Über ein spezielles Brennstoffproblem — eine mathematische Betrachtung

Von

JÜRG RÄTZ

Mathematisches Institut der Universität Bern

1. Problemstellung

In der bekannten Sammlung «Mathematical Games» von M. GARDNER [1][1] stand vor einiger Zeit die folgende Aufgabe, die wir hier etwas allgemeiner formulieren: Kann ein Motorfahrzeug die geradlinige Strecke AB der beliebigen Länge s überwinden und, wenn ja, wieviel Brennstoff ist hierzu mindestens erforderlich, wenn folgende Bedingungen gelten: (I) Beim Anfangspunkt A stehe beliebig viel Brennstoff zur Verfügung. (II) Ausser bei A stehe zu Beginn nirgends Brennstoff zur Verfügung. (III) Es bestehe die Möglichkeit, unter Verwendung des Fahrzeuges an beliebigen Punkten beliebig grosse Brennstoffdepots zu errichten. (IV) Die auf den zurückgelegten Weg bezogene Verbrauchsdichte an Brennstoff sei konstant, insbesondere von Belastung und Gelände unabhängig. (V) Die maximale Strecke, die das Fahrzeug ohne Nachschub zurücklegen kann, sei endlich und gleich d. (VI) Die Brennstoffverluste (durch Verdampfen usw.) seien ausser Betracht zu lassen.

In GARDNER [2] wird auf einen Artikel von I. C. PYLE [3] hingewiesen, in welchem gezeigt wird, wie die Strecke AB bei festem «Aktionsdurchmesser» d für eine beliebige Länge s in zweckmässiger Weise durchfahren werden kann. Dass die dort beschriebene Lösung im Sinne unseres Minimalproblems günstig liegt, lässt sich sofort ersehen; allein es fehlt in [3] ein Beweis ihrer Optimalität. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, diesen Beweis zu erbringen und die Lösung in asymptotischer Approximation anzugeben. Offensichtlich ist einzig das Verhältnis $r = s/d$ für die Lösung massgebend, und nur für $r > 1$ ist das Problem nicht trivial.

2. Die exakte Lösung

Es erweist sich im Hinblick auf die letzte Bemerkung als zweckmässig, jedem Punkt X des vom Endpunkt B ausgehenden durch den Anfangspunkt A laufenden Strahls $\mathfrak{S}$ die Koordinate $x = \overline{BX}/d$ zuzuordnen. Dadurch entsteht eine einein-

[1] Den Hinweis auf diese Stelle verdanken wir Herrn P. WILD, Bern. Vgl. auch [4], p. 132, 135.

deutige Beziehung zwischen $\mathfrak{S}$ und der Menge R^+ der nichtnegativen reellen Zahlen. Der vom Fahrzeug eingeschlagene Weg zur Überwindung der Strecke AB kann nun, soweit dies für den Brennstoffverbrauch erheblich ist, völlig charakterisiert werden durch die Funktion f, welche wir die *Fahrtdichte* nennen, wobei $f(x)$ für $0 \leqq x \leqq r$ angibt, wie oft der Punkt X dabei durchlaufen wird. Zur Vereinfachung der Verhältnisse an den eventuell vorkommenden Umkehrstellen setzen wir voraus, dass f überall von rechts stetig sei. Ihrem Wesen nach ist eine Fahrtdichte also eine stückweise konstante von rechts stetige positive Funktion mit ganzen, ungeraden Werten. Im folgenden wird eine weitere notwendige Eigenschaft erschlossen. Es bezeichne hierzu c die Elementarkapazität des Fahrzeuges, die Brennstoffquantität also, die für eine Strecke der Länge d reicht. Die Brennstoffmenge für die Überwindung der Strecke BX beträgt

$$c\int_0^x f(t)\,dt. \tag{1}$$

Dieses Integral hängt von der Funktion f und der Lage des Punktes X ab und sei daher mit $j(f; x)$ bezeichnet; seine Existenz ist angesichts der aufgeführten Eigenschaften von f klar. Um die Menge $cj(f; x)$ nach dem von A verschiedenen Punkt X zu bringen, braucht es mindestens $[j(f; x)]+1$ Ankünfte in X; denn bei bloss $[j(f; x)]$ Ankünften wird weniger als $cj(f; x)$ nach X gebracht[2]. Dies heisst aber, dass in einer rechtsseitigen Halbumgebung von x gilt: $f(y) \geqq 2[j(f; x)]+1$, oder wegen der rechtsseitigen Stetigkeit in x auch $f(x) \geqq 2[j(f; x)]+1$. Diese «Anschlusseigenschaft» der Fahrtdichten galt es noch aufzuzeigen.

