.

Einzelne bei der Beschreibung des Instrumentes gemachte Voraussetzungen sind unwesentlich (wie schon Stampfer bemerkte). Es darf nämlich

1) der Lineal FH einen schiefen Winkel mit der Richtung der Wagenbahn bilden. Die Beweisführung bleibt die nämliche; nur muss dieser schiefe Winkel als Coordinatenwinkel gewählt werden.

2) die Axe der Rolle D braucht nicht parallel mit der Bahnrichtung zu sein, und

3) die Scheibenaxe und Rollenaxe brauchen verlängert sich nicht zu schneiden.

Um die beiden letzten Behauptungen zu beweisen, nehme man an, es sei in Figur 18 C der Scheibenmittelpunkt, AD die Projection der Rollenaxe auf die Scheibe, D der Berührungspunkt der Laufrolle. A C bezeichne die Richtung der Wagenbahn, die mit A D den constanten Winkel φ, mit der Geraden C D den veränderlichen Winkel ψ bilde. Ferner sei ω der Bogen, den der Punkt D auf der Scheibe beschreibt, wenn dieselbe sich um einen Winkel α dreht, und v die entsprechende Abwicklung der Rolle.

Wie oben (in N° 4) nachgewiesen wurde, ist

$$\begin{aligned} v &= \omega \sin (90^\circ - \psi) \\ &= \omega \cos \psi \end{aligned}$$

(da $90^\circ - \psi$ der Winkel ist, den die Rollenaxe mit der Richtung der vom Berührungspunkt auf der Scheibe durchlaufenen Bahn bildet).

Es ist aber

$$\omega = \overline{CD} \cdot \alpha$$

also

$$v = \alpha \, \overline{CD} \cos \psi$$

Ein in D auf AD errichtetes Perpendikel treffe AC in B, die zu AD gezogene Parallele CE in E, so ist

$$\overline{CD} \cdot \cos \psi = CE = \overline{CB} \cos \varphi$$

und daher

$$v = \alpha \cdot \overline{CB} \cos \varphi$$

Fiele die Projection der Rollenaxe mit der Geraden AB zusammen, und befände sich der Berührungspunkt der Rolle in B, so würde sie einen Bogen

$$u = \alpha \cdot \overline{BC}$$

abwickeln, während die Scheibe K sich um einen Winkel α dreht. Die Verbindung dieser Formel mit der vorangehenden giebt

$$v = u \cos \varphi$$

d. h. der Bogen, welcher bei der angenommenen Stellung der Rolle D abgewickelt wird, unterscheidet sich von dem, welcher bei der normalen Stellung abgewickelt wird, nur durch den constanten Factor $\cos \varphi$.

Stampfer und Bauernfeind scheinen übersehen zu haben, dass diese Bemerkung allein zum Beweis der in 2) und 3) bezeichneten Fälle nicht genügt. Denn offenbar erfolgt hier eine Drehung der Laufrolle nicht bloss, wenn der Fahrstift sich in der Richtung des Lineals FH, sondern auch wenn er sich in der Richtung der Wagenbahn bewegt. Man erkennt aber leicht, dass beim Umfahren einer geschlossenen Figur die Summe aller Drehungen der zweiten Art verschwindet.

Decher's Planimeter.

24.

Professor Decher theilte in Dinglers polyt. Journal, Bd. 136 die Idee zu einem neuen Planimeter mit, deren practische Ausführung er aber noch nicht versucht hatte. Die vorgeschlagene Einrichtung ist principiell richtig[1], allein weit complicirter als die irgend eines Instrumentes dieser Art und ohne irgend einen practischen Vortheil. Namentlich ist die von dem Instrument zu erwartende Genauigkeit sehr klein, wie schon aus Folgendem hervorgeht: Die Haupttheile des Planimeters bilden zwei auf einander wirkende Rollen, welche in derselben Weise spielen, wie die im Vorangehenden durchgängig durch D bezeichneten Rollen; eine derselben, welche noch dazu auf polirtem Glas laufen soll, hat einen sehr bedeutenden Widerstand zu überwinden. Derjenige Theil also, dessen Spiel bei den bekannten Instrumenten die häufigsten Fehler erzeugt, und dessen Beseitigung am meisten zu wünschen wäre, kommt hier doppelt und unter sehr ungünstigen Verhältnissen vor.

