Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich (1985) *130*/1: 115–117

Paul Nigglis Verdienste um die Herausgabe des Buches «Die Bewegungsgruppen der Kristallographie»

«In memoriam Paul Niggli»
Paul Niggli Symposium on geometric crystallography and its morphological and stereochemical applications.
The 6th and 7th of August 1984, Institute of Crystallography Zürich, Switzerland.

Johann Jakob Burckhardt, Zürich

1. «Sieh vorwärts Werner und nicht hinter dich» soll im allgemeinen unsere Lebensregel sein. Vergangenes vergessen und in die Zukunft blicken ist zu empfehlen.

Wenn ich hier der freundlichen Aufforderung Ihrer Veranstalter folge und einige Worte über meine Verbindung mit der Schule von Paul Niggli sagen möchte, so legt dies nahe, einen Blick rückwärts zu werfen. Doch will ich versuchen, diesen Blick sich im Vergangenen spiegeln zu lassen und in die Zukunft zu weisen.

Von früh an stand mir mein Lebensziel klar vor Augen. Nicht etwa, dass besondere Begabung darauf hinwies, nicht etwa so, dass ich Fächer, Prüfungen oder Lebensstellung hätte angeben können. Klar, punktförmig irgendwo ganz entfernt, vielleicht unerreichbar, insbesondere ohne dahin führenden Weg sah ich etwas, vielleicht lichtig zu benennen.

Das hatte zur Folge, dass mein Studium vorerst eher unbestimmt war: Naturwissenschaften, daneben viel Lektüre: Geometrische Werke, Philosophie, Newton, Kepler, dann auch Gauss.

Ende 1923 erhielt ich das eben erschienene, schmale Buch von Andreas Speiser, «Die Theorie der Gruppen endlicher Ordnung», das mich ansprach und um dessen Verständnis ich mich bemühte. Teilweise knapp formuliert, forderte es mich heraus. Meine Eltern ermöglichten es, meine Studien in Zürich fortzusetzen (Herbst 1924). Im genannten Buch handelt das 6. Kapitel von den kristallographischen Gruppen und im § 59 werden die Raumgruppen behandelt, soweit es um deren Definition geht. Dabei werden die Werke von Arthur Schoenflies 1891 und Paul Niggli 1919 angeführt.

Speiser, dem ich meine Interessen an der Kristallographie und der Geometrie mitteilte, verwies mich sogleich auf die betreffenden Kurse und Übungen an der ETH, wo ich unter anderem hörte: Paul Niggli, Geometrische Grundlagen der Kristallstrukturlehre, Leo Weber, Einführung in die Kristallographie und Übungen zur allgemeinen Mineralogie.

Von Weber erschien dann 1929 die schöne Aufzählung der 80 ebenen zweifarbigen Gruppen mit den instruktiven Bildern, denen ich später in der Festschrift für Andreas Speiser 1945 einen Aufsatz widmete.

Hierdurch wurde ich mit der dem Mathematiker zunächst fremden Denkart und der Darstellungsweise der Kristallographen vertraut. Zudem schloss ich Bekanntschaft mit den Studierenden Fritz Laves und Ernst Brandenberger, später mit Heinrich Heesch. Wertvolle Unterhaltungen führten stets wieder auf Fragen nach der Herleitung und nach der Anzahl der kristallographischen Raumgruppen. Die doch recht komplizierte Art der Zusammensetzung der erlaubten Symmetrieelemente, mit welcher Schoenflies (1891) zum Ziel gelangte, veranlasste meine Gesprächspartner, die Frage zu stellen:

Gibt es keinen einfacheren Weg, etwa eine mathematische Formel, die zum selben Ergebnis führen würde?

Dies würde die Ersetzung des geometrischen Vorgehens durch algebraische Algorithmen bedeuten.

2. Ich studierte daher eifrig die Werke von Schoenflies (1891) und Niggli (1919), später auch von Ralph W. G. Wyckoff (1922). Niggli führt als Quellen insbesondere das Buch von Schoenflies an, dem er sich in den Symbolen anschloss. Im Schlusswort (S. 561 ff.), das ich seinerzeit wohl zu

wenig beachtet hatte, werden mit aller Deutlichkeit die *zwei* Wege aufgezeigt, die zu den Raumgruppen führen:

a) Die regulären Raumteilungen, bearbeitet durch Hauy, Bergmann, Wollaston, Lord Kelvin, Minkowski, Fedorov und Barlow.

b) Die regulären Punktverteilungen, bearbeitet durch Seeber, Frankenheim, Delafosse, Bravais, Sohncke und Schoenflies.