Es erweist sich für das folgende als geeignet, die Fahrtdichten für alle nichtnegativen reellen Zahlen, das heisst über ganz R^+, zu studieren und erst hinterher auf das Intervall von 0 bis r zu beschränken. Auf diese Weise werden die Sonderstellung des Punktes A und die sich damit ergebenden Komplikationen ausgeschaltet.

Unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen als dies im Hinblick auf die Definition der Fahrtdichte nötig wäre, gewinnen wir nun die Einsicht über die bezüglich unseres Problems optimale Fahrtdichte:

Satz 1: *Voraussetzungen:* a) *f sei über R^+ definiert, und $f(x) \geqq 1$ für alle $x \in R^+$.* b) *f sei über jedem endlichen Teilintervall von R^+ im* Riemann*schen Sinne eigentlich integrierbar.* c) *f erfülle die Anschlussbedingung*

$$f(x) \geqq 2[j(f; x)]+1 \qquad (\textit{alle } x \in R^+). \tag{2}$$

d) *Ist* $t_0 = 0$; $t_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{2\nu+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *so sei* $h(x) = 2n+1$, *falls* $t_n \leqq x < t_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. — *Behauptung: h ist eine Fahrtdichte, die zur Überwindung jeder Strecke taugt, und für alle $x \in R^+$ gilt*

$$j(f; x) \geqq j(h; x). \tag{3}$$

Der Satz besagt also, dass die wegen der Divergenz der Reihe $\sum 1/(2\nu+1)$ auf

[2] Mit $[a]$ sei die grösste a nicht überschreitende ganze Zahl bezeichnet, so dass also $[a] \leqq a < [a]+1$ gilt.

ganz R^+ erklärte Funktion h alle Eigenschaften einer Fahrtdichte besitzt und die optimale Fahrtdichte für einen beliebigen Anfangspunkt A darstellt. Der minimale Brennstoffverbrauch zur Überwindung der Strecke AB beträgt somit $c\,j(h;r)$, und die exakte Lösung ist gefunden. Als Funktion von r ist $j(h;r)$ stetig und stückweise linear.

Beweis: 1. *h ist eine Fahrtdichte.* Im Hinblick auf die Voraussetzung (d) bleibt lediglich nachzuweisen, dass h die Anschlusseigenschaft (2) besitzt. Sei $x \in R^+$ beliebig. Dann gibt es genau eine ganze Zahl $m \geqq 0$ mit $t_m \leqq x < t_{m+1}$. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} j(h;x) &= \sum_{\nu=0}^{m-1} \{j(h;t_{\nu+1}) - j(h;t_\nu)\} + j(h;x) - j(h;t_m) \\ &= \sum_{\nu=0}^{m-1} (2\nu+1)\frac{1}{2\nu+1} + (2m+1)(x-t_m) = m + (2m+1)(x-t_m) \end{aligned}$$

und wegen $x - t_m < t_{m+1} - t_m = 1/(2m+1)$ oder $(2m+1)(x-t_m) < 1$ auch $[j(h;x)] = m$. Nach Voraussetzung (d) ist $h(x) = 2m+1$, also gilt

$$h(x) = 2[j(h;x)]+1 \qquad (\textit{alle } x \in R^+), \tag{4}$$

das heisst die Anschlusseigenschaft ist bei h in schärfster Form vorhanden. — 2. *h löst das Problem.* Zum gegebenen r existiert genau eine nichtnegative ganze Zahl m mit $t_m \leqq r < t_{m+1}$. Bei A wird im Falle $t_m < r < t_{m+1}$ die ersten m Male je $\{(2m-1)/(2m+1) + 2(r-t_m)\}\,c$ und das letzte Mal $\{2m/(2m+1) + (r-t_m)\}\,c$, also insgesamt $\{m + (2m+1)(r-t_m)\}\,c$ getankt und beim Punkt T_m mit der Koordinate t_m die Menge mc deponiert. Es sei weiter $\mu \geqq 0$ ganz. Bei $T_{\mu+1}$ bestehe ein Depot von $(\mu+1)\,c$. Es wird $(\mu+1)$mal vollgetankt und bei T_μ die ersten μ Male je $c\,(2\mu-1)/(2\mu+1)$, das letzte Mal $c\,2\mu/(2\mu+1)$, das heisst insgesamt μc abgelegt. Die Strecke AB wird also überwunden, und zwar unter Verbrauch der ganzen bei A bezogenen Brennstoffquantität. — 3. *Beweis von* (3). Wegen $h(x) \geqq 1$, $f(x) \geqq 1$ für alle $x \in R^+$ sind die Integralfunktionen $j(h;x)$ und $j(f;x)$ über R^+ streng monoton wachsend, und es existieren eindeutig bestimmte monoton wachsende Folgen von Ganzzahligkeitsstellen t_m und u_m, so dass also $j(h;t_m) = j(f;u_m) = m$ ($m \geqq 0$ ganz) gilt. Wir zeigen, dass die Beziehung

