Totalendliche Mengen

B. L. VAN DER WAERDEN in freundschaftlicher Verehrung zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

Von

PAUL FINSLER, Zürich

1. Mengen endlicher Stufenzahl

Die Mengen, die im folgenden betrachtet werden, sind reine Mengen, d. h. auch ihre Elemente sind stets nur wieder reine Mengen.

Beispiele von solchen Mengen sind die Nullmenge, die kein Element besitzt, und die Einsmenge, welche nur die Nullmenge als Element besitzt.

Die Elemente einer Menge m, die Elemente dieser Elemente usf. sind die in m wesentlichen Mengen. Ist die Menge a in b wesentlich und b in c, so ist auch a in c wesentlich.

Wenn der Übergang von einer Menge m zu ihren Elementen, dann zu den Elementen dieser Elemente usf. nur endlich oft ausgeführt werden kann, dann heisst die Menge m von endlicher Stufenzahl. Die in einer Menge endlicher Stufenzahl wesentlichen Mengen sind ebenfalls von endlicher Stufenzahl.

Eine Menge endlicher Stufenzahl ist nie in sich selbst wesentlich, denn sonst könnte dieser Übergang unendlich oft fortgesetzt werden. Ist eine Menge b in einer Menge a von endlicher Stufenzahl wesentlich, so ist a nicht in b wesentlich, denn sonst wäre a in sich selbst wesentlich.

Wenn der Übergang von einer Menge m zu ihren Elementen, dann zu den Elementen dieser Elemente usf. genau s-mal ausgeführt werden kann, dann heisst s die Stufenzahl der Menge m. So hat die Nullmenge die Stufenzahl 0, die Einsmenge die Stufenzahl 1.

Eine Menge endlicher Stufenzahl hat zusammen mit den in ihr wesentlichen Mengen eine bestimmte Struktur. Wenn die Mengen a und b dieselbe Struktur haben, d. h. wenn diese Mengen mit den darin wesentlichen Mengen eineindeutig und elemententreu aufeinander abgebildet werden können, dann sind sie identisch, andernfalls aber verschieden. Die Einsmenge ist von der Nullmenge verschieden, weil sie ein Element besitzt, während die Nullmenge kein Element besitzt. Es gibt aber nur eine Nullmenge und nur eine Einsmenge.

Die Elemente einer Menge müssen stets voneinander verschieden sein.

Eine Menge heisst endlich, wenn sie nur endlich viele Elemente besitzt; die Anzahl dieser Elemente heisst die Elementenzahl der Menge.

Eine Menge heisst totalendlich, wenn sie selbst und alle in ihr wesentlichen Mengen endlich sind und wenn sie zudem von endlicher Stufenzahl ist.

Es soll gezeigt werden:

Jede Menge endlicher Stufenzahl ist totalendlich.

Die Elemente einer Menge m bilden die erste Stufe von m, die Elemente dieser Elemente die zweite Stufe usf. Eine bestimmte Menge, z. B. die Nullmenge, kann verschiedenen Stufen von m angehören und auch in derselben Stufe öfters auftreten; sie ist aber doch jeweils nur einfach zu zählen. Die letzte Stufe von m besteht notwendig nur aus der Nullmenge, also aus einer endlichen Menge.

Wenn die k-te Stufe von m nur aus endlich vielen endlichen Mengen besteht, so gilt dasselbe für die $(k-1)$-te Stufe, da sich aus endlich vielen Mengen als Elementen nur endlich viele und nur endliche Mengen bilden lassen. Daraus folgt durch Induktion die Behauptung des Satzes.

Die totalendlichen Mengen bilden zusammen einen vielfältigen Strauss, der aber sogleich auseinandergenommen und geordnet werden soll.

2. Die Mengen als Zahlen

Die Zahl 0 kann durch die Nullmenge repräsentiert werden, die Zahl 1 durch die Einsmenge.

Von den natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ kann jede folgende durch die Menge dargestellt werden, welche die unmittelbar vorangehende als einziges Element besitzt, also $2=\{1\}$, $3=\{2\}$ usf. Es ist auch $1=\{0\}$, aber 0 ist keine natürliche Zahl; man kann 0 als verschwindende Zahl bezeichnen.

