Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich (1993) *138/4:* 283–298

«. . . und will der Würfel Ungefähr bestehn»

Über die umfangreichen Zufallsexperimente des Astronomen Rudolf Wolf (1816–1893)[1]

Robert Ineichen, Université de Fribourg

In den Anwendungen der Stochastik spielen empirisch bestimmte Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten oft eine sehr wesentliche Rolle. Der Zürcher Astronom Rudolf Wolf hat wohl die umfangreichsten Versuchsreihen mit Würfeln, Nadeln und Karten durchgeführt, um auf empirischem Weg solche Schätzwerte zu gewinnen. – In dieser Arbeit gehen wir zuerst auf den Begriff der statistischen Regelmässigkeit ein und behandeln dann einige der zahlreichen Zufallsexperimente, die Wolf mit Würfeln durchgeführt hat, ebenso seine Bemühungen, eine Theorie des «realen Würfels» zu finden. Wir schliessen mit der Beschreibung seiner Versuche zur ersten π-Bestimmung nach einer Monte-Carlo-Methode mit Hilfe des Nadelexperimentes von Buffon und seiner Untersuchungen zum Rencontre-Problem.

«. . . and I will stand the hazard of the die»
On the extensive random experiments of the astronomer Rudolf Wolf

Summary: The empirical estimations of probabilities play an important role in the applications of probability theory. In order to get such empirical estimations, the astronomer Rudolf Wolf performed an impressive number of experiments involving dice, needles and cards. – The present work starts with a description of the notion of «statistical regularity». We then go to some of Wolf's dice experiments and we describe his tentative theory of the «real dice». We conclude with his results about the ancestor of Monte Carlo's method in the context of Buffon's needle problem and the random matching of two equivalent decks of cards («problème de rencontre»).

1 Einleitung

Nein, so dramatisch wie in Shakespeares «König Richard III.» ging's natürlich bei Rudolf Wolf nicht zu: «Ich setz auf einen Wurf mein Leben, Knecht, und will der Würfel Ungefähr bestehn.» – Die Hauptleistungen von Wolf, bei dem sich «in seltener Weise die Gaben des naturwissenschaftlichen Forschers, des Historikers und des Lehrers» vereinigten (W. Brunner, 1939), liegen ja nicht im Gebiet der Zufallsexperimente. Aber offenbar hat ihn doch der «Würfel Ungefähr» immer wieder fasziniert: Zwischen 1849 und 1893 hat er Beobachtungen an sicher über 320 000 Würfen mit Spielwürfeln – zum weitaus grössten Teil anscheinend selbst durchgeführt – ausgewertet, ferner Versuche zum Nadelproblem von Buffon ausgeführt (das er als erster zur π-Bestimmung in der Art der modernen Monte-Carlo-Methoden verwendet hat) und über das Rencontre-Problem experimentiert. Seine Auswertungen hat er publiziert, oft samt allen Details seiner Untersuchungen: in seinem «Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie, Bd. 1» von 1869, im ebenfalls von

[1] Ich danke meinem ehemaligen Lehrer, Herrn Prof. Dr. J.J. Burckhardt, herzlich für die Anregung, mich gelegentlich auch mit den Zufallsexperimenten von Rudolf Wolf zu befassen, die er mir vor einigen Jahren gegeben hat.

ihm verfassten «Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur» von 1890, in den «Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern» (1849–1853) und in der von ihm begründeten «Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich (1881–83, 1893), hier seltsamerweise in die jeweiligen «astronomischen Mitteilungen» eingefügt. Dabei sind übrigens die Resultate von 80 000 Würfen einzeln(!) publiziert.

2 Statistische Regelmässigkeit

Wiederholen wir ein geeignetes Zufallsexperiment genügend oft und achten wir dabei auf das Eintreffen und das Nichteintreffen eines bestimmten Ereignisses E, so stellen wir natürlich zuerst eine ausgesprochene *Regellosigkeit* bei der *einzelnen* Ausführung der Versuche fest. Doch wenn wir viele *grössere Serien* solcher Versuche beobachten, so bemerken wir bald eine gewisse *Stabilität der relativen Häufigkeit* des Eintreffens von E. Und schliesslich beobachten wir einen *«Überschwemmungseffekt»*: Die eben genannte Stabilität zeigt sich im allgemeinen umso besser, je grösser die Anzahl der Versuche ist; ungewöhnliche Zwischenresultate werden dabei nicht eigentlich ausgeglichen, sondern «überschwemmt» und fallen nach einer grösseren Zahl weiterer Versuche einfach nicht mehr ins Gewicht. Man bezeichnet diesen ganzen Komplex von Erscheinungen als *«statistische Regelmässigkeit»*.

Dieses Phänomen der statistischen Regelmässigkeit ermöglicht in vielen Fällen die Bestimmung von *Schätzwerten* für Wahrscheinlichkeiten. Wolf spricht hier von «Erfahrungswahrscheinlichkeiten». Er umschreibt diesen Begriff so: «Sind einem Ereignis unter n gleichmöglichen Fällen m Fälle günstig, so nennt man m:n die *mathematische Wahrscheinlichkeit* . . . Wird die Anzahl der günstigen und die der möglichen Fälle durch die Anzahl der günstigen und die der sämtlichen Versuche ersetzt, so erhält man die *Erfahrungswahrscheinlichkeit*» (R. Wolf, 1869). – Dazu meint schon Jakob Bernoulli in seiner 1713 postum erschienenen «Ars conjectandi»: «Diese empirische Art, die Zahl der Fälle durch Beobachtung zu ersetzen, ist weder neu noch ungewöhnlich . . .» (J. Bernoulli, 1899). In diesem Zusammenhang sprechen übrigens verschiedene Autoren vom *«empirischen* Gesetz der grossen Zahl», vom *«empirical* law of large numbers» (z. B. H. Freudenthal, 1972). – Es ist hier nicht der Ort, jenen reizvollen Spuren nachzugehen, die uns zeigen, wie man im Laufe der Zeit nach und nach dem Begriff der statistischen Regelmässigkeit näher gekommen ist; wir haben dies an anderer Stelle getan (R. Ineichen, 1987, 1992). – Jakob Bernoulli hat schliesslich die Entwicklung dieses Begriffes zu einem ersten Abschluss gebracht: «Es bleibt nämlich noch zu untersuchen, ob durch *Vermehrung der Beobachtungen* beständig auch die *Wahrscheinlichkeit* dafür wächst, dass die Zahl der günstigen zu der Zahl der ungünstigen Beobachtungen das *wahre Verhältnis* erreicht, und zwar in dem Masse, dass diese Wahrscheinlichkeit schliesslich jeden Grad von Gewissheit übertrifft . . .», schreibt er in seiner «Ars conjectandi» (J. Bernoulli, 1899). Bekanntlich ist ihm der Beweis dieses Sachverhalts gelungen; er hat seine Überlegungen im vierten Teil der «Ars

conjectandi» dargestellt. Er konnte zeigen, dass die genannte *Wahrscheinlichkeit gegen 1* geht. Er hat damit das *theoretische Gegenstück* zum empirischen Gesetz der grossen Zahlen gefunden, jenen Satz, den man heute oft das «Gesetz der grossen Zahlen von Jakob Bernoulli» oder – präziser – das «Schwache Gesetz der grossen Zahlen von Jakob Bernoulli» nennt. – Dieses Bernoullische Gesetz der grossen Zahlen ist also ein Satz, der aus der *Theorie* der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgt; die experimentelle Feststellung des Phänomens der statistischen Regelmässigkeit hingegen, also jener Sachverhalt der auch als «empirisches Gesetz der grossen Zahlen» bezeichnet wird, ist eine Angelegenheit der Beobachtung, eben der *Empirie*.