Bei Schoenflies findet man ausführliche Angaben über die Vorgänger bis zu Hessel und Fedorov.

Im Ringen mit dem Stoffe, den ich aus den genannten Werken von Schoenflies und Niggli kennenlernte, liess ich leider das Studium weiterer Werke beiseite, mein Interesse war noch nicht auf die geschichtliche Entwicklung gerichtet.

Leider habe ich das vierte Kapitel von Nigglis Jugendwerk zu wenig studiert. Dieses geht weit über die von Fedorov und Schoenflies erarbeiteten Resultate hinaus. In diesem Kapitel werden die Bestimmungstabellen vier bis sechs aufgestellt.

Diese erst gestatten, eine gefundene Struktur einer bestimmten Raumgruppe zuzuordnen. Erstaunlich ist nun für mich, wie bereits in Tabelle vier die später von mir als arithmetisch bezeichneten Klassen auftreten. Von Bedeutung sind dabei die neu aufgestellten Begriffe der *Zähligkeit* einer Punktlage und deren *Freiheitsgrad* sowie der *Gitterkomplex.*

Bei der Diskussion der Formation des Steinsalzes tritt der Wert dieser Begriffe und Tafeln ins richtige Licht und wir bewundern die Virtuosität, mit welcher der Verfasser diese handhabt. 1927 kann der Autor sodann feststellen «dass deren Benützung (der genannten Tabellen) nun allgemein geworden ist» (Zeitschr. f. Krist. *65,* 1927, insbes. S. 391).

Ich versuchte also, die geometrischen Betrachtungsweisen durch solche zu ersetzen, bei denen die Gruppentheorie im Vordergrund steht, insbesondere nahm ich die Darstellung der Gruppen durch lineare Transformationen als Ausgangspunkt. Dies stand im Gegensatz zu den mir vorliegenden Büchern, in welchen aus der Geometrie die Substitutionen abgelesen wurden.

3. Zusammen mit der Tatsache, dass es sich bei den Raumgruppen der Kristallographie um Symmetriegruppen der Raumgitter handelt, stellte ich den 32 (geometrischen) Kristallklassen von Frankenheim, Hessel und Gadolin 73 Klassen gegenüber, die ich *arithmetische* nannte.

Aus ihnen lassen sich sodann die Raumgruppen durch arithmetische Prozesse herleiten. Somit hatte ich die Frage meiner Freunde beantwortet. Die Aufstellung aller Raumgruppen des vierdimensionalen Raumes bestätigt, dass es sich hier um einen Algorithmus handelt.

Etwa 1927 waren meine Untersuchungen so weit gediehen, dass ich darüber im Zürcher Mathematischen Kolloquium (einer Veranstaltung der Dozenten der ETH und der Universität) vortragen konnte. Paul Niggli war anwesend, in der Diskussion bemerkte er spontan, dass diese 73 Klassen die von Fedorov als *symmorph* bezeichneten kristallographischen Gruppen sind.

Dies war für mich zugleich überraschend wie auch bedeutungsvoll. Ich habe daraufhin die Werke dieses Forschers zur Hand genommen, zunächst nur die in deutscher Sprache meist in der Zeitschrift für Kristallographie veröffentlichten, neuerdings auch die durch David und Katherine Harker aus dem Russischen ins Englische übertragenen.

Soviel ich sehe, treten die Begriffe

symmorph, hemisymmorph und asymmorph

bei Fedorov zuerst in der Voranzeige von 1890 auf. Verhandlungen d. russ.-kaiserl. mineralogischen Gesellschaft zu St. Petersburg *26,* 1890, S. 454, wo auf das in denselben Verhandlungen *28,* 1891 zu erscheinende Werk

«Symmetrie der regelmässigen Systeme von Figuren» (russisch) verwiesen wird.

Fedorov sagt dort (Harker S. 54)

«Die symmorphen Systeme sind dadurch charakterisiert, dass jede Figur des Systems von der anderen mittels Verschiebung erhalten werden kann»,

oder in der Zeitschr. f. Kristallographie *20,* 1892, S. 65 in deutscher Sprache:

«Die symmorphen Systeme gehören derselben Symmetrieart an wie die elementaren Figuren. In diesem Falle sind sämtliche den Raum in paralleler Lage erfüllenden Figuren – also die Paralleloeder – von derselben Symmetrie wie die Systeme im Ganzen.»