Die natürlichen Zahlen sind dann also durch totalendliche Mengen dargestellt, von denen jede genau ein Element besitzt, deren Elementenzahl also gleich 1 ist. Die Stufenzahl einer natürlichen Zahl stimmt mit der Zahl selbst überein.

Die Ordnungszahlen $0, 1, \mathit{2}, \mathit{3}, \ldots$ können so definiert werden, dass jede Ordnungszahl die Menge aller vorangehenden Ordnungszahlen darstellt, also $0=\{\}$, $1=\{0\}$ wie vorher, aber $\mathit{2}=\{0,1\}$, $\mathit{3}=\{0,1,\mathit{2}\}$, usf.

Die Reihe der Ordnungszahlen kann ins Transfinite fortgesetzt werden. Die endlichen Ordnungszahlen sind aber wieder totalendliche Mengen; ihre Elementenzahl stimmt ebenso wie ihre Stufenzahl mit der betreffenden Zahl selbst überein.

Man kann nun alle totalendlichen Mengen als verallgemeinerte Zahlen oder, da im folgenden keine andern Zahlen vorkommen, kurz als Zahlen bezeichnen. Der Unterschied in der Definition gegenüber den natürlichen Zahlen ist also nur der, dass sie nicht nur eine Zahl als Element besitzen dürfen, sondern beliebig endlich viele; ihre Stufenzahl ist ebenfalls endlich. Es wird sich zeigen, dass sich die Operationen der Addition und der Multiplikation mit bestimmten Modifikationen auf die verallgemeinerten Zahlen übertragen lassen, und zwar so, dass sie für die zugehörigen Stufenzahlen in der ursprünglichen Form erhalten bleiben.

3. Die Anordnung der Zahlen

Die Elementenzahl einer beliebigen Zahl z werde mit z^*, ihre Stufenzahl mit $|z|$ bezeichnet. Für natürliche Zahlen n ist $n^*=1$ und $|n|=n$.

Um die Zahlen, also die totalendlichen Mengen, in eine einfach geordnete Reihe zu bringen, könnte man so vorgehen, dass man sie zunächst nach ihrer Stufenzahl anordnet, bei gleicher Stufenzahl nach der Anzahl ihrer Elemente und bei gleicher Elementenzahl lexikographisch bezüglich der für die Elemente, die ja von kleinerer Stufenzahl sind, schon vorher gefundenen Anordnung.

Um jedoch eine bessere Übersicht insbesondere über die *Anzahl* der Zahlen von bestimmter Stufenzahl zu erhalten, empfiehlt es sich, *zuerst alle Zahlen bis zu einer bestimmten Stufenzahl* s in bestimmter Weise anzuordnen, diese Anordnungen dann für wachsendes s hintereinanderzusetzen und die an früherer Stelle schon vorgekommenen Zahlen kleinerer Stufenzahl zu streichen.

Die *vorläufige Anordnung* aller Zahlen z mit $|z| \leqq s$ werde so definiert: Die vorläufige Anordnung der Zahlen y mit $|y|<s$ sei bekannt. Die Zahlen z mit $|z| \leqq s$ sollen dann nach ihrer Elementenzahl und bei gleicher Elementenzahl lexikographisch bezüglich der für die Elemente y bekannten Anordnung geordnet werden.

Man erhält so der Reihe nach die folgenden vorläufigen Anordnungen: Für $s=0$ die Zahl 0; für $s=1$ die Reihe 0, 1; für $s=2$ die Reihe $0, 1, 2, \mathit{2}$. Für $s=3$ erhält man mit der Elementenzahl $z^*=0$ die Zahl 0, dann folgen mit $z^*=1$ die Zahlen $1, 2, 3, \{\mathit{2}\}$, mit $z^*=2$ die Zahlen $\mathit{2}, \{0, 2\}, \{0, \mathit{2}\}, \{1, 2\}, \{1, \mathit{2}\}, \{2, \mathit{2}\}$, mit $z^*=3$ die Zahlen $\{0, 1, 2\}, \mathit{3}, \{0, 2, \mathit{2}\}, \{1, 2, \mathit{2}\}$, und mit $z^*=4$ die Zahl $\{0, 1, 2, \mathit{2}\}$.

Die Anzahl der Zahlen z mit $|z| \leqq s$ beträgt also für $s=0, 1, 2, 3$ je $2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^4=16$.

