

Fibonacci-Zahlen¹

Martin Huber, Zürich

Nach einer kurzen Einführung in Leben und Werk des italienischen Mathematikers Leonardo Fibonacci (ca. 1170–1240) wird seine berühmte Kaninchenaufgabe samt ihrer Lösung vorgestellt. Diese Lösung besteht aus einer rekursiv beschriebenen Folge von Zahlen, welche heute «Fibonacci-Zahlen» genannt werden. Das nach Binet benannte explizite Bildungsgesetz für die Fibonacci-Folge enthält die Verhältniszahl τ des goldenen Schnittes. Ein weiterer interessanter Zusammenhang zwischen dem goldenen Schnitt und der Fibonacci-Folge wurde schon von Kepler in seiner «Weltharmonik» beschrieben.

Vor diesem Hintergrund wird dann das Phänomen beleuchtet, dass die Fibonacci-Zahlen bei der Blatt- und Blütenanordnung (sog. Phyllotaxis) eine ausgezeichnete Rolle spielen. So erscheinen sie z.B. beim Blütenstand einer Sonnenblume. Die Blüten sind in zwei Scharen von Spiralen angeordnet, und die Anzahl dieser Spiralen sind – von seltenen Ausnahmen abgesehen – zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen.

Fibonacci Numbers

After a brief introduction to the life and the work of the Italian mathematician Leonardo Fibonacci (about 1170–1240) his famous rabbit problem and its solution are presented. This solution consists of a recursively described sequence of numbers, to-day called «Fibonacci numbers». The explicit formula for the Fibonacci sequence is named after Binet; it contains the ratio τ of the golden section. Another interesting connection between the golden section and the Fibonacci numbers was already described by Kepler in his «Harmonices mundi».

This background may help to explain the important role that Fibonacci numbers play in the leaf and floret arrangement of plants (phyllotaxis). For instance, they appear in the capitulum of compositae; the florets of a sunflower head are arranged in two families of spirals, and the numbers of these spirals are, with rare exceptions, two consecutive Fibonacci numbers.

1 Leonardo Fibonacci

Leonardo Fibonacci (L. da Pisa) wurde um 1170 in Pisa geboren und lebte bis nach 1240. Er war Kaufmann und zugleich der erste bedeutende Mathematiker des Abendlandes. «Fibonacci» ist eine Kurzform für «filio Bonaccio» (Sohn des Bonaccio). Leonardos Handelsreisen brachten ihn in Kontakt mit der arabischen Welt und damit mit den dort gebräuchlichen indisch-arabischen Rechenmethoden. Er erkannte deren Überlegenheit über das herkömmliche Rechnen mit dem Abakus und propagierte die neuen auf dem indischen Ziffernsystem beruhenden Algorithmen in seinem Werk «Liber abbaci» (1202).

Leonardo lebte in einer Zeit des geistigen Aufbruchs, einer Art Vor-Renaissance; es ist die Zeit der Scholastik und der ersten europäischen Universitätsgründungen. Er hatte Kontakt mit dem Hof des Staufener-Kaisers Friedrich II., welcher die Wissenschaften und Künste in hohem Mass förderte. Leonardo

¹ Ausarbeitung der Antrittsvorlesung des Autors als Privatdozent an der Universität Zürich (6. 5. 1991)

widmete Friedrich sein bedeutendstes mathematisches Werk, das «Liber quadratorum» (1225). In diesem Buch über pythagoräische Zahlentripel zeigt er sich als Meister der Zahlentheorie. Leben und Werk des Leonardo Fibonacci sind ausführlich dargestellt in (Vogel, 1971).

2 Die Kaninchen-Aufgabe

Im «Liber abbaci» findet man auch die berühmt gewordene Kaninchenaufgabe, deren Lösung aus einer Folge von Zahlen besteht, welche heute *Fibonacci-Zahlen* genannt werden. Es geht dabei um ein Modell, welches die Vermehrung von Kaninchen beschreibt. Dieses Modell beruht auf den folgenden, stark vereinfachenden Annahmen:

- (1) Jedes Weibchen ist am Ende des zweiten Lebensmonats zum ersten Mal gebärfähig;
- (2) jedes Weibchen bringt von da an am Ende jedes Monats ein neues Paar zur Welt;
- (3) kein Kaninchen stirbt.

Geht man nun davon aus, dass am Anfang des ersten Monats genau ein neugeborenes Paar vorhanden ist, so erhält man die in der folgenden Tabelle dargestellte Entwicklung:

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Anzahl Paare	1	1	2	3	5	8	13	21	...

Die Anzahl der Paare in einem beliebigen Monat ist gleich der Summe der geschlechtsreifen und der noch nicht geschlechtsreifen Paare. Die noch nicht geschlechtsreifen Kaninchen sind aber genau diejenigen, welche am Ende des Vormonats geboren wurden. Nach den Annahmen (1), (2), (3) entspricht ihre Anzahl genau der Anzahl der schon im vorletzten Monat vorhandenen Kaninchen. Um diesen Sachverhalt formal beschreiben zu können, bezeichnen wir die Anzahl der im n -ten Monat lebenden Kaninchenpaare mit f_n .