3 Und trotzdem noch Münzen und Würfel werfen?

Schon zur Zeit von Jakob Bernoulli war es also «weder neu noch ungewöhnlich» Wahrscheinlichkeiten allenfalls auch empirisch zu bestimmen. Das Bernoullische Gesetz der grossen Zahlen, hergeleitet aus den theoretischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, zeigt dann, dass Theorie und «natürliche» Vorstellungen über die Wahrscheinlichkeit in einem durchaus akzeptablen Einklang stehen. Und so wäre man eigentlich geneigt, mit dem namhaften Wahrscheinlichkeitstheoretiker Emile Borel zu sagen: «Ceux de nos contemporains qui emploient une fraction notable de leur temps à jouer au baccara et au bridge auraient tort d'en conclure qu'ils font une besogne utile à la science; *la théorie des probabilités n'a plus besoins des jeux de hasard*» (E. Borel, 1928).

Rudolf Wolf aber hat seine so überaus zahlreichen Zufallsexperimente durchgeführt und dazu erst noch ein wachsames Auge auf seltsame Lotterieergebnisse und ähnliche Vorkommnisse geworfen – und dies alles gut 150 Jahre nach Jakob Bernoulli! Was mag ihn dazu bewogen haben? Wie er mehrmals hervorhebt, wollte er keineswegs die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung nochmals experimentell «beweisen». Viel eher darf man wohl annehmen, dass es immer wieder jene Fragen waren, die er schon in seiner ersten Mitteilung aufwirft (R. Wolf, 1849a):

Er möchte die «mathematische Wahrscheinlichkeit» mit der «Erfahrungswahrscheinlichkeit», gewonnen durch wiederholte Ausführung eines Zufallsexperimentes, *vergleichen,* und dies führt ihn zur Frage, «wie weit sie (die Wiederholung) zu führen sei, um wenigstens eine Annäherung . . . zu erhalten».

Es gibt Situationen, da eine Wahrscheinlichkeit «auf theoretischem Wege gar *nicht bestimmt werden kann*, sondern der Erfahrung entnommen werden muss»; dann stellt sich eben wieder die Frage nach der *Anzahl der Versuche.*

Wenn Wolf schliesslich an die *Unvollkommenheit seiner Versuchseinrichtungen* (nicht-ideale Würfel usw.) denkt, so stellt sich ihm die Frage, «inwiefern sich diese Unvollkommenheit bei Vergleichung der auf theoretischem und praktischem Wege gefundenen Wahrscheinlichkeiten zeigt, ja aus derselben bestimmt werden könne».

Allen diesen Fragen geht Wolf als *experimentell* arbeitender Naturforscher nach. Schon zu seiner Zeit wäre es an sich möglich gewesen, die theoretische

Seite dieser Fragen ebenfalls zu behandeln: Er hatte ja immer eine sehr grosse Zahl von Beobachtungen zur Verfügung und hätte deshalb mit der Normalverteilung arbeiten können. Den notwendigen Formelapparat hätte er z. B. im seinerzeit sehr bekannten Lehrbuch von S.D. Poisson finden können, das 1837 erschien (deutsche Übersetzung 1841). Diesen mehr *theoretischen* Aspekten ist er aber *nicht* nachgegangen. Trotzdem ist die Fülle seiner Beobachtungen und Hinweise beeindruckend und «they afford a wonderful example of the pure love of experiment and observation» (J.M. Keynes, 1973). – Auch der heutige mathematische Statistiker ist oft mit ähnlichen Fragen konfrontiert, wie sie Wolf gestellt hat. Ihm steht indessen eine ausgebaute mathematische Statistik zur Verfügung. Diese jedoch ist «als eigene Disziplin etwa 1890 entstanden» (H. Witting, 1990); Wolf hätte sich ihrer also noch nicht bedienen können.

Wolfs Zufallsexperimente und die zugehörigen Auswertungen bewegen sich im Bereiche des «empirischen Gesetzes der grossen Zahlen» und seines theoretischen Gegenstückes, also des Bernoullischen Gesetzes der grossen Zahlen. Es fällt auf, dass Wolf weder in seinen «Handbüchern» noch in seinen zahlreichen «Mitteilungen» dieses Bernoullische Gesetz vollständig formuliert. In seinem «Handbuch» von 1890 macht er einige nur sehr vage Bemerkungen darüber und fügt noch bei, dass schon Jakob Bernoulli auf dieses Gesetz der grossen Zahlen «hinwies». Dieses bescheidene «hinwies» ist nun doch zu wenig! B.L. van der Waerden hat diese Leistung von Jakob Bernoulli mit den Worten kommentiert: «Er gab in seiner Ars conjectandi einen strengen Beweis des «Gesetzes der grossen Zahl» und wurde dadurch zum Begründer der mathematischen Statistik.» (B.L. van der Waerden, 1975). Und Bernoulli selbst war sich der Wichtigkeit seines Satzes und des Beweises sehr wohl bewusst: «Diese Entdeckung gilt mir mehr, als wenn ich gar die Quadratur des Kreises geliefert hätte; denn wenn diese auch gänzlich gefunden würde, so wäre sie doch sehr wenig nütz» – «. . . quod si maxime reperiretur, exigui usus esset», schreibt er in seinen «Meditationes» (J. Bernoulli, 1975).

Die Erfassung des Phänomens der statistischen Regelmässigkeit ist aber nicht nur faszinierend, sondern auch von *praktischer und didaktischer Relevanz:* Zufallsexperimente liefern ja nicht nur Schätzwerte für allenfalls unbekannte Wahrscheinlichkeiten; sie geben auch einleuchtende *Motivationen für die Formulierung der Axiome* der Wahrscheinlichkeitsrechnung und erlauben weiter, die *Häufigkeitsinterpretation* des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zu verstehen. Schliesslich gestatten sie auch, theoretische Erörterungen prägnant zu illustrieren. Es ist deshalb gar nicht überraschend, dass vor und nach Rudolf Wolf immer wieder Zufallsexperimente vielfach wiederholt worden sind und dass es kaum ein Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik gibt, das nicht Hinweise auf solche Experimente präsentiert. In dieser Hinsicht ist Wolf in bester Gesellschaft: Immer wieder stösst man in den Lehrbüchern auf die 4040 Münzenwürfe (2048 «Kopf») von G.L.L. Buffon (1707–1788), auf die 24 000 Würfe (12 012 «Kopf») von K. Pearson (1857–1936) und etwa auf die 4092 Würfe mit je 12 Würfeln von F.L. Weldon (1860–1906); manchmal werden auch einige Resultate von Wolf mitgeteilt.