Ist allgemein die Anzahl der Zahlen y mit $|y|<s$ gleich n, so erhält man für die Zahlen z mit $|z| \leqq s$ je $\binom{n}{m}$ Zahlen mit der Elementenzahl $z^*=m$, zusammen also 2^n Zahlen. Für $s=4$ sind dies $2^{16}=65536$, für $s=5$ sind es 2^{65536} Zahlen usf.

Die Anzahl der Zahlen, deren Stufenzahl *genau* gleich s ist, beträgt daher für $s=0, 1, 2, 3, 4, 5$ usf. je 1, 1, 2, 12, 65520, $2^{65536}-65536$ usf.

Die *endgültige Anordnung* der Zahlen erhält man dadurch, dass man in der vorläufigen Anordnung der Zahlen z mit $|z| \leqq s$ alle Zahlen mit $|z|<s$ streicht und die so erhaltenen Reihen für wachsendes s hintereinandersetzt.

Die Zahlen mit $|z|=s$ bleiben auch hier nach ihrer Elementenzahl geordnet. Bei gleicher Elementenzahl können sich aber gewisse Umstellungen gegenüber der zuerst angeführten Anordnung ergeben.

Bei den Zahlen z mit $|z| \leqq 3$ unterscheidet sich die endgültige Anordnung von der vorläufigen nur dadurch, dass die Zahl $\mathit{2}$ von der sechsten an die vierte Stelle rückt, also zwischen die Zahlen 2 und 3 zu stehen kommt, während die Zahlen 3 und $\{\mathit{2}\}$ an die fünfte und sechste Stelle rücken. Diese Umstellung lässt erkennen, dass z. B. bei den Zahlen mit $|z|=4$ und $z^*=2$ auch in der endgültigen Anordnung nicht die zuerst angegebene Regel erfüllt ist: die Zahl $\{3, \{\mathit{2}\}\}$ kommt vor der Zahl $\{3, \mathit{2}\}$, während es nach der ersten Regel umgekehrt sein müsste.

4. Die Figur einer Zahl

Jeder Zahl kann man eine bestimmte *Figur* zuordnen, die aus *Punkten* und *Pfeilen* zusammengesetzt ist.

Der Zahl selbst und jeder in ihr wesentlichen Zahl entspricht je ein Punkt der

Figur, und von dem der Zahl a entsprechenden Punkt a geht genau dann ein Pfeil zum Punkt b, wenn die entsprechende Zahl b Element der Zahl a ist. Die Punkte einer solchen Figur kann man auch die Zahlen der Figur nennen.

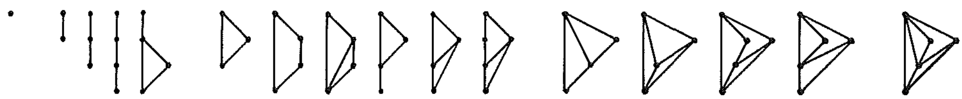
Die Pfeile können durch Strecken ersetzt werden, wenn man festsetzt, dass diese stets «von oben nach unten» orientiert sein sollen. Dabei ist also eine Vertikalrichtung vorausgesetzt; die Strecken können auch schief zu dieser Richtung verlaufen, aber nicht senkrecht dazu.

Der «oberste» Punkt der Figur einer Zahl z ist der Zahl z selbst zugeordnet, der «unterste» Punkt bedeutet die Nullmenge, also die Zahl 0. Diese ist in jeder von 0 verschiedenen Zahl wesentlich.

Jede Figur einer Zahl ist zusammenhängend, d. h. vom obersten Punkt ausgehend kann man durch eine zusammenhängende Folge von Pfeilen zu jedem andern Punkt der Figur gelangen.