Damit gilt:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} ; n \geq 2$$

Für die vollständige Beschreibung der Lösung der Kaninchenaufgabe werden noch die Anfangswerte $f_1 = f_2 = 1$ benötigt. Die Folge $(f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$ heisst *Fibonacci-Folge*. Wir werden sie gelegentlich mit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abkürzen; dabei bezeichnet \mathbb{N} die Menge aller positiven ganzen Zahlen. Die angegebene Definition der Fibonacci-Folge ist *rekursiv*. Sie gestattet sofort, einige weitere Folgenglieder zu berechnen:

n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
f_n	21	34	55	89	144	233	377	610	987	...

3 Die Formel von Binet

Für eine Diskussion des Wachstumsverhaltens einer Folge ist die rekursive Darstellung ungeeignet. Zu diesem Zweck sollte das n -te Folgenglied durch einen Term in n ausgedrückt werden. Eine solche Darstellung heisst *explizit*. Die explizite Formel für die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird nach Binet benannt. Sie lautet:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \text{ für alle } n \text{ aus } \mathbb{N}.$$

Einen Beweis für die verblüffende Tatsache, dass die rechte Seite mit dem n -ten Glied der Fibonacci-Folge identisch ist, findet man etwa in (Beutelspacher und Petri, 1989). Wir bemerken, dass der Term $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ für wachsendes n betragsmässig rasch sehr klein wird und zudem bei jedem Schritt das Vorzeichen wechselt. Für grosse n ist der wesentliche Term somit $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Dies ist aber eine geometrische Folge; das Wachstum der Fibonacci-Folge ist also im wesentlichen exponentiell. Exponentielles Wachstum ist aber gleichbedeutend mit Wucherung; der medizinische Fachterm dafür ist *Proliferation*. Eine Darstellung dieses Begriffs beabsichtigt der Künstler Mario Merz laut Jurybericht, wenn er als Schmuck für die Westfassade des Zürcher Hauptbahnhofs ausgestopfte Vögel mit aufgemalten Fibonacci-Zahlen aufhängen will; vgl. (NZZ). Die folgenden Abschnitte werden zeigen, dass eine solche Sichtweise einseitig ist; die Fibonacci-Zahlen können genau so gut als Zeichen für *Harmonie* und *Ordnung* gelten.

4 Der Goldene Schnitt

Der Quotient $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der im obigen Abschnitt betrachteten geometrischen Folge ist nichts anderes als der numerische Ausdruck für das Verhältnis des goldenen Schnittes. Seit dem Altertum übt diese Proportion auf den Menschen eine grosse Anziehungskraft aus. In Architektur und Kunst wurde und wird sie immer noch häufig verwendet – sei dies beabsichtigt oder nicht.

Der goldene Schnitt (früher auch «göttliche Proportion» genannt) ist ein Begriff aus der Geometrie. Gegeben sei eine Strecke AB mit einem Punkt T, der diese in zwei Teilstrecken zerlegt. Die Länge des Teils AT sei mit x , diejenige von TB mit y bezeichnet (Bild 1). Man sagt nun, der Punkt T teile die Strecke AB im *goldenen Schnitt*, falls die grössere Länge x sich zur kleineren y gleich verhält wie die Länge $x+y$ der ganzen Strecke zur grösseren x . Formal geschrieben:

$$x : y = (x + y) : x \quad (*)$$

Dazu gleichwertig ist die Formel

$$y(x + y) = x^2 \quad (**).$$



Bild 1 Teilung der Strecke AB im goldenen Schnitt.

Fig. 1 Division of the line-segment AB according to the golden section.

Aus der Gültigkeit von (*) folgt die Gültigkeit weiterer Proportionen wie

$$(x + y) : x = (2x + y) : (x + y) = (3x + 2y) : (2x + y) = \dots$$

bzw.

$$x : y = y : (x - y) = (x - y) : (2y - x) = \dots$$

Aus diesem Grund wird der goldene Schnitt auch *stetige Teilung* genannt. Die numerische Bestimmung des goldenen Schnittes führt auf die quadratische Gleichung $u^2 - u - 1 = 0$, wobei u für $\frac{x}{y}$ steht. Die Lösungen dieser Gleichung sind $u_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $u_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (vgl. die Formel von Binet). Da u_2 negativ ist, kommt als geometrisch sinnvolle Lösung nur u_1 in Frage. Diese Zahl wird im folgenden mit τ , die Zahl $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ mit ρ bezeichnet. Man beachte, dass ρ eine Lösung der Gleichung $u^2 + u - 1 = 0$ ist.

Es wird vermutet, dass der goldene Schnitt von den Pythagoräern entdeckt wurde, und zwar beim Studium des *Pentagramms*, d.h. des Diagonalengebildes im regulären Fünfeck. Je zwei Diagonalen, welche keine Ecke gemeinsam haben, teilen einander nämlich im Verhältnis τ (in Bild 2 etwa die Diagonalen AD und CE).