Aber diese kurze Liste wäre zu ergänzen: E. Czuber berichtet u. a. von den Münzenwürfen des Mathematikers und Logikers A. de Morgan (1806–1899), von jenen von W. St. Jevons (1887) und von seinen umfangreichen eigenen Untersuchungen der Prager und Brünner Lotterie 1754–1886 (E. Czuber, 1899, 1914). – In seinen «Lettres sur la théorie des probabilités» von 1846 illustriert A. Quetelet seine Ausführungen zur Binomialverteilung mit den Resultaten von 4096 Ziehungen aus einer Urne mit 40 weissen und 40 schwarzen Kugeln (2066 «weiss»). – In der angesehenen «Zeitschrift für Mathematik und Physik» publiziert Otto Meissner 1913 die Ergebnisse seiner 4320 Würfe mit jeweils 4 Würfeln und stellt nach gründlicher statistischer Überprüfung fest, dass seine Beobachtungsreihe «mit der Theorie . . . in völliger Übereinstimmung steht». – Der Psychologe K. Marbe (1869–1953) wertet die «393 216 ersten Rot- und Schwarzergebnisse des Roulettespiels aus der «Baden-Badener Spielbankzeitung» 1934/36 aus (K. Marbe, 1938), kommt dabei aber allerdings zu Folgerungen, denen die mathematischen Statistiker widersprechen müssen (z. B. A. Schwarz, 1954). – Der englische Statistiker J.E. Kerrich schliesslich hat 1941, während seiner Internierung in Dänemark, 10 000 Münzenwürfe durchgeführt (5067 «Kopf»), ferner zahlreiche Würfe mit einer «nicht-idealen» Münze und 5000 Urnenziehungen. Seine Resultate hat er als Grundlage zu einem originellen, aber vielerorts wohl kaum beachteten Buch «An introduction to the theory of probability» verwendet (J.E. Kerrich, 1950).

Wir sehen, es ist in der Tat doch gar nicht so seltsam, ganz geduldig umfangreiche Serien von Zufallsexperimenten durchzuführen. Solche Versuchsreihen sind wohl meistens «aus dem Bedürfnis hervorgegangen, *zwischen der Theorie und der Wirklichkeit ein Bindeglied herzustellen* und dadurch den Schlüssen von der Erfahrung auf die zugrundeliegenden Urteilsmaterien eine Basis zu verleihen», wie E. Czuber (1899) schreibt, ein Mathematiker, der sich zeitlebens mit den Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auseinandergesetzt hat und zu seiner Zeit als unbestrittene Autorität auf diesem Gebiet gegolten hat. Wen wundert's da noch, dass selbst der Referent eines Hauptvortrages an der Jubiläumstagung «100 Jahre Deutsche Mathematiker-Vereinigung» in Bremen 1990 (!) einleitend auf ein von ihm angeregtes «Thumtack Experiment» zu sprechen gekommen ist: 25 944 Würfe mit einem Reissnagel ergaben einen Schätzwert von 0,5386 für die Wahrscheinlichkeit der Position «Spitze nach oben»! (R. Pyke, 1992). *Ohne* solche empirisch gewonnenen Schätzwerte kann natürlich auch der heutige mathematische Statistiker *keine geeigneten Modelle* für eine konkrete Situation erarbeiten – auch wenn er seiner Theorie vertraut und seinen Studenten vielleicht nicht mehr jenen Ratschlag erteilt, den ihnen noch G.U. Yule in seinem Lehrbuch gibt: «but the student is strongly recommended to carry out a few series of such experiments personally, in order to acquire confidence in the use of the theory» (G.U. Yule, 1929).

4 Beispiele

Selbstverständlich ist es nicht möglich, die vielen oben erwähnten «Mitteilungen», die Wolf im Laufe der Jahre veröffentlicht hat, hier in ihren Einzelheiten darzustellen. Manches davon ist übrigens auch in die oft sehr eindrücklichen Exempel seiner «Handbücher» eingegangen. Wir geben eine Auswahl und folgen zum Teil Ausführungen, die wir in anderem Zusammenhang publiziert haben (R. Ineichen, 1988, 1991a, 1991b, 1992).

4.1 Würfeln

(1) In einem seiner «Handbücher» (R. Wolf, 1869) zieht er seine Versuche von 1851 heran: Er hatte dabei 1000 Serien von Doppelwürfen mit «zwei ganz gewöhnlichen Würfeln» durchgeführt, jede dieser Serien jeweils so lang, bis er jedes der 21 Ergebnisse (1,1), (1,2), . . ., (1,6), (2,2), (2,3), . . ., (2,6), (3,3), . . ., (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (6,6) mindestens einmal erhalten hatte. Dies kostete ihn 97 899 Doppelwürfe, «noch bis auf 100 000 vermehrt, um für einzelne Resultate eine leichtere Übersicht zu erhalten.» – Unter anderem stellt er dann fest, dass die Wahrscheinlichkeit für einen «unpaaren Wurf» (zwei verschiedene Augenzahlen in beliebiger Reihenfolge – es wird also z. B. (3,4) nicht von (4,3) unterschieden) sich rasch dem wahren Wert von 5/6 = 0,8333 nähert, indem zum Beispiel schon 1000 Doppelwürfe mit diesen zwei Würfeln eine «Erfahrungswahrscheinlichkeit» von 0,836 liefern, was nur 0,32% zu gross ist, «dass dann aber in Folge der nunmehr ins Gewicht fallenden Unvollkommenheit der Versuche ein Stagnieren eintritt, und so z. B. 10 000 Versuche 0,8351 oder einen um 0,21%, ja 100 000 Versuche 0,83533 oder sogar einen um 0,24% zu grossen Wert finden lassen». Hier ist allerdings beizufügen, dass solche Schwankungen *auch* zum Erscheinungsbild der statistischen Regelmässigkeit gehören können – selbst wenn es sich um zwei ideale (und nicht um zwei «ganz gewöhnliche») Würfel handeln würde. Wolf macht keine derartigen Hinweise. In der «Mitteilung» von 1851, die den obigen Ausführungn zugrunde liegt, zeigt Wolf z. B. noch, dass die «Erfahrungswahrscheinlichkeiten», die sich aus den ersten 10 000 Doppelwürfen ermitteln lassen, bereits einen wesentlich besseren Schluss auf die zu erwartenden Ergebnisse in 100 000 Doppelwürfen gestatten, als wenn man mit den entsprechenden «mathematischen Wahrscheinlichkeiten» (die ja ideale Würfel voraussetzen) arbeitet.

(2) Dieselben Versuchsserien benützt er, um zu illustrieren, *wie selten* doch *extreme Fälle* auftreten: Aus den oben in (1) mitgeteilten Angaben geht hervor, dass im Mittel 97,899 Würfe notwendig waren, um jeden der möglichen Würfe (1,1), (1,2), . . ., (5,6), (6,6) mindestens einmal zu erhalten. (Auf die Reihenfolge ist dabei nicht geachtet worden: Es wurde z. B. (5,6) und (6,5) als dasselbe Ergebnis betrachtet). «Es mag diesem Resultat beigefügt werden, dass, während theoretisch genommen jene Zahl zwischen 21 und ∞ schwanken könnte, sie factisch bei allen 1000 Versuchen (d. h. Serien) nie unter 34 und nie über 341 . . . ging» (R. Wolf, 1869). Er hat auch gleich ein weiteres *ganz extremes*

Beispiel zur Hand: «So ist z. B. beim Austeilen eines Spieles von 52 Karten unter 4 Spielern ... unter 2230 Quadrillionen möglicher Fälle nur ein Fall vorhanden, in dem jeder Spieler nur eine Farbe erhält, und doch soll sich dieser Fall ... vor Kurzem in Husum wirklich ereignet haben – dürfte nun aber allerdings binnen Tausenden von Jahren nicht wieder vorkommen» (R. Wolf, 1869). – Mit der angegebenen Wahrscheinlichkeit können wir uns sofort einverstanden erklären: Man hat zu rechnen $(13!)^4 \cdot 4! : 52!$, was rund $4{,}5 \cdot 10^{-28}$ ergibt oder eben 1:2230 Quadrillionen. – Der Nachsatz ist indessen *falsch*: Dieses Ereignis kann trotz seiner äusserst kleinen Wahrscheinlichkeit *schon morgen* wieder geschehen – vielleicht aber auch erst nach vielen tausend Jahren!

