

Erläuterungen zum Artikel von N. Straumann «Das Rätsel der kosmischen Vakuumenergiedichte und die beschleunigte Expansion des Universums»

Fritz Gassmann, Redaktionskommission der Vierteljahrsschrift

Wir erachten den im letzten Heft 145/2–3, p. 49–56, erschienenen Artikel als äusserst interessant und von allgemeinem Interesse, zeigt er doch, wie weit wir immer noch von einem wirklichen Verständnis des Universums entfernt sind! Wir fänden es deshalb schade, wenn einige schwer verständliche Begriffe, das Verständnis behindernde Druckfehler, sowie einige der Formeln für viele unserer Mitglieder anderer als physikalischer Fachrichtungen kaum zu überwindende Barrieren darstellten. Es würde uns freuen, wenn die nachfolgenden Erläuterungen zu einigen «Aha-Erlebnissen» führen würden.

Kritische Dichte: Die auf p. 50 definierte kritische Dichte ρ_{krit} (Masse pro Volumen, vgl. auch Korrigenda) ist eine zentrale hypothetische Grösse in der Kosmologie. Ihr Wert resultiert aus dem Expansionsgesetz von Hubble (Entweichgeschwindigkeit einer Galaxie im Abstand R ist gleich $H_0 \cdot R$) und der Forderung, dass eine Galaxie im Abstand R aufgrund der Gravitationskraft, die durch die Gesamtmasse innerhalb der Kugel mit Radius R auf diese ausgeübt wird, gerade nicht ins Unendliche entweichen kann. Setzt man entsprechende Zahlen in die auf p. 50 wiedergegebene Formel ein ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, 1 Lichtjahr = $9.46 \cdot 10^{12} \text{ km}$), erhält man $8 \cdot 10^{-30} \text{ g/cm}^3$ (im Artikel ist ein Näherungswert von 10^{-29} g/cm^3 angegeben). Ein Gramm entspricht einem Mol Wasserstoffatomen ($1 \text{ Mol} = 6.02 \cdot 10^{23}$). Damit lässt sich ρ_{krit} auch ausdrücken als 4.8 Wasserstoffatome pro m^3 oder mit $E = m \cdot c^2$ als 0.7 nJ/m^3 (zum Vergleich von Masse und Energie wird die Einsteinsche Formel $E = m \cdot c^2$ benutzt, d. h. Energie gleich Masse mal Lichtgeschwindigkeit im Quadrat). Umgerechnet in eine bei Teilchenphysikern beliebte Masseinheit ergibt sich $0.3 \cdot 10^{-46} (\text{GeV})^4 / (\hbar c)^3$. Es ist praktisch, alle Dichten auf ρ_{krit} zu beziehen, wobei sich beispielsweise die im Artikel benutzten Grössen $\Omega_M = \rho_M / \rho_{\text{krit}}$ und $\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda / \rho_{\text{krit}}$ ergeben. Ω_M ist eine reine Zahl (ohne Masseinheit) und beträgt für unser heutiges Universum rund $1/3$. $\Omega_M < 1$ bedeutet, dass unser Universum zu wenig Masse hat, um die Fluchtbewe-

gung der Galaxien mit Hilfe der Gravitationskraft abzubremesen (es kann also nicht zu einem Kollaps kommen). Zusätzlich haben wir noch die abstossende Wirkung von $\Omega_\Lambda > 0$, so dass wir annehmen müssen, dass sich die Expansion sogar beschleunigt.

Das kosmische Koinzidenzproblem: Die Dichte der gewöhnlichen Materie M (für die das Newtonsche Gravitationsgesetz gilt) ist gemäss astronomischer Beobachtungen heute etwa halb so gross wie die in Materiedichte umgerechnete Vakuumenergiedichte Λ . Im Artikel erscheint diese Feststellung auf p. 55 in der Form $\Omega_M \approx 1/3$, $\Omega_\Lambda \approx 2/3$. Wenn man annimmt, dass diese beiden Grössen voneinander unabhängig sind, ist dieser kleine Verhältnisfaktor von etwa zwei äusserst unverständlich und als eigenartige zufällige Koinzidenz zu betrachten. Solche «Zufälle» entpuppen sich in der Physik über kurz oder lang meist als Wissenslücken, indem neue Erkenntnisse zu vorher unbekanntem Zusammenhängen führen. Auf p. 55 wird erwähnt, dass durch eine Verknüpfung des kosmologischen Gliedes Λ mit einer «Quintessenz» genannten ungewöhnlichen Form von sich abstossender Materie (anstelle der heutigen Verknüpfung mit der Vakuumenergiedichte) versucht wird, diesen «Zufall» in eine physikalische Notwendigkeit umzuwandeln.

Supernova: Eine SN ist eine ungeheure Sternexplosion, bei der alles ausser dem inneren Kern eines Sterns in den interstellaren Raum hinausgeschleudert wird. Eine SN produziert innerhalb weniger Tage etwa die Energiemenge, die unsere Sonne über einen Zeitraum von Milliarden von Jahren abstrahlt. Die wahrscheinlich letzte SN innerhalb der Milchstrasse wurde durch J. Kepler 1604 beobachtet. Glücklicherweise konnten seither in entfernteren Galaxien viele weitere SNe beobachtet werden, die sich ausgezeichnet zur Distanzbestimmung eignen, da ihre Dynamik weitgehend physikalisch verstanden werden kann (SNe sind deshalb sog. Standardkerzen).