Für das Verständnis des nachstehenden Kepler-Zitats ist es wichtig zu wissen, dass der Zitierte – wie die Griechen – mit «Zahlen» stets ganze Zahlen meint. Irrationale Verhältnisse wie τ oder ρ können demnach nicht als Verhältnisse von Zahlen ausgedrückt werden; sie heissen «unaussprechbar».

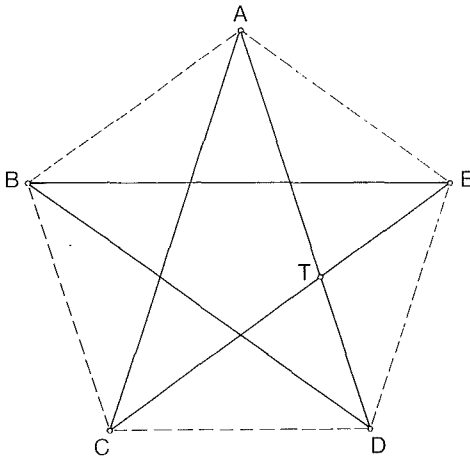


Bild 2 Je zwei Diagonalen des regulären Fünfecks, welche keine gemeinsame Ecke haben, teilen einander im goldenen Schnitt.

Fig. 2 In the regular pentagon any two diagonals which have no common vertex divide each other according to the golden section.

«Zunächst erinnere man sich ..., dass das Fünfeck durch die Teilung nach dem äusseren und mittleren Verhältnis bestimmt ist, die den göttlichen Schnitt bildet. In diesem schönen Verhältnis liegt nun aber die Idee der Zeugung verborgen. Denn wie der Vater den Sohn erzeugt, der Sohn einen anderen, jeder einen ihm ähnlichen, so wird auch bei jener Teilung die Proportion fortgesetzt, wenn man den grösseren Abschnitt zum Ganzen hinzufügt. Die Summe erhält dann die Stelle des Ganzen, und was vorher Ganzes war, ist jetzt grösserer Abschnitt. Wenn auch dieses Verhältnis nicht durch Zahlen ausgedrückt werden kann, so gibt es doch eine Zahlenreihe, die dem wahren Wert des Verhältnisses immer näher kommt. In dieser Reihe erzeugt der Unterschied der Zahlen gegenüber den wirklichen Proportionsgliedern (die ... unaussprechbar sind) in höchst merkwürdiger Weise Männchen und Weibchen, wie sie sich durch die Geschlechtsglieder unterscheiden. Es sei zunächst der grössere Teil 2, der kleinere 1, das Ganze 3. Es verhält sich nun nicht genau 1 zu 2 wie 2 zu 3; vielmehr bleibt das Rechteck aus den Aussengliedern 1 und 3 hinter dem Quadrat des Mittelgliedes um eine Einheit zurück. Addiert man nun 2 und 3, so erhält man als neues Ganzes 5; addiert man 3 und 5, so erhält man als Ganzes 8 usw. Das Rechteck aus 1 und 3 erzeugt ein Weibchen, denn es fehlt ihm eine Einheit gegenüber dem Quadrat von 2. Das Rechteck aus 2 und 5 erzeugt ein Männchen, denn es überschreitet das Quadrat von 3 um eine Einheit. Das Rechteck aus 3 und 8 erzeugt ein Weibchen, denn es fehlt ihm eine Einheit gegenüber dem Quadrat von 5. Aus 5 und 13 entsteht wieder ein Männchen, im Hinblick auf das Quadrat von 8; aus 8 und 21 ein Weibchen im Hinblick auf das Quadrat von 13 usw. bis ins Unendliche.

Das ist also die Natur der Teilung, die bei der Herstellung des Fünfecks Verwendung findet. ... » (Zitat aus (Kepler, 1619), 3. Buch, S. 165–166).

Kepler stiess also auf die Fibonacci-Zahlen, weil er das irrationale Verhältnis τ möglichst gut durch ganzzahlige Verhältnisse annähern wollte. Wir formulieren seine Erkenntnisse in moderner Sprache:

- (1) Die Folge der Quotienten f_{n+1}/f_n aufeinanderfolgender Glieder von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen τ . Formal ausgedrückt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \tau$$

- (2) Es gilt die sog. *Simson-Identität* (vgl. Formel (**)):

$$f_{n-1} \cdot f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n ; n \geq 2$$

5 Phyllotaxis

In diesem letzten Abschnitt soll das Phänomen beleuchtet werden, dass Fibonacci-Zahlen in der Botanik, nämlich bei Mustern von Blatt- und Blütenanordnungen (sog. *Phyllotaxis*) eine Rolle spielen.