Wegen diesen practischen Rücksichten halte ich es für überflüssig, hier näher auf den Gegenstand einzugehen. — Es sei mir erlaubt anzuführen, dass

---

[1]) Der in der angeführten Abhandlung gegebene Beweis des Princips ist zwar an einer Stelle fehlerhaft.

ich schon vor etwa fünf Jahren die Zeichnung eines Planimeters, welches auf dem nämlichen Princip beruht, wie das Decher'sche, aber weit einfacher eingerichtet ist, einem Mechaniker zur Construction vorlegte, dass aber die Ausführung nach genauerer Ueberlegung aus den genannten Gründen unterblieb.

Ueber die Anforderungen, welchen ein practisch brauchbarer Planimeter genügen muss.

25.

In Praxi kommt es darauf an, die Inhalte gegebener Flächen

1) mit einem bestimmten Grade von Genauigkeit,

2) mit dem geringsten Zeitaufwand,

3) mit möglichster Bequemlichkeit und ohne zu anstrengende Aufmerksamkeit,

4) ohne kostbare Instrumente

zu bestimmen. Je nach den Umständen ist der eine oder andere dieser Punkte wichtiger. Sie sollen hier nach der Reihe erörtert werden.

Ueber die bei Flächenbestimmungen in der praktischen Geometrie festzustellenden Fehlergränzen, sowie über die durch verschiedene Methoden erreichbare Genauigkeit herrschen selbst bei Fachmännern zuweilen etwas unbestimmte Vorstellungen, so dass es nicht überflüssig sein möchte, darüber einige allgemeine Bemerkungen vorauszuschicken, bevor wir die Leistungen der Planimeter vergleichen.

Es kommen folgende Punkte in Betracht:

A) Welches ist die für irgend eine Untersuchung in der Natur der Sache begründete Fehlergränze, und welche Norm ist in der Praxis festzuhalten?

B) Welches ist die unter Anwendung der gewöhnlichen Hülfsmittel, und

C) Welches die unter Anwendung der beschriebenen Instrumente erreichbare Genauigkeit?

Zu A. Eine möglichst genaue Flächenberechnung ist weitaus in den meisten Fällen mehr Sache der Ordnung als des practischen Nutzens; in der Regel ist nämlich der Flächeninhalt an und für sich nicht Zweck des Messens, sondern nur ein Factor einer gesuchten Grösse, deren übrige Faktoren nur in roher Annäherung zu ermitteln sind. — Beim Kataster z. B. dient die Flächenberechnung wesentlich nur als Anhaltspunkt für die Werthung der Grundstücke. Allein der Werth hängt zugleich von der Qualität, der Lage, dem Culturzustand etc. ab, alles Dinge, die sich nur sehr ungenau in Zahlen ausdrücken lassen. Selbst in den Ländern, wo man die Qualität am genausten in Betracht zieht, sind höchstens 32 Bonitätsklassen statuirt; damit ist aber principiell zugegeben, dass die Bodenqualität und damit auch der Bodenwerth sich höchstens bis auf $1/32$ genau schätzen lasse. — In der That wird auch schwerlich Jemand entscheiden wollen, ob ein Grundstück, was für 32 Frcs. verkauft wurde, nicht eigentlich 33 Frcs. werth gewesen wäre. Diese Unsicherheit wird noch dadurch vermehrt, dass die Beschaffenheit eines scheinbar gleichartigen Ackers auf verschiedenen Stellen sehr ungleich sein kann.

Die genaue Feststellung des Preises für ein Grundstück ist also blosse, durch verschiedenartige Zufälligkeiten bedingte, Convenienz und die genaueste Vermessung könnte daher zu einer scharfen sachgemässen Werthung nicht dienen.

Noch viel weniger wird es bei Werthung eines Bauplatzes mit Sicherheit und aus der Natur der Sache hervorgehend ermittelt werden können, ob ein Quadratfuss z. B. 32 oder 33 Cts. werth ist, und insofern würde es auch genügen, die Ausdehnung des Platzes bis auf 3% genau zu kennen.

Dass also in den meisten Ländern eine grössere als die genannte Genauigkeit verlangt und die Fehlergränze für Flächenbestimmungen auf 1 bis $\frac{1}{3}$ Prozent festgesetzt wird, ist nicht eine aus der Natur der Sache, sondern aus der löblichen Rücksicht auf Ordnung hervorgegangene, rechtlich conventionelle Bestimmung; wobei wohl die Erfahrung leitete, dass im Allgemeinen aus einer mit dem Messtisch aufgenommenen Zeichnung der Flächeninhalt nicht viel genauer bestimmt werden kann.