Raumkrümmung: Der mit Ω_K bezeichnete Parameter bezeichnet die Raumkrümmung. Was damit gemeint ist, lässt

sich nur durch einen zweidimensionalen Vergleich beschreiben: Eine gekrümmte Fläche, wie beispielsweise eine Kugeloberfläche, ist im dreidimensionalen euklidischen Raum anschaulich vorstellbar. Sie unterscheidet sich von einer Ebene (flach, Krümmung = 0) unter anderem dadurch, dass die Winkelsumme eines Dreiecks grösser als 180° ist. Um zum vierdimensionalen Raum-Zeit-Universum aufzusteigen, muss das Gesagte in abstrakter mathematischer Weise verallgemeinert werden. Die Krümmung $k = -\Omega_K \cdot H_0^2 \cdot a_0^2$ kann dabei positiv («geschlossenes» Universum) oder negativ («offenes» Universum) sein.

Erklärungen zu Abb. 2 und Anhang: Abb. 2 fasst die kosmologischen Friedmann-Lemaître-Modelle für $\Lambda \neq 0$ mit den Supernova- und den Mikrowellenhintergrundstrahlungsdaten zusammen. Letztere legen ein flaches Universum ($\Omega_K \approx 0$) nahe; nach Anhang Formel (4) muss also $\Omega_M + \Omega_\Lambda \approx 1$ sein. Die entsprechende nach rechts schräg abfallende Gerade ist mit «flach» angeschrieben. Die dunkelgrau ausgefüllte Ellipse umschreibt die mit den Supernovadaten konsistenten Kombinationen von Ω_M und Ω_Λ . Ihre Hauptdiagonale (in Abb. 2 nicht eingezeichnet) ist die auf p. 53 angegebene Geradengleichung $0.8 \Omega_M - 0.6 \Omega_\Lambda \approx -0.2$. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden (in Abb. 2 nicht eingezeichnet) hat die auf p. 53 angegebenen Koordinaten $\Omega_M = 0.28$, $\Omega_\Lambda = 0.72$. Diese Werte charakterisieren den heutigen Stand unseres Wissens über die Struktur des Universums.

Eine Kombination der Gleichungen (4), (5) und (6) ergibt die Dynamik des Universums gemäss dem Modell von Friedmann und Lemaître zu:

$$\dot{x}^2 = 1 + \Omega_M \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + \Omega_\Lambda (x^2 - 1) \equiv f(x)$$

x bedeutet die Ausdehnung des Universums bezogen auf den heutigen Wert (d. h. heute ist $x = 1$). \dot{x} ist die Ausdehnungsgeschwindigkeit (\dot{x}^2 ist eine Art kinetische Energie), Ω_M und Ω_Λ müssen als konstante Parameter betrachtet werden. Es lassen sich nun die Grenzkurven bestimmen, auf denen sich ein hypothetisches Universum mit entsprechenden Kombinationen von Ω_M und Ω_Λ gerade unendlich lange ausdehnt. Mathematisch ausgedrückt: nach unendlich langer Zeit soll $\dot{x}^2 = f(x_\infty) = 0$ sein (die Ausdehnung erreicht x_∞ und stoppt, d. h. die Ausdehnungsgeschwindigkeit \dot{x} wird null). Die Forderung, dass dies erst nach unendlich langer Zeit geschehen soll, lautet mathematisch $f'(x_\infty) = 0$, woraus folgt:

$$x_\infty = \left(\frac{\Omega_M}{2\Omega_\Lambda} \right)^{1/3}$$

Kombiniert mit der ersten Bedingung ergibt sich die folgende Beziehung zwischen Ω_M und Ω_Λ :

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \text{ wobei } y = \Omega_\Lambda^{1/3}, \quad p = -\left(\frac{\Omega_M}{2}\right)^{2/3}, \quad q = \frac{\Omega_M - 1}{2}$$

Die drei Lösungen können in mathematischen Handbüchern gefunden werden (Cardanische Formel). Die in der Abb. 2 mit «ewige Expansion» angeschriebene Grenzkurve für $\Omega_M > 1$ lautet:

$$\Omega_\Lambda = 4\Omega_M \cos^3\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right), \text{ wobei } \cos\varphi = 1 - \frac{1}{\Omega_M}$$

Die die schattierte Fläche «Kein Urknall» begrenzende Kurve muss aus zwei Lösungen (für $\Omega_M < 1$ und für $\Omega_M > 1$) zusammengesetzt werden. «Kein Urknall» bedeutet, dass innerhalb dieser Fläche die Ausdehnungsgeschwindigkeit vor endlicher Zeit null gewesen wäre. Der Vorgang wäre analog der Bewegung einer hangaufwärts geschossenen Kugel: Ihre Geschwindigkeit wird an einer bestimmten Stelle null, bevor sie wieder hangabwärts rollt, was der heute zu beobachtenden Ausdehnung des Universums entspräche. Ein Urknall, der einer unendlichen Ausdehnungsgeschwindigkeit entspricht, läge in diesem Fall innerhalb einer endlichen Vergangenheit nicht vor.

Korrigenda:

Drei nicht abgedruckte Spezialzeichen sind wie folgt zu ergänzen:

Formel p. 50 muss heissen:

$$\rho_{\text{krit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 10^{-29} \text{ g/cm}^3$$

Zweite Formel auf p. 51 muss heissen:

$$\rho_\Lambda c^2 \leq 10^{-46} (\text{GeV})^4 / (hc)^3$$

Der Titel p. 55 muss heissen:

Anhang: Dynamik der Friedmann-Lemaître-Modelle für $\Lambda \neq 0$