Bei gewissen Laubbäumen, etwa Ulme oder Linde, sind die Blätter eines Zweiges abwechselnd auf der einen und auf der entgegengesetzten Seite angeordnet; man spricht hier von $\frac{1}{2}$ -Phyllotaxis. Bei anderen Arten (Buche, Haselnuss) kommt man von einem Blatt zum nächsten durch eine Schraubung, welche eine Drehung um einen Drittel des Vollwinkels enthält. Diese Situation wird $\frac{1}{3}$ -Phyllotaxis genannt. Weitere Laubbäume zeigen entsprechend $\frac{2}{5}$ -, $\frac{3}{8}$ - bzw. $\frac{5}{13}$ -Phyllotaxis. Ein ähnliches Phänomen findet man im Schuppenmuster von Tannen- oder Föhrenzapfen sowie bei Ananas-Früchten. Die Schuppen sind in zwei Richtungen schraubenlinienförmig angeordnet. Dabei sind die Anzahlen der Schraubenlinien in der Regel zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen, z. B. 5 und 8; vgl. (Coxeter, 1963).

Ferner erscheinen Fibonacci-Zahlen beim Blüten- und Fruchtstand von Korbblütlern (Compositae). Wir wollen im folgenden den Blütenstand einer *Sonnenblume* einer genaueren Betrachtung unterziehen (Bild 3). Die Blüten sind in *zwei Scharen von Spiralen* angeordnet; eine Schar besteht aus (von aussen gesehen) rechtsdrehenden, die andere aus linksdrehenden Spiralen. Zählt man nun diese Spiralen aus, so wird man wieder – mit seltenen Ausnahmen – auf *zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen* treffen! Bei der Son-

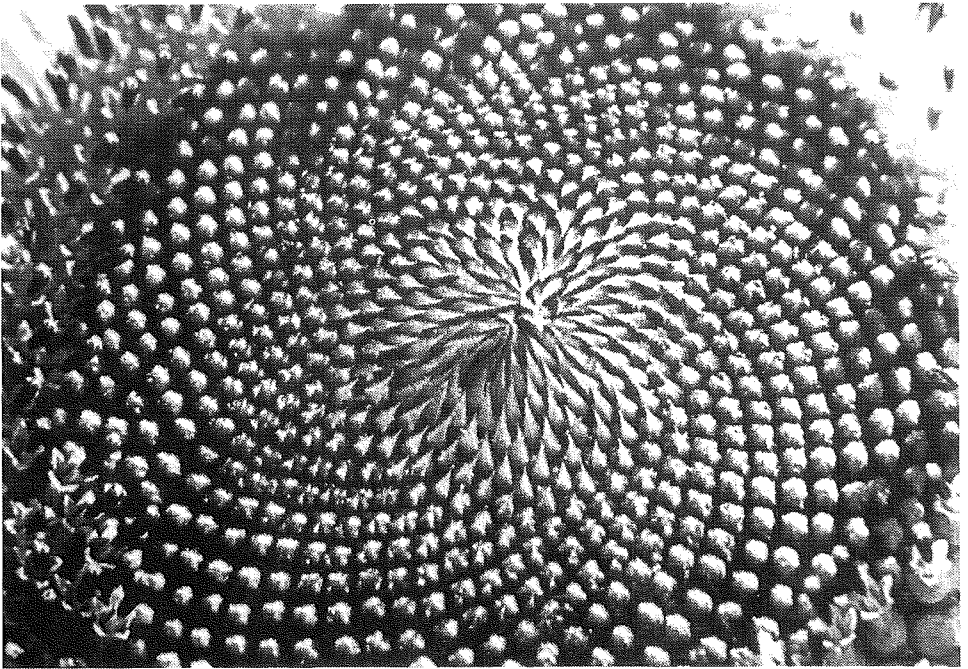


Bild 3 Blütenstand einer Sonnenblume: Man erkennt 34 links- und 55 rechtsdrehende Spiralen.

Fig. 3 Head of a sunflower: One recognizes 34 spirals turning left and 55 turning right.

nenblume von Bild 3 erkennt man 34 links- und 55 rechtsdrehende Spiralen. Bei anderen Individuen kommen aber auch die Paare (55,89) bzw. (89,144) vor.

Für eine Erklärung dieses Phänomens ziehen wir den Wachstumsverlauf eines Individuums heran. Wir stellen uns vor, die Blüten seien eine nach der anderen entstanden, die grösseren, weiter aussen platzierten vor den kleineren, welche näher beim Zentrum angeordnet sind. Auf diese Weise können wir sämtliche Blüten nach Position bzw. Alter numerieren; die älteste bekommt dabei die Nummer 0. Diese Numerierung kann jedoch nicht am Objekt selber vorgenommen werden und macht deshalb eine *Simulation* notwendig.

Das hier verwendete *Simulationsmodell* beruht auf den folgenden Annahmen, wobei P_n die Position der n -ten Blüte bezeichnet ($n \geq 0$):

(1) Der Blütenkorb ist eine Kreisscheibe vom Radius 1;

(Es werden im folgenden Polarkoordinaten verwendet; der Pol ist das Kreiszentrum, die Polachse diejenige vom Pol ausgehende Halbgerade, welche durch P_0 verläuft.)