Bei der Ausarbeitung von Strassen-, Eisenbahn- und Kanalbauprojecten bedarf man, um die Erdbewegung schätzen zu können, die Kenntniss einer grossen Anzahl von Flächen, namentlich der Querprofile. Aus den Querprofilen und ihren mittlern Abständen lässt sich nach dem üblichen Verfahren einmal nur ein angenäherter Werth der auf- und abzutragenden Volumina ableiten. Sodann kommt es aber für die Ausführung eines Projectes nicht sowohl auf diese Volumina, als vielmehr auf die Grösse der zu bewegenden Massen und auf die Mühe an, welche ihre Ausgrabung macht. Allein von einer Stelle zur andern können die Dichtigkeit des Materials, die Festigkeit etc. um viele Procente differiren, so dass auch hier eine genaue Flächenberechnung unnütz ist.

Aehnlich verhält es sich mit der Berechnung von Arbeitsleistungen, meteorologischen Daten etc. aus graphischen Darstellungen.

Bei Berechnung von Maschinen- und Bauconstructionen ist eine noch geringere Genauigkeit nöthig, da immer eine mehrfache Sicherheit in Rechnung gebracht wird.

Es ist daher wohl keine Frage, dass wenn ein Planimeter die umfahrnen Flächen bis auf $\frac{1}{3}$ % genau misst, dasselbe für alle practischen Bedürfnisse ausreicht, und dass es daher verlorne Mühe ist, eine grössere Genauigkeit anzustreben.

Zu B. Jede Messung ist als fehlerhaft oder doch als unsicher anzusehen. Man hat zwischen dem absoluten und relativen Fehler zu unterscheiden. Der absolute Fehler ist der Unterschied zwischen dem wahren Werth einer Grösse und ihrem durch Messung gefundenen Betrag. Das Verhältniss dieser Differenz zur gemessenen Grösse ist der relative Fehler. Wurde z. B. eine Strecke, deren wahre Länge 3000 Fuss ist, = 3001,5 Fuss gefunden, so ist der absolute Fehler = 1,5 Fuss, der relative Fehler $= 1{,}5 : 3000 = \frac{1}{2000}$. Das Mass der Genauigkeit ist der relative Fehler. Ebenso kann man zwischen absoluter und relativer Unsicherheit unterscheiden. Wir wollen hierunter die äusserste Gränze verstehen, welche der absolute oder relative Fehler bei einer Messung nicht überschreiten kann. Ist man z. B. sicher, bei der Messung einer Linie von 2000 Fuss Länge keinen Fehler von 1 Fuss begangen zu haben, ohne indessen die einzelnen Zolle verbürgen zu können, so ist die absolute Unsicherheit = 1 Fuss, die relative Unsicherheit $= \frac{1}{2000}$.

Der Fehler einer Messung, und ebenso ihre Unsicherheit, kann als aus zwei Theilen bestehend angesehen werden, deren einer der gemessenen Grösse proportional, der andere davon unabhängig ist. — Sei z. B. a die wahre Höhe eines auf dem Papier gezeichneten Dreiecks, welche mittelst Zirkel und Massstab gemessen werden soll, m die Unsicherheit der Messung, so dass also das Messungsergebniss zwischen $(a + m)$ und $(a - m)$ liegt, so kann man setzen

$$m = a\alpha + \beta$$

wo α und β für alle unter den gleichen Umständen gemachte Messungen als constant anzusehen sind. Das erste Glied $a\alpha$ kann davon herrühren, dass die Grundlinie des Dreiecks nicht genau gerade, der angewendete Masstab nicht auf die richtige Masseinheit basirt ist etc. Das zweite Glied β rührt von der Unvollkommenheit des Auges, von der Unsicherheit der Hand, von der Unbestimmtheit der Linien und Punkte, von der Breite der Theilstriche des Masstabes, von schlechter Beschaffenheit der Zirkelspitzen etc. her. Die relative Unsicherheit ist also

$$\frac{m}{a} = \alpha + \frac{\beta}{a}$$

Sind die angewandten Instrumente von guter Beschaffenheit, so wird α sehr klein, und daher der relative Fehler nahezu umgekehrt proportional mit der Grösse der gemessenen Linie a sein.

Gesetzt nun, es bezeichnen a und a′ die wahre Höhe und Grundlinie eines Dreiecks, m und m′ die absolute Unsicherheit der Messungen, so ist der wahre Inhalt des Dreiecks

$$J = \frac{a a'}{2}$$

Der berechnete Inhalt liegt irgendwo zwischen $\frac{(a+m)(a'+m')}{2}$ und $\frac{(a-m)(a'-m')}{2}$. Es ist aber, wenn man das sehr kleine Glied $\frac{m m'}{2}$ vernachlässigt

$$\frac{(a+m)(a'+m')}{2} = \frac{a a'}{2} + \frac{a a'}{2}\left(\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'}\right)$$

$$= J + J\left(\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'}\right)$$

und ebenso

$$\frac{(a-m)(a'-m')}{2} = J - J\left(\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'}\right)$$

Die absolute Unsicherheit in der Bestimmung des Flächeninhalts ist daher $= J\left(\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'}\right)$ und daher die relative Unsicherheit =

$$\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'}$$

d. h. sie ist gleich der Summe der relativen Unsicherheiten bei Bestimmung von Höhe und Grundlinie.