Fedorov gelangte zu den symmorphen Systemen, indem er den von ihm gefundenen vier Paralleloedern spezielle Symmetrie erteilte. Ich gelangte von der Theorie der Substitutionsgruppen her, bei einem ganzzahligen unimodularen Aequivalenzbegriff, zu den arithmetischen Klassen. So stehen sich hier geometrische Betrachtung und algebraische Rechnung wie Zwillinge gegenüber, sie sind Ausdruck von etwas, was man vielleicht Urphänomen nennen könnte oder nochmals anders ausgedrückt in den Worten von Lorenz Oken, der sagte, Pythagoras habe als erster die Gleichheit von Mathesis und Natur angeschaut.

4. Ich habe nach meinem Kolloquiumsvortrag meine Ergebnisse ausgearbeitet und etwa in Vorlesungen vorgetragen. Nach einem Vortrag in der Deutschen-Mathematiker-Vereinigung anerbot mir Bartel L. van der Waerden, meine Ergebnisse für ein Buch in der sogenannen «Gelben Sammlung» des Springer Verlages zu empfehlen. Mit seiner freundlichen Hilfe lag das Manuskript kurz vor Kriegsende vor. Ich kann nicht übergehen zu erinnern, dass diese Arbeit in der finstersten Zeit, welche die europäische Geschichte je erlebte, geschrieben werden musste. Vergessen wir dies nie! Daher die ständigen Zweifel, ob wissenschaftliche Arbeit noch sinnvoll sei. Meine Hilfe, auch in schwerer Zeit nicht zu verzagen, waren die Worte von Johannes Kepler, die ich im Vorwort der ersten Auflage wiedergegeben habe. Sie lauten:

«Wenn der Sturm wütet und der Schiffbruch des Staates droht, können wir nichts Würdigeres tun, als den Anker unserer friedlichen Studien in den Grund der Ewigkeit zu senken.»

Von Auswärts erhielt ich tröstliche Zustimmung zu dieser Haltung. Das Manuskript verbrannte bei der Bombardierung von Leipzig. Dank dem Entgegenkommen von Albert Birkhäuser in Basel sollte ein Erscheinen in dessen Verlag möglich werden. Doch es erging mir wie Fedorov, dessen erstes Werk wegen der Einsprache von Chebyshev zunächst nicht erschien und später nur dank dem Eintreten von Gadolin veröffentlicht wurde. Chebyshev sprach ihm nämlich die mathematische Bedeutung ab. Mit derselben Begründung wurde mein Manuskript vom Fachreferenten abgelehnt. Nur dank der freundlichen Empfehlung von Paul Niggli konnte es in der Mineralogischen Reihe bei Birkhäuser erscheinen.

5. Doch jetzt zum Schluss: Ich habe am Ende meines Buches drei Sätze bewiesen, die sich mit den Bewegungsgruppen in Räumen höherer Dimension befassen. Ich habe gezeigt, dass es in ihnen zur zyklischen Gruppe nur je eine Bewegungsgruppe gibt (Satz 39), zur symmetrischen je deren zwei (Satz 40) und zur alternierenden Gruppe nur je eine (Satz 41). Diese Ergebnisse habe ich, ausgehend von den Frobeniusschen Kongruenzen, mittels vollständiger Induktion hergeleitet. Sie sind lange nicht beachtet worden, bis vor kurzem Martin Klemm in seinem Werk «Symmetrien von Ornamenten und Kristallen» 1982 diese im § 15 als Sonderfälle allgemeinerer Aussagen erkennt, die wiederum im wesentlichen auf den Kongruenzen von Frobenius beruhen.

Ob diese Ergebnisse in Zusammenhang mit der schönen Entdeckung von Ludwig Schläfli stehen? Diese besagt, dass es in Räumen höherer Dimension nur je drei regelmässige Körper gibt.

Damit glaube ich ein Ziel gezeigt zu haben, das weiter zu verfolgen ist und damit in die Zukunft weist.

Abschliessend darf ich darauf hinweisen, dass ich versucht habe, etwas Licht in die Geschichte der Entdeckung der 230 Raumgruppen zu bringen und einige Ungenauigkeiten im Schrifttum zu verbessern. Ich verweise auf meine Arbeit

«Zur Geschichte der Entdeckung der 230 Raumgruppen»
Archive for History of Exact Sciences *4,* 1967, S. 235–246.

Prof. Dr. J. J. Burckhardt, Bergheimstrasse 4, CH-8032 Zürich