(2) Die Radius-Abnahme d von P_n zu P_{n+1} ist von n unabhängig;

(3) der Polarwinkel-Zuwachs δ von P_n zu P_{n+1} ist ebenfalls von n unabhängig².

Nach diesen Annahmen können nun die Positionen $P_n = P_n(r_n, \varphi_n)$ wie folgt beschrieben werden:

$$r_n = 1 - nd; \quad \varphi_n = n\delta; \quad n \geq 0.$$

Das Bild 4 zeigt die Positionen P_0 bis P_7 für $d = 0.05$ und $\delta = 50^\circ$. Es ist zu bemerken, dass – für jede Wahl von d , δ – sämtliche Punkte $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ auf der Kurve liegen, welche in Polarkoordinaten durch die Gleichung

$$r = 1 - \frac{d}{\delta} \varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\delta}{d}$$

beschrieben wird. Es handelt sich dabei um eine *archimedische Spirale*; wir nennen sie die *primäre* Spirale des Simulationsmodells. Für eine realistische Simulation einer Sonnenblume muss d sehr klein gewählt werden. Es leuchtet ein, dass dann die primäre Spirale nicht mehr zu erkennen sein wird; an ihrer Stelle treten andere, *sekundäre* (archimedische) Spiralen in Erscheinung.

Es zeigt sich, dass die Wahl von $\delta = 137.5^\circ$ und $d = 0.002$ ein befriedigendes Muster liefert (Bild 5). Dies betrifft nicht nur die ausgewogene Form, sondern auch die Anzahl der sekundären Spiralen; wir zählen 21 rechtsdrehende und 34

² Es ist hier sinnvoll, den Polarwinkel φ nicht auf das Intervall $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ einzuschränken, sondern für φ beliebige nichtnegative Werte zuzulassen.

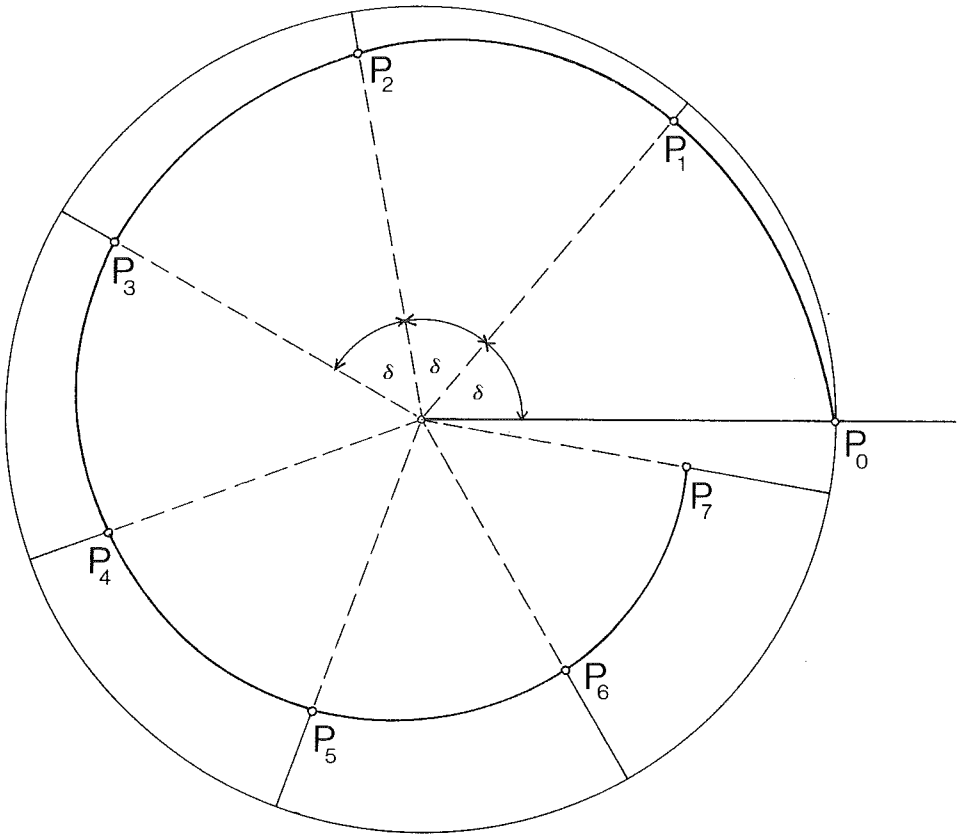


Bild 4 Simulationsmodell: Für $d = 0.05$ und $\delta = 50^\circ$ ist die primäre Spirale zwischen den Blütenpositionen P_0 und P_7 dargestellt.

Fig. 4 Simulation model: In the case where $d = 0.05$ and $\delta = 50^\circ$ the primary spiral is shown between the floral positions P_0 and P_7 .

linksdrehende solche Spiralen. Bild 6 zeigt andererseits, dass eine minimale Variation von δ (hier: $\delta = 137.35^\circ$) das Muster so stark verändert, dass es für die Simulation einer Sonnenblume unbrauchbar wird.