Für die gewöhnlich bei Katastervermessungen angewendeten Instrumente und für gewöhnliche Arbeitsgeschwindigkeit kann man setzen

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 0{,}1 \text{ Millim.}$$

(wo der Werth für β jedenfalls eher zu klein als zu gross angenommen wurde)

$$\text{also } m = m' = 0{,}1 \text{ Millim.}$$

so dass die Unsicherheit bei der Flächenberechnung eines Dreiecks =

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) 0{,}1$$

ist, wo a und a' in Millimetern auszudrücken sind.

Für $a = 100$, $a' = 20$ wird die Unsicherheit hienach

$$= \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{20}\right) 0{,}1 = 0{,}006 = \frac{1}{2}\% \text{ circa.}$$

Für a = 10, a' = 5 wird dieselbe

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right) 0{,}1 = 0{,}03 = 3\%$$

Man sieht also, dass bei kleinen Dreiecken die Fehlergränze von ⅓ % sehr bald überschritten wird.

Polygone zerlegt man zur Berechnung in der Regel in Dreiecke, deren Inhalte man einzeln bestimmt. Seien d_1, d_2, ... die Inhalte der ein Polygon bildenden Dreiecke, m_1, m_2 ... die Unsicherheit der einzelnen Bestimmungen, so ist die relative Unsicherheit für die Gesammtfläche

$$= \frac{m_1 + m_2 + \ldots\ldots}{d_1 + d_2 + \ldots} = \frac{m}{d}$$

wenn m und d Mittelwerthe zwischen den Grössen m_1, m_2, ... und d_1, d_2 ... bezeichnen; d. h. die relative Unsicherheit bei der Bestimmung der Gesammtfläche ist eben so gross, als im Mittel die Unsicherheit bei der Berechnung der einzelnen Dreiecke; dieselbe nimmt also nahezu proportional mit der Anzahl der Dreiecke zu, in welche man das Polygon zerlegt. Da übrigens in der Regel nicht alle Fehler m_1, m_2, ... im selben Sinne begangen werden, so ist der wahrscheinliche Fehler des Gesammtresultates kleiner, als die bei den einzelnen Dreiecksbestimmungen begangenen Fehler.

Die Unsicherheit wird etwas kleiner, wenn man die zu berechnende Figur nicht in Dreiecke, sondern durch Parallelen in Trapeze zerlegt, weil man hier für die gemessenen Parallelabstände eine Controlle in ihrer Summe hat. Nur muss man auf das Ziehen der Parallelen die gehörige Sorgfalt verwenden.

Krummlinig begränzte Figuren ersetzt man, gewöhnlich nach blosser Schätzung durch Polygone, welche man nach einem dieser beiden Verfahren behandelt. Die Gränze der Unsicherheit ist aber hier, wegen der stattfindenden Willkür nicht allgemein zu bezeichnen.

Weit bessere Resultate giebt die Anwendung der Simpson'schen Regel.[1]) Bekanntlich ist dieselbe nur näherungsweise richtig; allein für die practische Anwendung und bei gehöriger Handhabung kann man sie als theoretisch genau, die danach erhaltenen Resultate als nur von Messungsfehlern behaftet ansehen. Bezeichnet man durch β die Unsicherheit, welche bei der Messung einer Strecke begangen wird, also durch $\frac{\beta}{2}$ die Unsicherheit, welche bezüglich auf die Lage jedes Endpunktes stattfindet, so kann die bei Anwendung der Simpson'schen Regel zu erwartende Unsicherheit so ermittelt werden: Zeichnet man in und um die zu messende Fläche zwei Curven C und C′, welche in der Entfernung $\frac{\beta}{2}$ dem Umfang parallel