Überhaupt zeigen ihm seine Versuche immer wieder «schlagend, wie sogar der Zufall die Extreme scheut» (R. Wolf, 1851); gerne weist er immer wieder auf entsprechende Beispiele hin. So etwa, dass es unter 20 000 Würfen zwar doch einmal vorkam, dass dieselbe Zahl 7mal hintereinander erschien –, «was mich wegen $(1/6)^7$ = 1:279 936 nicht wenig frappierte» (R. Wolf, 1869). An anderer Stelle spricht er geradezu vom *«Abscheu der Natur vor extremen Fällen»* (R. Wolf, 1890).

(3) An guten Einfällen zur Auswertung seines überaus reichen Zahlenmaterials fehlt es Wolf nicht. Da betrachtet er z. B. 20 000 Würfe mit seinem roten Würfel (R. Wolf, 1890) und stellt auf Grund seiner Experimente fest, dass *im Mittel* 14,815 Würfe genügten, um jede der sechs möglichen Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 wenigstens einmal zu erhalten. Mit Genugtuung stellt er fest: *«ein neues eklatantes Beispiel für die Übereinstimmung zwischen Erfahrung und Theorie ...»* In der Tat ist der theoretische Wert für diese mittlere Anzahl bei einem idealen Würfel 14,700; Wolf erhält ihn – ohne einen eigentlichen Beweis zu geben – aus

$$\mu = 1 + 6/5 + 6/4 + 6/3 + 6/2 + 6/1 = 14{,}700.$$

Wir haben uns gefragt, wie man auf diesen Wert kommen kann. Ein möglicher Weg ist der folgende: Ist p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E und wiederholen wir den Versuch so lange, bis E das erste Mal eingetreten ist, so kann die mittlere Anzahl μ' der notwendigen Versuche (also die «mittlere Wartezeit» auf E) aus dem nebenstehenden Schema abgelesen werden (R. Ineichen, 1988):

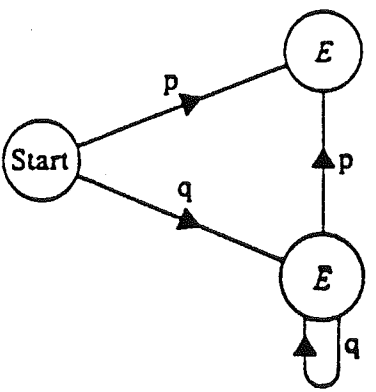

Bild 1

Mit q = 1-p liefert uns Fig. 1 sofort $\mu' = p \cdot 1 + q \cdot (1 + \mu')$, also $\mu' = 1:(1-q) = 1/p$.

Nun können wir so überlegen: Der erste Wurf liefert irgend eine Augen-

zahl. Die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Wurf eine andere Augenzahl bringt, ist 5/6; die mittlere Wartezeit auf diese andere Augenzahl beträgt also nach der obigen Berechnung von μ' gerade 1 : 5/6 = 6/5. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf diese andere Augenzahl eine neue Augenzahl folgt, die von den beiden bereits eingetroffenen verschieden ist, beträgt noch 4/6; die mittlere Wartezeit darauf also 1 : 4/6 = 6/4. So können wir fortfahren. Wenn wir nun noch 1 für den ersten Wurf addieren, so erhalten wir genau den oben für μ angegebenen Ausdruck für die *mittlere Länge einer Serie*, wenn jeweils so lange gewürfelt wird, bis jede der 6 Augenzahlen mindestens einmal erschienen ist. (Wolf sagt, bis die sogenannte «Erschöpfung» hervorgebracht ist; heute spricht man von «vollständiger Serie».)

(4) Wie bereits gesagt, hat Wolf für seine Versuche «ganz gewöhnliche Würfel» verwendet. Überprüfen wir einmal diese beiden Würfel – den weissen und den roten – an Hand der Resultate von 20 000 Würfen (R. Wolf, 1882):

Augenzahl	1	2	3	4	5	6	Total
weisser Würfel	3246	3449	2897	2841	3635	3932	20 000
roter Würfel	3407	3631	3176	2916	3448	3422	20 000

Testen wir jetzt die Nullhypothese «Gleichverteilung» mit dem χ^2-Test: Für beide Würfel erhalten wir je ein χ^2, das uns gestattet, die Nullhypothese noch auf einem Signifikanzniveau von weniger als 0,1% zu verwerfen: Die Ergebnisse weichen also *höchstsignifikant* von der Gleichverteilung ab; in diesem Sinne waren der rote und der weisse Würfel von Wolf *schlechte* Würfel. – Später hat Wolf auch noch einen gelben und einen blauen Würfel eingesetzt. Die Zahlen, die man seinen Protokollen (R. Wolf, 1893) für je 10 000 Würfe mit jedem dieser beiden Würfel entnehmen kann, sind wesentlich besser: Mit dem χ^2-Test kann keine Abweichung von der Gleichverteilung festgestellt werden (R. Ineichen, 1988).

Diesen χ^2-Test hätte Wolf allerdings nicht durchführen können, denn er ist erst 1900 durch Karl Pearson eingeführt worden (H. Witting, 1990). Doch mit anderen, damals bereits entwickelten Methoden hätte man zeigen können – wie dies z. B. Czuber macht –, «dass man mit Sicherheit den Schluss ziehen darf, es seien die Bedingungen, welche der wahrscheinlichkeitstheoretischen Behandlung zugrunde liegen, bei den Versuchen nicht erfüllt gewesen» (E. Czuber, 1914). Die hier erwähnten «Bedingungen» meinen: «Gleiche Möglichkeit der Fälle vorausgesetzt».

(5) Wolf ist aber auf Grund seiner vielen Beobachtungen am weissen und am roten Würfel selbst zur Überzeugung gekommen, «dass die gebrauchten Würfel merklich von jenem ideellen Würfel abweichen» (R. Wolf, 1881a). Und diese merklichen Abweichungen liessen ihm offenbar keine Ruhe. Einerseits versuchte er diese zu berücksichtigen, indem er für gewisse weiterführende Untersuchungen ausdrücklich seine relativen Häufigkeiten, also seine «Erfah-

rungswahrscheinlichkeiten», verwendete (vgl. Beispiel (1) oder R. Wolf, 1881a).