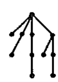
Für die Zahlen z mit $|z| \leqq 3$ erhält man in der vorläufigen Anordnung die folgenden Figuren:

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \{\mathit{2}\} \quad \mathit{2} \quad \{0,2\} \quad \{0,\mathit{2}\} \quad \{1,2\} \quad \{1,\mathit{2}\} \quad \{2,\mathit{2}\} \quad \{0,1,2\} \quad \mathit{3} \quad \{0,2,\mathit{2}\} \quad \{1,2,\mathit{2}\} \quad \{0,1,2,\mathit{2}\}$



Um die verschiedenen Stufen einer Zahl z deutlich zu machen, kann es zweckmässig sein, eine andere Darstellung zu verwenden, bei der die Elemente von z als Punkte in einer horizontalen Reihe dargestellt werden, die Elemente dieser Elemente in einer zweiten Reihe usf., und wieder jede Zahl mit ihren Elementen durch Pfeile (oder Strecken) verbunden wird. Da dieselbe Zahl in mehreren Stufen vorkommen kann, ist hier nicht mehr jeder Zahl nur ein Punkt zugeordnet.

Die letzte Zahl mit $|z| = 3$, also die Zahl $\{0, 1, 2, \mathit{2}\}$, erhält dann die folgende Gestalt:



Die zuerst angegebenen Figuren können als die Blumen, die zuletzt erwähnten Darstellungen als die zugehörigen Dolden des oben erwähnten Strausses betrachtet werden.

5. Die Addition

Die Figur der Summe $a+b$ von zwei Zahlen a und b erhält man, indem man in der Figur von a den Punkt 0 durch den Punkt b der Figur von b ersetzt, indem man also die beiden Figuren «aneinanderhängt», so dass der «unterste» Punkt der Figur von a mit dem «obersten» Punkt der Figur von b zur Deckung kommt. Damit ist auch die Summe $a+b$ selbst definiert.

Es ergeben sich die folgenden Regeln:

Die Addition ist assoziativ, d. h. es ist $a+(b+c)=(a+b)+c$.

Dies ist direkt ersichtlich.

Die Addition ist nicht immer kommutativ, denn es ist z. B. $1+\mathit{2}=\{\mathit{2}\}$, aber $\mathit{2}+1=\{1, 2\}$.

Es ist stets $0+a=a+0=a$.

Aus $a+b=a$ folgt $b=0$ und aus $a+b=b$ folgt $a=0$.

Die Stufenzahl einer Zahl z ist gleich der grössten Anzahl von Pfeilen, die man in ihrer Richtung zusammenhängend durchlaufen kann, um in der Figur der Zahl z vom Punkt z zum Punkt 0 zu gelangen. Daraus ergibt sich:

Bei der Addition von Zahlen werden auch ihre Stufenzahlen addiert, d. h. es ist $|a|+|b|=|a+b|$.

Für natürliche Zahlen stimmt also die Addition mit der gewöhnlichen Addition überein, und es gilt daher für natürliche Zahlen m und n auch $m+n=n+m$.

Die Elementenzahl einer Summe ist gleich der Elementenzahl des ersten nicht verschwindenden Summanden, d. h. es ist

$$(a+b)^* = a^* \text{ für } a \neq 0.$$

Eine Summe von mindestens zwei nicht verschwindenden Ordnungszahlen ist keine Ordnungszahl, da sich sonst die Elementenzahl des ersten Summanden vergrössern müsste.

Da in jeder nicht verschwindenden Zahl die Nullmenge wesentlich ist, gilt die Regel:

Ist $a \neq 0$, so erhält man die Summe $a+b$, indem man zu jedem Element von a die Zahl b addiert und die Menge dieser Zahlen bildet.

Zusammen mit der Regel $0+b=b$ erhält man damit eine induktive Definition der Addition, da die Elemente von a eine kleinere Stufenzahl besitzen wie a selbst.

Insbesondere ist $1+b=\{0\}+b=\{b\}$, und z. B. $\mathit{2}+1=\{0, 1\}+1=\{1, 2\}$.

6. Die Monozahlen

Eine Zahl, die sich als Summe von zwei nicht verschwindenden Zahlen darstellen lässt, heisse «additiv zerlegbar» oder kurz zerfällbar.

Die nicht zerfällbaren, also die additiv unzerlegbaren Zahlen ausser 0 heissen Monozahlen.

Die Zahl 0 gilt nicht als Monozahl, wie ja entsprechend auch die Zahl 1 nicht als Primzahl gilt.

Die Zahl 1 ist Monozahl; die übrigen natürlichen Zahlen sind zerfällbar.

Um alle Monozahlen zu bestimmen, ist es am einfachsten, ähnlich wie beim «Sieb des Eratosthenes» in der Reihe aller Zahlen die 0 und die zerfällbaren Zahlen zu streichen.