---

[1]) Die Simpson'sche Regel kann auch zur Berechnung der statischen Momente und Trägheitsmomente einer Fläche, und allgemein zur Berechnung des Integrals

$$\int z\,dx = L$$

angewendet werden, wo z eine beliebige Function von x bezeichnet, und das Integral auf ein beliebiges Curvenstück Z auszudehnen ist. Zerlegt man nämlich die Curve durch Ordinaten $y_0, y_1, \ldots y_{2m}$ von gleichem gegenseitigen Abstand h in eine gerade Anzahl Stücke und bezeichnen Z_0, $Z_1, \ldots Z_{2m}$ die den einzelnen Theilpunkten der Curve entsprechenden Werthe der Function Z, so kann man setzen

$$L = \frac{h}{3}[Z_0 + Z_{2m} + 4(Z_1 + Z_3 + \ldots + Z_{2m-1}) + 2(Z_2 + 4 + \ldots + Z_{2m-2})]$$

Für Bestimmung des Flächeninhalts ist $Z = y$ zunehmend, für Bestimmung des statischen Moments $= \frac{y^2}{2}$, etc.

laufen, so kann das fehlerhafte Messungsresultat den Inhalt einer der Curven C oder C′ oder irgend einer zwischen ihnen gezogenen Linie darstellen. Der Unterschied zwischen der zu messenden und der von C und C′ begränzten Fläche kann aber offenbar $= \pm \frac{U\beta}{2}$ gesetzt werden, wenn U den Umfang der gegebenen Fläche bezeichnet. Sei J der gesuchte Flächeninhalt, so ist daher die relative Unsicherheit

$$\frac{U}{J} \cdot \frac{\beta}{2}$$

Zu C. Die mit einem Planimeter erhaltenen Flächeninhalte sind mit einer Unsicherheit behaftet, welche doppelter Art ist. Der eine Theil entspringt aus der Beschaffenheit des Instrumentes, der andere Theil aus der Manipulation desselben.

Die aus der Beschaffenheit des Planimeters entspringenden Fehler rühren entweder von falschen geometrischen Verhältnissen, oder von todtem Gang, oder von unrichtigem Spiel der Laufrolle her. Alle diese Fehlerquellen können aber in einem Grade beseitigt werden, welcher die wirklichen praktischen Bedürfnisse weit übertrifft.

Am meisten Antheil an den Messungsfehlern hat das unrichtige Spiel der Laufrolle während ihrer gleitenden Bewegung. Die daraus entspringende Unsicherheit kann dem Wege proportional gesetzt werden, welchen die Rolle in der Richtung ihrer Axe durchläuft. Die Grösse dieses Weges ist je nach der Aufstellung des Instrumentes verschieden, bei den ältern Planimetern ist er mindestens gleich dem doppelten kleinsten Durchmesser der zu messenden Figur. Beim Polarplanimeter ist er immer kleiner, wenn sich der Pol ausserhalb der zu messenden Fläche befindet.

Bezeichnet man durch d einen gewissen mittlern Durchmesser der Figur, durch λ einen Coefficient, der für eine bestimmte Laufrolle als constant anzunehmen ist, so kann die Unsicherheit der Masangabe der Rolle $= \lambda d$ gesetzt werden. Sei u der von der Rolle abgewickelte den Inhalt der Figur messende Bogen, so ist also die relative Unsicherheit $= \frac{\lambda d}{u}$. Der Inhalt der Figur, also auch u, wächst wie das Quadrat von d, die Unsicherheit nimmt also proportional mit $\frac{1}{d}$ ab. Allein u nimmt auch mit der angewendeten Uebersetzung zu, ist daher um so grösser, je kleiner beim Wetli'schen Planimeter der Durchmesser der Rolle L und je länger beim Polarplanimeter die Entfernung CF ist. Die Unsicherheit ist daher auch diesen Dimensionen umgekehrt proportional (da der Zähler λd nicht davon abhängt).

Bei Wetli's Planimeter kann die Uebersetzung ohne Unbequemlichkeit weiter getrieben werden, als beim Polarplanimeter; und in dieser Beziehung scheint mir Wetli's Instrument einen Vorzug vor dem meinigen zu besitzen, wo es sich um Erreichung der höchst möglichen Genauigkeit handelt, was indessen durch Versuche noch nicht ermittelt ist.

Was die aus der Manipulation der Instrumente entspringende Unsicherheit anbetrifft, so kann dieselbe für alle Planimeter als gleich angenommen und =

$$\frac{U\beta}{2J}$$

gesetzt werden, indem die grösste Abweichung des gefundenen Inhalts vom wirklichen ein Flächenstreifen ist, dessen Länge = dem Umfang der Figur, und dessen Breite die grösste Abweichung des Fahrstifts von der Contour der Fläche ist (vergl. das zu B Bemerkte).