Es ist nun darauf hinzuweisen, dass das Verhältnis von 360 zur Differenz $360 - 137.5$ sehr nahe an den goldenen Schnitt herankommt! Dies kann auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{137.5}{360} \approx 1 - \rho = \rho^2 \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Der goldene Schnitt kommt also in der Natur – oder zumindest in unserem Simulationsmodell – vor!

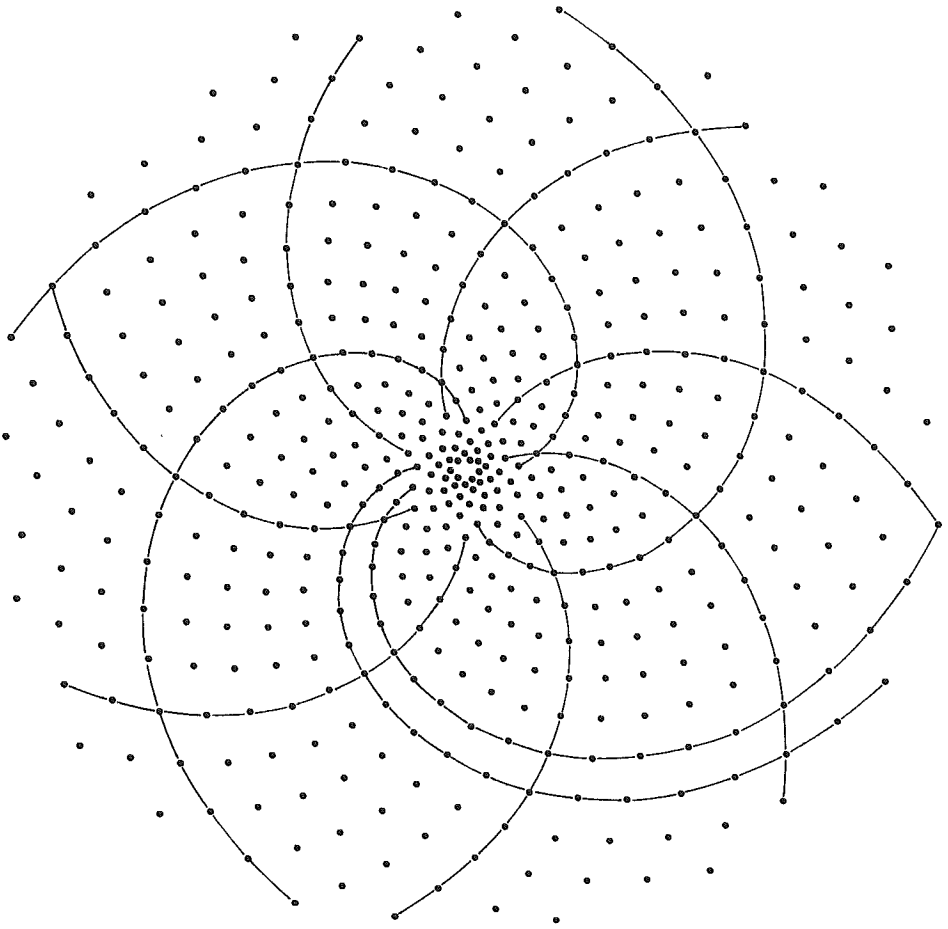


Bild 5 Simulation des Blütenstandes einer Sonnenblume mit den Parameterwerten $d = 0.002$ und $\delta = 137.5^\circ$. Man zählt 21 rechtsdrehende und 34 linksdrehende Spiralen. Die markierten Spiralen dienen als Zählhilfe.

Fig. 5 Simulation of a sunflower head using the parameter values $d = 0.002$ and $\delta = 137.5^\circ$. 21 spirals turning right and 34 turning left can be counted. The marked spirals serve as an aid for counting.

Der Winkel von 137.5° wird von den Biologen weitgehend akzeptiert. Bei anderen Phyllotaxis-Phänomenen kann er tatsächlich gemessen werden oder kommt zumindest als Mittelwert von langen Messreihen vor. Es ist zu bemerken, dass die bei der Blattanordnung von Laubbäumen gefundenen Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{13}$ usw. nichts anderes als rationale Näherungen für die Zahl ρ^2 sind. Seit dem 18. Jahrhundert suchen Biologen, Mathematiker und neuerdings