Er ging aber noch weiter: Er versuchte anderseits, für seine Würfel eine Art *Theorie des «realen Würfels»* zu entwickeln. Solche Versuche, eine Theorie des «realen Würfels» aufzustellen, eines «Würfels» also, der eben kein exaktes reguläres Hexaeder mehr darstellt und allenfalls sogar inhomogen ist, begegnen uns in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung selten. J. Newton stellt in einem Manuskript aus den Jahren 1664–1666 ausdrücklich die Frage nach der Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Seitenfläche eines Parallelepipedons, also eines Parallelflachs, eines «prismatischen Würfels». Er gibt aber keine Lösung des Problems. T. Simpson (1710–1761) stellt in seinem Buch «The nature and laws of chance» von 1740 dasselbe Problem. Schon im Vorwort weist er auf dieses Problem hin, «as a very difficult one, and has not (that I know of) be answered before». Seine Lösung stellt eine reizvolle Aufgabe der sphärischen Trigonometrie dar – und sie stimmt tatsächlich, *wenn* das Parallelepipedon zu einem exakten Würfel oder zu einer ganz dünnen rechteckigen Scheibe entartet (!). Doch für allgemeinere Fälle ist sie *völlig unbrauchbar* (R. Ineichen, 1988, 1991a). Es scheint gar *nicht einfach*, für einen wohldefinierten «schlechten Würfel» auf Grund von gewissen Anfangsbedingungen und weiteren Hypothesen die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ergebnisse *a priori* anzugeben; dies wurde mir auch in Diskussionen mit theoretischen Physikern bestätigt. Soweit ich sehe, scheinen auch in der Literatur keine Lösungen zu finden zu sein, abgesehen von einigen sehr sorgfältig durchgeführten *experimentellen* Untersuchungen, die uns «Erfahrungswahrscheinlichkeiten», Schätzwerte also für die unbekannten Wahrscheinlichkeiten, liefern. So gibt z. B. E. Heilbronner (1984/85) Schätzwerte für eine ganze Serie von rechtwinkligen Parallelepipeda. Er geht auch kurz auf den Zusammenhang zwischen seinen empirisch bestimmten Resultaten und gewissen physikalischen Parametern ein und entwickelt eine Formel, die für eine ganze Serie von Resultaten Werte liefert, die gut mit den «Erfahrungswahrscheinlichkeiten» übereinstimmen. Trotzdem kommt er zum Schluss: «In view of the complexity of the problem this agreement . . . is probably nothing but a fortuitous albeit amusing coincidence, which should be taken with a hefty pinch of salt.»

Wolf (1881a) stellt nun fest: «Ja, es geben sogar die Versuche die nötigen Mittel in die Hand, die Abweichungen der gebrauchten Würfel von den ideellen annähernd zu bestimmen. Dazu misst er zunächst am Würfel die Kantenlängen; er bezeichnet sie mit 2a, 2b, 2c. – Weiter setzt er $x = a - \Delta a$, $y = b - \Delta b$, $z = c - \Delta c$ für die unbekannten Abstände des Schwerpunktes von den Seitenflächen 1, 2 und 3; mit w_i, $i = 1, \ldots, 6$, bezeichnet er die mit dem Würfel in 10 000 Würfen erhaltenen absoluten Häufigkeiten für die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Schliesslich definiert er noch durch $W = (w_1 + w_2 + \ldots + w_6) : 6$ den idealen Wert dieser absoluten Häufigkeiten für den idealen Würfel. Mit A bezeichnet er die mittlere halbe Kantenlänge, also $A = (a + b + c) : 3$.

Nun prüft er zwei durchaus plausible Hypothesen.

Seine erste Hypothese lautet: *«. . . es sei die Chance eines Wurfes zum Abstand des Schwerpunktes von der Gegenseite reziprok.»* Sie führt sofort auf die folgenden sechs Gleichungen für die vier Unbekannten x, y, z und α (Proportionalitätsfaktor):

$$w_1 = \frac{\alpha}{2a-x};\ w_2 = \frac{\alpha}{2b-y};\ w_3 = \frac{\alpha}{2c-z};\ w_4 = \frac{\alpha}{z};\ w_5 = \frac{\alpha}{y};\ w_6 = \frac{\alpha}{x}\ \text{(I)}.$$

Die zweite Hypothese von Wolf besagt, es nehme *«die Chance in demselben Verhältnis zu, in welchem der Abstand des Schwerpunktes von der Gegenseite abnehme . . .»* Sie führt wiederum auf sechs Gleichungen, diesmal für die Unbekannten Δa, Δb, Δc und β (Proportionalitätsfaktor):

$$w_1 = W + \beta\,(A - a - \Delta a); \qquad w_2 = W + \beta\,(A - b - \Delta b);$$
$$w_3 = W + \beta\,(A - c - \Delta c); \qquad w_4 = W + \beta\,(A - c + \Delta c); \qquad \text{(II)}.$$
$$w_5 = W + \beta\,(A - b + \Delta b); \qquad w_6 = W + \beta\,(A - a + \Delta a)$$

Wolf bestimmt dann die Resultate nach den «gewöhnlichen Regeln». Überprüft man die von ihm mitgeteilten Resultate, so stellt man fest, dass er eine Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt hat. Mit den so erhaltenen Werten für die Unbekannten rechnet er rückwärts aus (I) bzw. (II) die ausgeglichenen Werte w_i' für die erste Hypothese und die ausgeglichenen Werte w_i'' für die zweite Hypothese. Dann beurteilt er die Güte der beiden Hypothesen, also die Güte der Anpassung der durch die w_i gegebene Verteilung an jene, die durch w_i' bzw. w_i'' gegeben wird, indem er den mittleren quadratischen Fehler berechnet. Die Ergebnisse berechtigen ihn zur Aussage, dass die erste Hypothese *«nicht schlecht ist»* und die zweite *«sogar in recht erfreulicher Weise die bei den gebrauchten Würfeln vorkommenden Unsicherheiten erklärt und somit auch bestimmt.»* – Natürlich gelten diese Resultate zunächst nur für *seine* beiden Würfel!

(6) Wolfs Zahlenmaterial und sein Einfallsreichtum sind nahezu unerschöpflich:

– Er berechnet z. B. weiter die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel in 6 Würfen alle sechs Augenzahlen zu erhalten und gibt dafür den Wert 0,154, den man natürlich leicht aus $6!(1/6)^6$ erhalten kann. «Man kann also erwarten», schreibt er (R. Wolf, 1890), «unter 20 000 Versuchen etwa 308mal alle 6 Würfe nacheinander zu werfen, und in der Tat geschah es bei einer meiner Versuchsreihen 279mal, bei einer andern 314mal. – In diesen total 40 000 Würfen hat er indessen kein einziges Mal die 6 Augenzahlen in der natürlichen Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5, 6 erhalten.

– «Sucht man hingegen die Wahrscheinlichkeit, jeden der 6 möglichen Würfe in 10 Würfen wenigstens einmal zu erhalten», so sind auf 20 000 entsprechende Versuche nach der Theorie etwa $20\,000 \cdot 0{,}272 = 5440$ Erfolge zu erwarten, während er «in Wirklichkeit» 5297 Erfolge hatte (R. Wolf, 1890). Für die genannte Wahrscheinlichkeit von 0,272 gibt er die Formel

$$p = 10! \cdot [6/5! + 30/(4!2!) + 15/(3!3!) + 60/(3!2!2!) + 15/(2!2!2!2!)] : 6^{10} = 0{,}272.$$

Man kann diesen Ausdruck leicht verstehen, wenn man folgendes bedenkt: Die Anzahl der gleichmöglichen Fälle ist 6^{10}. Der Term $10! \cdot 6/5!$ gibt uns die Anzahl der Fälle an, in denen eine bestimmte Augenzahl genau 5mal, die andern je einmal vorkommen; analog gibt uns der Term $10!30/(4!2!)$ an, wie oft eine bestimmte Augenzahl genau 4mal, eine andere bestimmte Augenzahl genau 2mal und die andern je einmal erscheinen usw.