Es wurde oben nachgewiesen, dass bei Anwendung von Zirkel und Masstab die Unsicherheit der Flächenbestimmungen von Polygonen mit der Anzahl der Seiten zunimmt; bei der Anwendung der Planimeter kommt dieser Umstand gar nicht in Betracht, wie aus dem Vorstehenden sich ergiebt. Je winkliger eine Figur ist, um so vortheilhafter wird daher die Anwendung dieser Instrumente sein.

Versuche über die Genauigkeit der Planimeterangaben.

26.

Ueber die mit Oppikofers Planimeter angestellten Versuche ist mir nichts Näheres bekannt. Dass dieselben nicht sehr gute Resultate gegeben haben mögen, scheint aus einer im *Bulletin de la soc. d'encour.* von 1841 enthaltenen Bemerkung hervorzugehen, wonach man sich genöthigt sah, den Metallkegel durch einen hölzernen zu ersetzen, welcher noch am besten entsprach. — Der todte Gang des mit der Laufrolle zusammenhängenden Zeigerwerkes betrug bei einem solchen von Ernst in Paris ausgeführten Instrumente, welches die Flächen in Hectaren angab, einen Are (wie der Verfertiger angiebt).

Mit einem Wetli'schen, von Chr. Starke in Wien angefertigten Planimeter stellte Stampfer[1]) eine umfassendere Versuchsreihe an. Bei Anwendung aller Sorgfalt in der Behandlung des Instrumentes betrug

---

[1]) Dinglers polyt. Journal, Bd. 116.

im Mittel der relative Fehler einer Messung $\frac{1}{3000}$ bis $\frac{1}{4000}$ bei Flächen von 5 bis 7 Quadratzoll. Die umfahrnen Figuren waren in eine Metallplatte eingedrehte Kreise. — Bei gezeichneten Figuren von circa $4\frac{1}{2}$ bis 11 Quadratzoll betrug der mittlere Fehler einer Messung circa $\frac{1}{500}$ bis $\frac{1}{1100}$, wobei indessen eine ängstliche Sorgfalt beim Umfahren der Figuren absichtlich vermieden wurde. — Das untersuchte Instrument genügt daher für praktische Zwecke bezüglich auf seine Genauigkeit vollkommen.

Hansen traf im Bau des Wetli'schen Planimeters einige Abänderungen, welche darauf abzielen, den todten Gang möglichst zu vermeiden und die im Vorangehenden durch β bezeichnete Unsicherheit klein zu machen.

Das Letztere erreichte er dadurch, dass er die Spitze des Fahrstiftes durch eine feine auf Glas gezeichnete Marke (einen kleinen Kreis) ersetzte, welche mit Hülfe einer Lupe längs der Umfangslinie geführt wird. Bauernfeind theilt in seiner oben genannten Abhandlung verschiedene Versuchsreihen mit, welche er mit einem Hansen'schen von Mechaniker Ausfeld in Gotha construirten Planimeter anstellte. — Bei gravirten Figuren von 50 bis 656 Quadratlinien Inhalt, welche mit möglichster Sorgfalt umschrieben wurden, betrug der Fehler im Mittel aus 10 Messungen nur circa $\frac{1}{1400}$ bis $\frac{1}{13000}$. Die Dauer einer Beobachtung war im Mittel 1,2 bis 2,5 Minuten.

Was die Polarplanimeter anbelangt, so wurde bis jetzt keines dieser Instrumente mit ganz besonderer Sorgfalt construirt, so dass die grösstmögliche

Genauigkeit damit hätte erreicht werden können. Einmal fehlten hier die nöthigen Hülfsmittel dazu; sodann aber schien es in practischer Hinsicht überflüssig. Man betrachtete die Instrumente als fertig, sobald sie die wirklich umfahrne Fläche bis auf $\frac{1}{1000}$ genau angaben. Dass aber eine bedeutend grössere Genauigkeit erreichbar wäre, zeigt schon die Vergleichung des Polarplanimeters mit dem Wetli'schen Planimeter, indem bei jenem mehrere Fehlerquellen gänzlich wegfallen, welche das letztere Instrument besitzt, wie z. B. die vielen Leitrollen, die horizontale Scheibe, der elastische Draht, jede Art von Biegung durch Druck; es folgt aber auch aus der grossen Uebereinstimmung, welche man bei wiederholten Messungen der nämlichen Figur erhält. — Die Beschaffenheit des Papiers, auf welchem die Rolle D läuft, übt einen ganz unmerklichen Einfluss auf ihr Spiel aus.