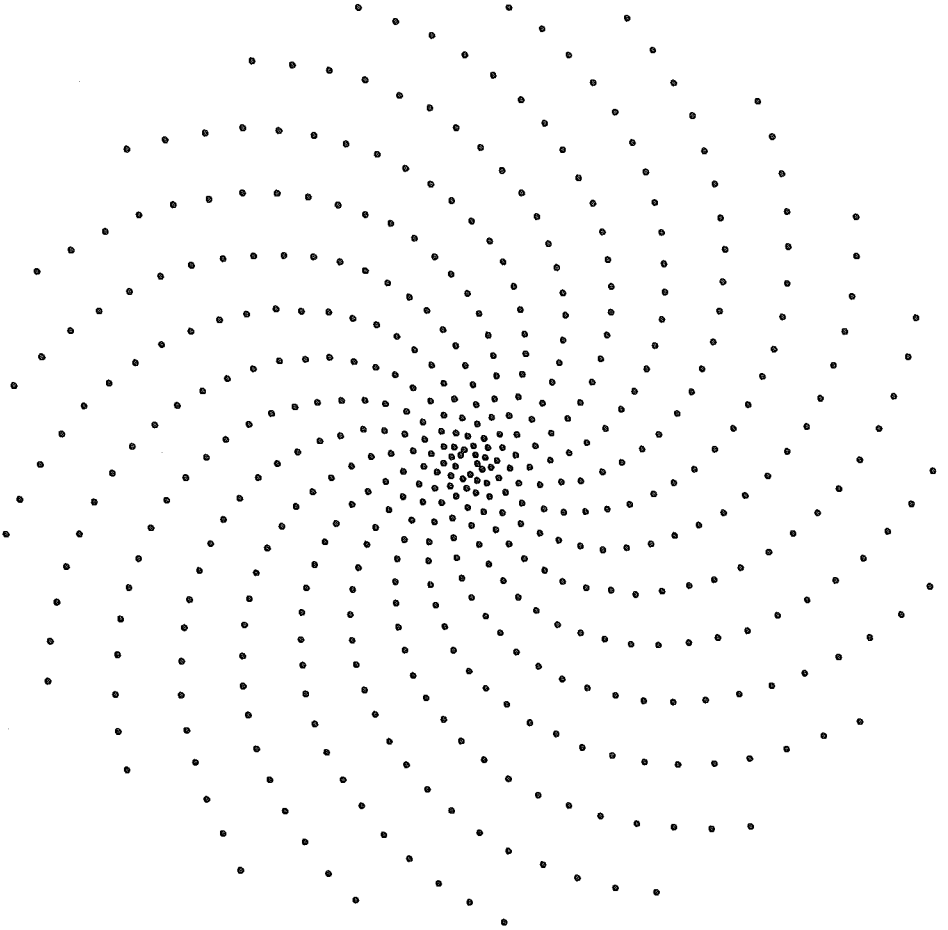


Bild 6 Simulation mit den Parameterwerten $d = 0.002$ und $\delta = 137.35^\circ$. Diese minimale Abweichung von δ gegenüber dem Normalwert 137.5° bewirkt eine deutliche Veränderung des Musters.

Fig. 6 Simulation using the parameter values $d = 0.002$ and $\delta = 137.35^\circ$. This minor deviation of δ from the regular value 137.5° causes a striking change of the pattern.

auch Physiker nach einer Erklärung für die Phyllotaxis-Phänomene. Eine Übersicht über die wichtigsten Arbeiten zu diesem Thema bis 1972 findet sich in (Adler, 1974). Neuere bemerkenswerte Arbeiten dazu sind (Richter und Schraner, 1978), (Ridley, 1982) und (Scholz, 1985); vgl. auch (Richter und Scholz, 1987).

Es soll hier der biologischen Begründung für das Auftreten des «goldenen Winkels» 137.5° nicht weiter nachgegangen werden. Hingegen möchte der Mathematiker den Zusammenhang zwischen diesem Winkel und den Fibonac-

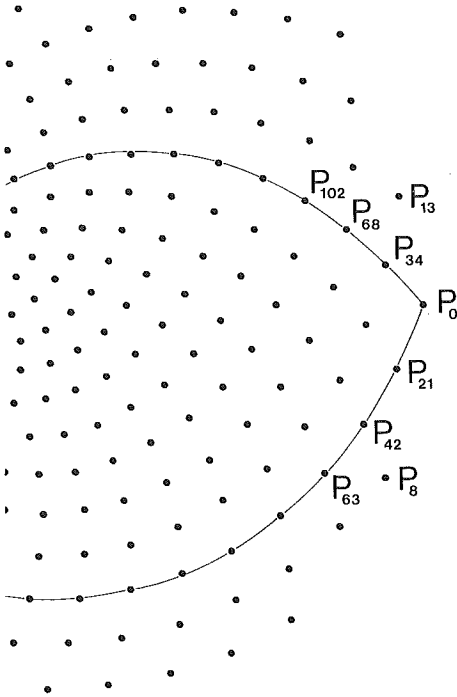


Bild 7 Ausschnitt aus Bild 5 mit Beschriftung einiger Blütenpositionen.