$$u_m \leqq t_m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

besteht. Für $m = 0$ ist die Behauptung trivial. Wir treffen die Induktionsannahme $u_m \leqq t_m$. Für $u_m \leqq x < u_{m+1}$ gilt $m \leqq j(f;x) < m+1$. Somit ist $[j(f;x)] = m$ und $f(x) \geqq 2m+1$, und mit $1 = j(f;u_{m+1}) - j(f;u_m) \geqq (2m+1)(u_{m+1} - u_m)$ resultiert $u_{m+1} - u_m \leqq 1/(2m+1) = t_{m+1} - t_m$. Mit der Induktionsannahme folgt hieraus $u_{m+1} \leqq t_{m+1}$, womit (5) sichergestellt ist. — Sei wiederum $x \in R^+$ beliebig. Dann gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen $m, n \geqq 0$ mit $u_m \leqq x < u_{m+1}$, $t_n \leqq x < t_{n+1}$. Wäre hierbei $m < n$, so wäre $m+1 \leqq n$ und folglich wegen (5) $u_{m+1} \leqq t_{m+1} \leqq t_n$, was mit $t_n \leqq x < u_{m+1}$ unvereinbar ist; somit gilt $m \geqq n$. Im Falle $m > n$ folgt mit Rücksicht auf $m \leqq j(f;x) < m+1$ und $n \leqq j(h;x) < n+1$ die Behauptung (3). Es bleibt der Fall $m = n$ zu betrachten. Für $t_n \leqq t \leqq x$ gilt $[j(f;t)] = [j(h;t)] = n$ oder mit (2) und (4) $f(t) \geqq 2[j(f;t)]+1 = 2[j(h;t)]+1 = h(t)$, das heisst

$$f(t) \geqq h(t) \quad \textit{für} \quad t_n \leqq t \leqq x. \tag{6}$$

Es folgt mit (6) und (5) weiter $j(h;x) = n + \int_{t_n}^{x} h(t)\,dt \leqq n + \int_{t_n}^{x} f(t)\,dt \leqq n + \int_{u_n}^{x} f(t)\,dt = j(f;x)$.

Da $x \in R^+$ beliebig war, so ist (3) vollumfänglich bewiesen.

3. Eine asymptotische Approximation der Lösung

Der für die Anwendungen etwas unbequeme Charakter der soeben gefundenen Lösung lässt es als wünschbar erscheinen, eine einfache mit $j(h;r)$ asymptotisch gleiche Funktion anzugeben. Vorerst stellen wir einige Hilfsaussagen bereit: Mit

$$m(r) = \operatorname*{Max}_{t_n \leqq r} n; \qquad t_{m(r)} = \operatorname*{Max}_{t_n \leqq r} t_n \tag{7}$$

schliesst man ohne weiteres auf $m(r) \to +\infty$, wobei sich diese und alle folgenden Grenzwertaussagen auf den Übergang $r \to \infty$ beziehen sollen. Wegen $m(r) \leqq j(h;r) < m(r)+1$ folgt weiter

$$j(h;r)/m(r) \to 1 \tag{8}$$

und mit $t_{m(r)} \leqq r < t_{m(r)+1} = t_{m(r)} + 1/(2m(r)+1)$ auch $\{r - t_{m(r)}\} \to 0$, woraus wiederum

$$e^{t_{m(r)}}/e^r \to 1 \tag{9}$$

resultiert. Ist nun $s_{m(r)} = \sum_{\nu=1}^{m(r)} \frac{1}{\nu}$, so gilt $t_{m(r)} = s_{2m(r)} - s_{m(r)}/2$. Bezeichnet C die EULERsche Konstante, so erhält man $2t_{m(r)} - 2\ln\{2m(r)\} + \ln\{m(r)\} \to C$ oder $2t_{m(r)} - \ln\{m(r)\} \to C + \ln 4$ und hieraus $m(r)/e^{2t_{m(r)}} \to e^{-C}/4$. Mit (8) und (9) ergibt sich $j(h;r)/e^{2r} \to e^{-C}/4$ oder

Satz 2:

$$j(h;r) \sim \frac{e^{-C}}{4} e^{2r} \quad (r \to \infty).$$

Damit ist die in Aussicht gestellte asymptotische Approximation gewonnen, und es sei vermerkt, dass schon bei $r = 3/2$ der relative Fehler kleiner ist als ein Hundertstel.

Literaturverzeichnis

[1] M. GARDNER, Mathematical Games. Scientific American *200* (May 1959) 164.
[2] M. GARDNER, Mathematical Games. Scientific American *200* (June 1959) 164.
[3] I. C. PYLE, The Explorer's Problem. Eureka (Cambridge University Mathematical Society) No. *21* (October 1958) 5—7.
[4] M. GARDNER, Mathematische Rätsel und Probleme. Vieweg Braunschweig 1964.