(7) Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass man die umfangreichen Tabellen von *einzeln* protokollierten Wurfergebnissen (R. Wolf, 1881b, 1893) auch als Tabellen von zufällig angeordneten Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ansehen kann. Auszüge aus diesen Tabellen ermöglichen eine gewisse Beurteilung und eine gute Illustration von vielen anderen Fragen im Zusammenhang mit dem Werfen von Spielwürfeln, z. B. des Problems von de Méré. Wir haben darüber an anderer Stelle berichtet (R. Ineichen, 1988, 1991b).

4.2 π-Bestimmung mit einer Monte-Carlo-Methode

G.L.L. Buffon (1707–1788) beschreibt in seinem «Essai d'arithmétique morale» von 1777 das sogenannte «Nadelproblem»: «Angenommen, man wirft in einem Zimmer, dessen Fussboden schlicht aus parallelen Brettern besteht, einen Stab in die Luft und ein Spieler wettet, dass der Stab keine der Parallelen des Fussbodens kreuzt, während der andere darauf wettet, dass der Stab irgendwelche dieser Parallelen kreuzt. Man fragt nach der Gewinnaussicht der beiden Spieler.» (Text aus I. Schneider, 1988). – Experimentell wird dieses Problem meistens so behandelt, dass an Stelle des Fussbodens eine Platte verwendet wird, auf der eine Schar von Parallelen gezeichnet ist, die jeweils den Abstand a von ihren Nachbarn haben, und statt des Stabes wirft man eine Nadel der Länge c auf die Platte. Buffon hatte über dieses «problème de l'aiguille» bereits 1733 der Pariser Académie des Sciences vorgetragen. Man findet die Lösung dieses Problems – übrigens eines der frühesten über geometrische Wahrscheinlichkeiten – fast in jedem Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Für $c \leq a$ ist die Wahrscheinlichkeit p, dass die Nadel eine der Parallelen trifft, gegeben durch $p = 2c : \pi a$.

Wolf hat die Aufgabe im Buch «Un million de faits» von L. Lalanne gefunden (3. Auflage, Paris 1843), allerdings ohne Begründung des Resultates. Lalanne weist darauf hin, dass mit Hilfe eines entsprechenden Experimentes «le rapport de la circonférence au diamètre avec d'autant plus d'approximation que les épreuves auront été multipliées» bestimmt werden könne. (Schon bei P.S. de Laplace findet man in seiner «Théorie analytique des probabilités» von 1812 einen Hinweis auf diese Möglichkeit.) Die Bemerkung von Lalanne hat Rudolf Wolf offensichtlich dazu angeregt, mit insgesamt 50 Versuchen zu je 100 Nadelwürfen – «nach jedem Wurf die Tafel etwas drehend» – einen Näherungswert von π zu bestimmen Er ist auf $\pi = 3{,}1596 \pm 0{,}0518$ gekommen, «so dass also wirklich π innerhalb der Fehlergrenze richtig bestimmt worden ist» (R. Wolf, 1869 bzw. 1850). Wolf hat bei seinen Versuchen eine Bemerkung

von Lalanne berücksichtigt, wie das Experiment einzurichten sei, um bei einer gegebenen Anzahl Versuche eine möglichst gute Übereinstimmung mit der Theorie erwarten zu dürfen. Im Anschluss an seine «Mitteilung» von 1850 teilte ihm Rudolf Merian, Professor der Mathematik in Basel, die theoretische Lösung mit (wir haben das Resultat oben angegeben) und machte ihn darauf aufmerksam, dass die Bemerkung von Lalanne über die günstigste Einrichtung des Versuches falsch sei. Merian gab ihm auch die richtigen, theoretisch begründbaren Hinweise für die beste Versuchseinrichtung, nämlich, dass die Länge der Nadel gleich dem Abstand der Parallelen sein müsse. Wolf bestritt dies und versuchte die Meinung von Lalanne zu verteidigen, indem er eine neue Versuchsserie durchführte, diesmal gemäss den Angaben von Merian. Der Zufall lieferte ihm tatsächlich ein schlechteres Resultat (R. Wolf, 1850b). – Indessen hat Merian doch recht, wie man ja nachrechnen kann (vgl. z. B. E. Czuber, 1884). – Wolf hat hier die Beweiskraft eines Zufallsexperimentes doch sichtlich überschätzt. Auch an anderen Stellen seiner Publikationen ist er nicht immer frei von solcher Überschätzung: Er – der Naturforscher! – traut seinen Experimenten gelegentlich mehr Aussagekraft zu, als dies der mathematische Statistiker tun würde, der wohl manchmal etwas vorsichtiger wäre.

Methoden, die erlauben, ein mathematisches Problem, das an sich eine wohl determinierte Lösung hätte, mit Hilfe eines Zufallsexperimentes zu lösen, werden heute als «Monte-Carlo-Methoden» bezeichnet. Die systematische Entwicklung solcher Methoden hat erst 1944 begonnen; auch der Name stammt aus jenem Jahr (vgl. z. B. J.M. Hammersley, D.C. Handscomb, 1964). – Experimentelle π-Bestimmungen sind verschiedentlich durchgeführt worden; die Untersuchungen von Wolf aus dem Jahre 1850 scheinen indessen die ersten zu sein. An späteren sind u. a. zu nennen (N.T. Gridgeman, 1960): Smith (1855; 3204 Würfe; 3,1553), De Morgan (1860; 600 Würfe; 3,137), Fox (1864; 1030; 3,1595), Lazzerini (1901; 3408; 3,1415929 [!]). – Von Fox kursiert auch noch ein anderer Wert, nämlich 3,1419 (B.W. Gnedenko, 1968).[2]

Verschiedene Autoren zweifeln an gewissen Resultaten: «The results of Fox and Lazzerini are open to skepticism» (B.V. Gnedenko, 1968, ähnlich auch N.T. Gridgeman, 1960). – Eine moderne Darstellung eines durchgeführten Nadel-

[2] Das Buffon-Experiment hat wohl gelegentlich wieder Mathematiker interessiert. Als uns Prof. Paul Finsler (1894–1970) an der Universität Zürich 1946/47 «Wahrscheinlichkeitsrechnung» vortrug, berechnete er mit uns unter anderem, wie viele Nadelwürfe auszuführen wären, um mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit w aus der ermittelten relativen Häufigkeit einen Näherungswert von π zu erhalten, der innerhalb gewisser Fehlergrenzen liegt: Ist $c = a/2$ und möchte man z. B. mit $w = 0{,}99$ einen Näherungswert erhalten, der zwischen $\pi - 0{,}005$ und $\pi + 0{,}005$ liegt, so müsste man über 5,6 Millionen Würfe ausführen; wäre man mit einem Näherungswert zufrieden, der zwischen $\pi - 0{,}05$ und $\pi + 0{,}05$ liegt, so wären über 56 000 Würfe notwendig. – Prof. Finsler berichtete uns aber auch mehrmals, wie weit er nun in der π-Bestimmung mit dem zu Hause immer wieder weitergeführten Buffon-Experiment gekommen sei. Leider liessen sich diese Resultate unter den von Prof. Finsler hinterlassenen Notizen zur genannten Vorlesung, die im Archiv des Mathematischen Institutes aufbewahrt werden, nicht auffinden. (Prof. J.J. Burckhardt hat mir in freundlicher Weise den Zugang zu diesen Unterlagen ermöglicht.)

experimentes, in welcher auch gewisse Unvollkommenheiten diskutiert und korrigiert werden, gibt B.C. Kahan (1961). – Abschliessend darf man sicher dem Urteil von A.J. Izenman (1985) beipflichten, der von Rudolf Wolf in diesem Zusammenhang unter anderem sagt: «his estimation procedure was pure Monte Carlo, and he is . . . the first to estimate π using such a technique».