Fig. 7 Section of Fig. 5 with some floral positions labelled.

ci-Zahlen als Anzahlen von sekundären Spiralen besser verstehen. Wir entnehmen Bild 7, dass die Positionen auf der rechtsdrehenden Spirale durch P_0 nacheinander P_{21}, P_{42}, P_{63} usw., diejenigen auf der linksdrehenden Spirale durch P_0 nacheinander $P_{34}, P_{68}, P_{102}, \dots$ sind. Es ist nun leicht einzusehen, dass die Nummern der Positionen in einer rechtsdrehenden Spirale gerade diejenigen mit demselben Rest bei Division durch 21 sind. Die linksdrehenden Spiralen entsprechen hingegen gerade den Restklassen bei Division durch 34. Für eine beliebige Wahl der Parameter d, δ gilt: Sind P_a, P_b die Nachbarpositionen von P_0 auf der rechts- bzw. linksdrehenden Spirale durch P_0 , so gibt es genau a rechts- und b linksdrehende sekundäre Spiralen.

Es bleibt zu erklären, warum für $\delta = 137.5^\circ$ die Nachbarpositionen von P_0 Fibonacci-Nummern haben. Wir bemerken zunächst, dass für beliebige δ die Nachbarposition P_a von P_0 auf jeder sekundären Spirale durch P_0 die Eigenschaft besitzt, dass der Betrag des *reduzierten* Polarwinkels³ von P_a kleiner ist als der entsprechende Winkelbetrag von P_q für jedes q mit $q < a$.

Für den Rest der Betrachtung sei stets $\delta = \rho^2 \cdot 360^\circ (\approx 137.5^\circ)$. Dann sind die reduzierten Polarwinkel

³ Die Reduktion des Polarwinkels erfolgt hier auf das Intervall $-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$. Von der unreduzierten Winkelgrösse muss demnach ein solches Vielfaches von 360° subtrahiert werden, dass die Differenz im angegebenen Intervall liegt.

$$3\delta - 1 \cdot 360^\circ, \quad 5\delta - 2 \cdot 360^\circ, \quad 8\delta - 3 \cdot 360^\circ,$$

$$\text{allgemein: } f_n\delta - f_{n-2} \cdot 360^\circ \quad (n > 3)$$

absolut klein. Genauer gilt

$$|f_n\delta - f_{n-2} \cdot 360^\circ| < |q\delta - p \cdot 360^\circ| \quad (F)$$

für jedes $n > 3$ und für je zwei positive ganze Zahlen p, q mit $q < f_n$. Der Betrag des reduzierten Polarwinkels von P_{f_n} ist also kleiner als der Betrag des reduzierten Polarwinkels jeder anderen Position P_q mit kleinerer Nummer q .

Nun ist aber die Ungleichung (F) zwar notwendig, aber nicht hinreichend dafür, dass die Nachbarpositionen auf den sekundären Spiralen durch P_0 Fibonacci-Zahlen als Indices haben. Hinreichend ist jedoch folgende *Verschärfung*: *Ist n keine Fibonacci-Zahl, so ist der Betrag des reduzierten Polarwinkels von P_n grösser als der entsprechende Winkelbetrag derjenigen Position, deren Index die nächstkleinere Fibonacci-Zahl ist.*

Ein mathematischer Beweis für die Gültigkeit der Ungleichung (F) oder für die angegebene Verschärfung beruht auf der Theorie der Kettenbrüche. Er soll an anderer Stelle ausführlich dargestellt werden.⁴

6 Literatur

- Adler, I. (1974), A Model of Contact Pressure in Phyllotaxis, *J. theor. Biol.* 45, 1–79.
- Beutelspacher, A. und Petri, B. (1989), *Der Goldene Schnitt*. BI-Wissenschaftsverlag Mannheim, Wien und Zürich, 180 Seiten.
- Coxeter, H.S.M. (1963), *Unvergängliche Geometrie*, übersetzt von J.J. Burckhardt. Birkhäuser-Verlag Basel und Stuttgart, 552 Seiten.
- Kepler, J. (1619), *Weltharmonik*, übersetzt von M. Caspar. Oldenbourg München und Berlin 1939, 403 Seiten.
- NZZ, Gestaltung einer Glaswand im Hauptbahnhof, *Neue Zürcher Zeitung* Nr. 253, S. 55 (31. 10. 1990).
- Richter, P.H. und Schranner, R. (1978), Leaf Arrangement: Geometry, Morphogenesis, and Classification, *Naturwissenschaften* 65, 319–327.
- Richter, P.H. und Scholz, H.J. (1987), *Der Goldene Schnitt in der Natur*, S. 175–214 in: *Ordnung aus dem Chaos*, B.O. Küppers (Hrsg.), Serie Piper 743, München und Zürich.
- Ridley, J.N. (1982), Packing Efficiency in Sunflower Heads, *Math. Biosciences* 58, 129–139.
- Scholz, H.J. (1985), Phyllotactic Iterations, *Ber. Bunsenges. Phys. Chem.* 89, 699–703.
- Vogel, K. (1971), Fibonacci, Leonardo, S. 604–613 in: *Dictionary of Scientific Biography* IV, Ch. Scribner's Sons, New York.

⁴ Mein Dank gilt Dieter Lendorff und Paul Michel für ihre liebenswürdige Hilfe in technischen Belangen.