Ich glaube hier noch einige Bemerkungen über die für den Planimeter gewählte Einrichtung machen zu müssen, indem diese zum Theil mit seiner Genauigkeit zusammenhängt. — Der leitende Gedanke bei der Construction war, mit der ausreichenden Genauigkeit die grösstmögliche Einfachheit, Solidität und Bequemlichkeit für den Gebrauch zu verbinden. Demnach wurde Alles vermieden, was das Instrument complicirt machen konnte, auch wenn dadurch gewisse Vortheile hätten erreicht werden können. So fehlen z. B. jede Art von Correctionsschrauben, da diese erfahrungsgemäss von den Practikern fast nie benutzt werden. Nöthig werdende Correctionen kann ein einsichtiger Practiker oder Mechaniker ohne dieselben anbringen. Ferner wurde jede Art von Uebersetzung vermieden, denn es schien genügend, noch solche Grössen an der Theilung der Rolle D ablesen zu können, welche in der Zeichnung wirklich dargestellt und daraus entnommen werden können. — Endlich wurde der Hansen'schen Marke mit Lupe ein einfacher Fahrstift für den gewöhnlichen Gebrauch vorgezogen, wiewohl jene Einrichtung grössere Genauigkeit gewährt. Denn einmal arbeitet man mit dem Fahrstift rascher, weil man dabei sich sehr bequem eines geraden oder Curvenlineals bedienen kann, um die Umfänge der Figur zu verfolgen; sodann gewährt er den Vortheil, dass das Auge weniger anhaltend angespannt wird; endlich aber wurde angenommen, dass man mit der Spitze des Fahrstiftes die Linien ebenso genau verfolgen könne als mit der Reissfeder, womit sie gezogen wurden. — Uebrigens liesse sich die Hansen'sche Einrichtung für das Polarplanimeter auch so abändern, dass sie mit dem Lineal gebraucht werden könnte.

Zeitersparniss bei Anwendung der Planimeter.

27.

Was die mit den Planimetern zu erzielende Zeitersparniss betrifft, so ist der Unterschied für die verschiedenen Systeme nicht sehr gross. Nur arbeitet man bei Figuren, deren Umfänge grösstentheils gerade sind, mit dem Fahrstift rascher, als mit der Hansen'schen Marke.

Bauernfeind, in der öfter genannten Abhandlung, theilt eine sehr interessante Versuchsreihe mit, welche zeigt, dass die Zeitersparniss sehr bedeutend ist. Er liess zwölf zusammenhängende, theils geradlinig, theils krummlinig begränzte Parcellen eines Katasterplans, sowie deren Gesammtfläche auf gewöhnliche Art und sodann mittelst eines Planimeters zweimal berechnen. Die einzelnen Parcellen wurden zusammen in 4 Std. 33 Min. berechnet; der Apparat gab die Fläche in 20 Min. Die Gesammtfläche wurde in 2 Std. 40 Min. berechnet, in 3 Min. durch den Planimeter bestimmt. Die Summe aller berechneten Parcellenflächen wich von der berechneten Gesammtfläche um $\frac{1}{400}$ ab; die Summe der durch den Planimeter bestimmten Massangaben wich von dem durch Umfahren der Gesammtfläche erhaltenen Resultat nur um circa $\frac{1}{2000}$ ab. — Es muss übrigens bemerkt werden, dass diese Resultate zum Theil auch desshalb so ausserordentlich günstig für den Planimeter sprechen, weil die Umfangslinien der gemessenen Figuren, namentlich des ganzen Complexes, sehr viele krumme Partien enthalten. Wo man es meist mit geradlinig begränzten Figuren zu thun hat, ist der Unterschied weniger auffallend.

Das Polarplanimeter hat bezüglich auf Zeitersparniss einige Vortheile vor den übrigen Planimetern voraus:

1) Es können grössere Figuren ohne vorgängige Zerlegung damit gemessen werden.

2) Das nämliche Instrument kann für verschiedene Landesmasse und auf verschiedene Massstäbe eingestellt werden, wodurch manchmal Reductionsrechnungen erspart oder vereinfacht werden. — Der Besitzer eines solchen Instrumentes kann sich übrigens dasselbe ohne Beihülfe eines Mechanikers selber leicht für jedes beliebige Mass einrichten.