4.3 Versuche zum Rencontre-Problem

Wolf beschreibt das «Jeu de rencontre» als ein Spiel, «wo zwei Personen dieselbe Anzahl gleichbezeichneter Karten, nachdem sie dieselben gehörig gemischt haben, der Reihe nach auflegen, und dabei zusehen, ob irgend zwei entsprechende Karten zusammentreffen oder nicht; im ersten Fall hat je nach getroffener Abrede die Eine, im zweiten Fall die Andere gewonnen» (R. Wolf, 1853). – Ein derartiges Zusammentreffen wird dann als *«rencontre»* bezeichnet.

Das Spiel geht auf ein Glücksspiel zurück, das unter dem Namen *«Jeu de Treize»* bereits von Rémond de Montmort (1678–1719) in seinem «Essay d'Analyse sur les jeux de Hasard» (1708 bzw. 1713 behandelt worden ist. Eine einfache Variante dieses Spiels ist z. B. jene, wo man aus einem Spiel von 52 Karten die 13 Karten einer Farbe entnimmt, sie mischt und dann der Reihe nach auflegt. Dieses Spiel gilt als gewonnen, wenn mindestens eine Karte den ihrem Rang entsprechenden Platz einnimmt. Montmort gibt in der ersten Auflage seines Werkes (1708) noch keinen allgemeinen Beweis für die mitgeteilten Resultate; der zweiten Auflage (1713) fügt er einen Brief mit der allgemeinen Lösung bei, den er von Nikolaus I Bernoulli (1687–1748) – einem Neffen der beiden berühmtesten Bernoulli, Jakob I und Johann I – erhalten hatte. – Obwohl diese Lösung von Nikolaus Bernoulli nur relativ einfache Kombinatorik erfordert, können wir sie hier nicht darstellen: Eine einigermassen verständliche Darstellung würde zuviel Platz beanspruchen. Man findet sie im Nachdruck von Montmorts Buch (R. de Monmort, 1713) oder – in modernerer Präsentation – z. B. bei W. Feller (1957). – Das Problem ist übrigens von verschiedenen bedeutenden Mathematikern wieder aufgegriffen worden, so von Abraham de Moivre (1667–1754), von Leonhard Euler (1707–1783) und von Johann Heinrich Lambert (1728–1777). Man kann die Aufgabe auch in verschiedenen amüsanten Einkleidungen bringen, etwa: Jemand hat n Briefe und die zugehörigen Kuverts geschrieben; er steckt die Briefe ganz zufällig in die einzelnen Kuverts. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Brief im richtigen Kuvert steckt?

Wolf untersucht das Rencontre-Problem in der eingangs beschriebenen Form zuerst für den Fall, wo jeder der beiden Spieler nur *drei* Karten hat, dann für jenen, da jeder der Spieler *zehn* Karten hat. Er gibt in seinen Tabellen einerseits die «mathematischen Wahrscheinlichkeiten» an, andererseits die «Erfahrungswahrscheinlichkeiten», die er für das System der 3 Karten und für jenes mit 10 Karten in je 1000 Spielen gewonnen hat. Der folgende Text aus

seiner Publikation von 1853 gibt wieder einen guten Einblick in die Fragen, die ihn interessierten: «Jeder beliebigen Ordnung der einen Karten gegenüber bieten bei diesem Spiel die andern Karten so viele Fälle als Permutationen dar, und da die Zahl der möglichen Permutationen mit der Anzahl der Karten rasch zunimmt, so ist dieses *Jeu de rencontre ganz besonders geeignet, um zu prüfen, in wiefern die nötige Anzahl von Versuchen, um durch Erfahrung die Wahrscheinlichkeit eines günstigen Ereignisses zu bestimmen, mit der Anzahl der möglichen Fälle zusammenhängt.* So geben z. B. 3 Karten nur 6, 10 Karten dagegen 3 628 800 Permutationen; wenn also die angedeutete Abhängigkeit statt hat, wenn z. B. die nöthige Anzahl der Versuche um eine mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit übereinstimmende Erfahrungswahrscheinlichkeit zu erhalten, in direktem Verhältnis mit der Anzahl der möglichen Fälle steht, wie man etwa glauben sollte, so muss sich dies bei der Vergleichung der Versuche mit 3 und 10 Karten sehr evident herausstellen.»

Dies hat sich nun allerdings nicht herausgestellt: Beide Systeme, also jenes mit 3 Karten und jenes mit 10 Karten, ergeben ihm schon bei 100 Versuchen in den «Erfahrungswahrscheinlichkeiten» Approximationen für die «mathematischen Wahrscheinlichkeiten, die durchaus von ähnlich guter Qualität sind». Dafür ein Zahlenbeispiel: Die «mathematischen Wahrscheinlichkeiten», bei 3 bzw. 10 Karten mindestens ein rencontre zu haben, betragen 0,667 bzw. 0,632; die von Wolf nach 100 Versuchen erhaltenen «Erfahrungswahrscheinlichkeiten» sind 0,700 bzw. 0,650. – Und nach 1000 Versuchen hat Wolf als «Erfahrungswahrscheinlichkeiten» 0,684 bzw. 0,649 erhalten. – «Es scheint also hervorzugehen», schreibt Wolf, «dass die vermuthete Abhängigkeit entweder gar nicht besteht, oder doch nur eine untergeordnete Rolle spielt . . .». An sich wäre es auch zur Zeit von Wolf möglich gewesen, diese Frage von der theoretischen Seite her anzupacken: Es hätte sich dann gezeigt, dass eine gewisse Abhängigkeit besteht, dass sie aber von komplizierterer Art ist, als die von Wolf allenfalls in Erwägung gezogene direkte Proportionalität.

5 Schlussbemerkungen

«Grössere Versuchsreihen . . . scheinen in früherer Zeit nicht ausgeführt worden zu sein, ja es dürften meine «Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit» (Bern. Mitth. 1849–53) und: Drei Mittheilungen über neue Würfelversuche (Zürch. Viert. 1881–83) so ziemlich *die ersten* derselben repräsentieren . . .» (R. Wolf, 1890). – Diese Feststellung durfte Wolf sicher zu Recht machen; sie ist ihm schon früh von zuständiger Seite bestätigt worden:

«Weitaus die umfangreichsten Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit hat Wolf durchgeführt», schreibt Emanuel Czuber im «Bericht über die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen», den er der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet (E. Czuber, 1899).