3) In mehreren Ländern beobachtet man bei Anfertigung von Katasterplänen das Verfahren, dass man die Planblätter, bevor sie vom Messtisch abgelöst werden, durch feine Linien in Quadrate von bestimmter Seitenlänge eintheilt. Gewöhnlich benutzt man dieses Liniennetz nur, um daraus bei der Verifikation etc. erkennen zu können, ob und um wie viel das Papier sich durch Einfluss der Feuchtigkeit verzogen hat. Hansen machte darauf aufmerksam, dass man die Quadrate anwenden kann, um mit Hülfe eines Planimeters sehr leicht den wahren Inhalt der durch die verzogenen Figuren dargestellten Flächen zu erhalten. Hiezu ist es nöthig, einen Reductionsfactor zu berechnen und anzubringen, was bei Anwendung des Polarplanimeters ganz vermieden werden kann. Nämlich, misst man mit demselben ein solches Quadrat (oder mehrere zusammen), und zeigt sich eine Abweichung von dem anfänglichen Normalinhalt, so darf man nur den Stab A um ein angemessenes kleines Stück in seiner Hülse verschieben, um sodann die Inhalte der Figuren in der Nähe des untersuchten Quadrates ohne Reduction richtig zu erhalten. Würde z. B. das Quadrat um $\frac{1}{100}$ zu gross gefunden, so darf man nur die Entfernung FC um $\frac{1}{100}$ vergrössern.

Bequeme Handhabung des Polarplanimeters.

28.

Bei der vorher besprochenen mit dem Planimeter zu erzielenden Zeitersparniss wurde die Zeit nicht in Anschlag gebracht, welche die Aufstellung des Instrumentes verlangt. Allein die hiemit verbundene Umständlichkeit ist für die ältern Instrumente so gross, dass deren Anwendung nur von Vortheil ist, wenn viele Figuren hinter einander gemessen werden sollen, oder wenn, wie auf technischen Bureaux, eine feste Aufstellung möglich ist. — Dieser Uebelstand fällt für den Polarplanimeter ganz fort, da derselbe ebenso rasch zum Gebrauch bereit ist, als Zirkel und Massstab. Das neue Instrument kann sogar ganz bequem in einem gewöhnlichen Reisszeug neben den übrigen Instrumenten Platz finden.

Preise der Planimeter.

29.

Als ein Hauptvorzug des neuen Planimeters dürfte wohl der billige Preis anzusehen sein, zu welchem es angefertigt werden kann. — Zur Vergleichung stelle ich die mir bekannt gewordenen Preise von Polarplanimetern nachfolgend zusammen:

Ein Planimeter nach Oppikofers System bei Lerebours & Secretan in Paris	Fr. 425
Ein Planimeter nach Wetli's System	
bei Chr. Starke in Wien . . .	„ 450
bei Hamberg in Stockholm . . .	„ 400
„ Goldschmid in Zürich . . .	„ 180
„ Ausfeld in Gotha	„ 300
Ein Polarplanimeter nach der Zeichnung (Fig. 4) bei Goldschmid in Zürich . .	„ 50
dito bei Kirchhofer-Amsler in Schaffhausen	„ 50
dito Theilung der Laufrolle in 200 Grade (für Katasterpläne)	„ 60
dito für besondere Zwecke eingerichtet, mit Flächenreductor etc. .	Fr. 40—100.

Nachtrag.

Während diese Abhandlung sich unter der Presse befand, erhielt ich Nachricht von drei neuen Planimeterconstructionen, welche von Gierer[1]) in Fürth, Bouniakovsky[2]) in Petersburg und Decher[3]) in Augsburg vorgeschlagen wurden. Sämmtliche drei Instrumente stützen sich auf die Quadratur mittelst Polarcoordinaten. Bei allen wird das Laufrädchen durch den Fahrstift mittelbar so geführt, dass seine Axe beständig nach einem festen Punkte (dem Pol) gerichtet ist, und dass seine Entfernung von diesem Punkte sich proportional mit dem Quadrat des Radius-Vector (mit der Entfernung des Fahrstifts vom Pol) ändert. — Diese Beziehung wird beim Gierer'schen Instrumente durch eine Leitcurve, bei den beiden andern Instrumenten durch eine pantographenartige Vorrichtung vermittelt, deren Glieder theils durch Drehungen (um 5 bis 8 Axen), theils durch gerade Schiebungen (2 bis 5) ihre relative Stellung ändern.

Da der mir hier gestattete Raum es nicht erlaubt, so werde ich an einem andern Ort nachweisen, dass diese Instrumente, gegenüber den im Vorangehenden beschriebenen Planimetern, keinen wesentlichen practischen Vortheil darbieten.

---

1) Programm der Gewerbs- und Handelsschule zu Fürth $18^{53}/_{54}$.

2) Dinglers polyt. Journal, Bd. CXL., Pag. 27.

3) Ibid. Der von Herrn Prof. Decher verfasste Aufsatz enthält einige critische Bemerkungen über das Polarplanimeter, welche im nämlichen Journal, Bd. CXL., Heft 5. beleuchtet werden sollen.