In der «Zeitschrift für Mathematik und Physik» werden einige seiner «Mitteilungen» ausführlich besprochen und der Rezensent weist darauf hin, wie gut solche Untersuchungen natürlich herauskommen, «wenn *ein Mann von der ehernen Ausdauer,* die Jedermann an dem verdienten Direktor der Züricher Sternwarte kennt und bewundert, eine *Experimentaluntersuchung* über diesen Gegenstand in Angriff nimmt». (S. Günther, 1883)

Der belgische General J.B.J. Liagre, «Correspondant de l'Académie des Sciences» und unter anderm Verfasser eines 1852 in Bruxelles erschienenen «Calcul des probabilités et théorie des erreurs», schreibt an Wolf über die 1881–83 publizierten «Würfelversuche»: «J'ai examiné, avec beaucoup de plaisir et d'intérêt, les consciencieuses recherches auxquelles vous vous êtes livré, et les ingénieuses remarques auxquelles vous avez été conduit. – Je me ferai un plaisir d'en rendre compte et d'en présenter l'analyse à mes confrères, dans la prochaine séance de l'Académie.» (R. Wolf, 1881)

Jakob Bernoulli, der «Begründer der mathematischen Statistik» (B.L. van der Waerden, 1975), hat seine Darstellung der Lehre von der Wahrscheinlichkeit ausdrücklich als *«Ars conjectandi sive stochastice»* – als *«Vermuthungs- oder Mutmassungskunst»* – bezeichnet (J. Bernoulli, 1899), und in den letzten Jahrzehnten hat sich «Stochastik» als zusammenfassende Bezeichnung für Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik durchgesetzt: eigentlich eine sehr alte Ausdrucksweise, trifft man doch bereits in einem Dialog Platos (im PHILEBOS) auf στοαστικη' (τε'χυη) im Sinne von «Mutmassen» bzw. «Mutmassungskunst». Und dieses «Mutmassen», dieses «Vermuten» hat Rudolf Wolf mit seinen umfangreichen und sorgfältig ausgewerteten Zufallsexperimenten in sehr reichem Masse getrieben: *ein wahrhafter «Stochastiker», allerdings einer, der die experimentelle Seite wesentlich stärker betont hat als die theoretische Durchleuchtung seiner Experimente.*

6 Literatur

Bernoulli, J. (1899), Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). Ostwalds Klass. d. ex. Wissensch. Nr. 108. W. Engelmann, Leipzig. S. 75, 90–91.

Bernoulli, J. (1975), Die Werke von Jakob Bernoulli. Hrsg. Naturforsch. Ges. Basel; Bd. 3, bearb. von B.L. van der Waerden. Birkhäuser Verlag, Basel. S. 88.

Borel, E. (1928), Le Hasard. Félix Alcan, Paris. S. 56.

Brunner, W. (1939), Rudolf Wolf. In: E. Fueter (Hrsg.), Grosse Schweizer Forscher. Atlantis Verlag, Zürich. S. 231–232.

Czuber, E. (1884), Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte. Teubner, Leipzig. S. 91.

Czuber, E. (1899), Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. Bericht, erstattet der Dt. Math.-Verein. Teubner, Leipzig. S. 87–91.

Czuber, E. (1914), Wahrscheinlichkeitsrechnung Bd. 1. Teubner, Leipzig. S. 157–161, 167–169.

Feller W. (1957), An Introduction to Probability Theory and its Applications Vol. I. John Wiley & Sons, London. S. 90–91, 97–99.

Freudenthal, H. (1972), The «empirical Law of large numbers» or «the stability of frequencies». Educ, stud. in Math. *4:* 484–490.

Gnedenko, B.V. (1968), The Theory of Probability. Chelsea Publ. Comp. New York. S. 50–51.

Gridgeman, N.T. (1960), Geometric Probability and the number π. Scripta Math. *XXVIII:* 183–195.
Günther, S. (1983), Drei Mitteilungen über neue Würfelversuche. Zeitschr. f. Math. u. Phys. *38:* 203–205.
Hammersely, J.M., Handscomb, D.C. (1964), Monte Carlo Methods. Methuen London. S. 6–7.
Heilbronner, E. (1984/85). Crooked dice. Recreational Mathematics *17:* 177–183.
Ineichen, R. (1987), Schwierigkeiten mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff – ein Blick in die Geschichte. Zentralbl. für Did. d. Math. *19:* 103–107.
Ineichen, R. (1988), Warten auf Erfolg – Theorie und Praxis. Did. d. Math. *16:* 247–261.
Ineichen, R. (1991a), Der schlechte Würfel. Hist. Math. *18:* 253–261.
Ineichen, R. (1991b), Über das Würfelproblem von de Méré. Did. d. Math. *19:* 1–13.
Ineichen, R. (1992): «Erfahrungswahrscheinlichkeiten». mathematica didactica *15*/1: 22–33.
Izenman, A.J. (1985), J. R. Wolf and the Zürich Sunspot Relative Numbers. The Mathematical Intelligencer *7:* 27–33.
Kahan, B.C. (1961), A Practical demonstration of a Needle Experiment Designed to give a Number of Current Estimates of π. Journ. of the Royal Stat. Soc. *124:* 227–239.
Kerrich, J.E. (1950), An experimental introduction to the Theory of Probability. Belgisk Import Compagni Copenhagen. S. 14–35.
Keynes, J.M. (1973), A Treatise on Probability. The coll. writings, vol. III. Macmillan London. S. 395–396.
Marbe, K. (1938), Das Ausgleichsprinzip in der Statistik. Beck'sche Verlagsbuchhandlung München. S. 115.
Meissner, O. (1913), Würfelversuche. Zeitschr. f. Math. u. Phys. *62:* 149–156.
Montmort, P.R. (1713), Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard. (Anonym publiziert.) Quillau Paris. (Repr. Chelsea New York 1980). S. 130–143, 301–303.
Pyke, R. (1992), Probability in Mathematics and Statistics: A Century's Predictor of Future Directions. In: Jber. d. Dt. Math.-Verein Jubiläumstagung 1990. Teubner, Stuttgart. S. 239–264.
Quetelet, A. (1846), Lettres sur la Théorie des Probabilités. Hayez, Bruxelles. S. 90–97.
Schneider, I. (1988), Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933 – Einführungen und Texte. Wissenschaftl. Buchges., Darmstadt. S. 494–496.
Schwarz, A. (1954), Glücksspiele und Statistik. Schweiz. Zeitschr. f. Volkswirtsch. und Stat. *90:* 483–495.
van der Waerden, B. L. (1975), Historische Einleitung. In: Bernoulli, J. (1975). S. 2.
Witting, H. (1990), Mathematische Statistik. In: Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990. Festschrift zum Jubiläum der Dt. Math.-Verein. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig. S. 781–815.
Wolf, R. (1849–53), Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Mitt. der Naturforsch. Ges. Bern. (1849a) *156/157:* 97–101; (1849b) *166:* 183–185; (1850a) *176/177:* 85–88; (1850b) *193/194:* 209–212; (1851) *197/199:* 17–32; (1853) *268/269:* 25–28.
Wolf, R. (1869), Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie Bd. 1. F. Schulthess, Zürich. S. 62–70, 266–279. (Von diesem Handbuch erschienen auch noch Exemplare mit dem Jahrgang 1870).
Wolf, R. (1881–83, 1893), Astronomische Mitteilungen. Vierteljahresschr. der Naturforsch. Ges. Zürich. (1881a) *26*: 126–136; (1881b) *26*: 201–224; (1882) *27*: 241–262; (1883) *28*: 118–124; (1893) *38*: 10–32.
Wolf, R. (1890), Handbuch der Astronomie 1. Halbbd. F. Schulthess, Zürich. S. 117–138.
Yule, G. U. (1929), Theory of Statistics. Griffin, London. S. 258.

Prof. Dr. Robert Ineichen, Inst. de Math. de l'Université, CH-1700 Fribourg