Von den Zahlen mit der Stufenzahl 2 ist die Zahl $2=1+1$ zerfällbar; die Zahl $\mathit{2}=\{0, 1\}$ ist Monozahl.

Da sich bei der Addition auch die zugehörigen Stufenzahlen addieren, findet man leicht als zerfällbare Zahlen der Stufenzahl 3 die Zahlen $1+2=3$, $1+\mathit{2}=\{\mathit{2}\}$, $\mathit{2}+1=\{1, 2\}$; es bleiben somit 9 Monozahlen der Stufenzahl 3.

Unter den 65520 Zahlen der Stufenzahl 4 findet man 12 von der Form $1+x$, dazu weitere 10 von der Form $x+1$, und schliesslich noch die Zahl $\mathit{2}+\mathit{2}=\{\mathit{2}, \{\mathit{2}\}\}$, also zusammen 23 zerfällbare Zahlen; es bleiben somit 65497 Monozahlen der Stufenzahl 4.

Unter den Zahlen der Stufenzahl 5 gibt es 131047 zerfällbare Zahlen, nämlich

65520 der Form $1+y$, dazu weitere 65508 der Form $y+1$, weitere 10 der Form $2+x$ und noch 9 der Form $x+2$, wobei jeweils y die Stufenzahl 4, x die Stufenzahl 3 besitzt. Es bleiben somit 2^{65536}—196583 Monozahlen der Stufenzahl 5.

7. Die Zerfällbarkeit der Zahlen in Monozahlen

Eine in der Zahl z wesentliche Zahl k heisse ein Knoten von z, wenn die Figur von z bei Wegnahme des Punktes k zerfällt, also nicht mehr zusammenhängend ist.

Die Figur von z zerfällt dann in zwei Teile. Der zweite Teil enthält die in k wesentlichen Zahlen, zu denen insbesondere die 0 gehört; mit k zusammen ergeben sie die Figur von k. Der erste Teil enthält die von z aus längs den Pfeilen noch erreichbaren Zahlen; in diesen ist die Zahl k wesentlich, da jede von ihnen ausgehende Folge von Pfeilen, die zur 0 führt, den Punkt k enthalten muss. Fügt man zu diesem Teil an Stelle von k den Punkt 0 hinzu, der dann den «untersten» Punkt der Figur darstellt, so erhält man die Figur einer Zahl a derart, dass $z=a+k$ wird. Die Zahl z ist dann also zerfällbar.

Da umgekehrt eine zerfällbare Zahl $z=a+b$ mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ den Knoten b besitzt, so folgt:

Die nicht verschwindenden Zahlen ohne Knoten sind die Monozahlen.

Man findet leicht:

Ist k ein Knoten von a, so ist $k+b$ ein Knoten von $a+b$; ist l ein Knoten von b, so ist l auch Knoten von $a+b$. Die Zahl $z=a+b$ besitzt also für $a \neq 0$, $b \neq 0$ genau einen Knoten mehr als die Zahlen a und b zusammen.

Sind k und l verschiedene Knoten von z, so ist entweder k in l oder l in k wesentlich, je nachdem l dem ersten oder zweiten der bei der Zerfällung von z durch k entstehenden Teile angehört. Ist k in l und l in m wesentlich, dann ist auch k in m wesentlich. Die Reihe der Knoten von z ist also einfach geordnet.

Man kann nun alle Knoten einer Zahl z in beliebiger Reihenfolge «auflösen», d. h. durch Summen ersetzen; dies ergibt eine Darstellung von z als Summe von $n+1$ Monozahlen, wenn die Zahl z n Knoten besitzt. Diese Darstellung ist auch hinsichtlich der Reihenfolge der Summanden eindeutig bestimmt; die Figuren der Summanden sind die vor, zwischen und nach den Knoten von z liegenden und noch durch die Punkte der Knoten selbst ergänzten Teile der Figur von z in der durch die Figur selbst gegebenen Anordnung.

Wenn man noch sagt, dass die Zahl 0 als Summe von 0 Monozahlen und jede Monozahl als Summe von einer Monozahl darstellbar ist, so folgt:

Jede Zahl ist eindeutig als Summe von Monozahlen darstellbar.

Aus der eindeutigen Zerfällbarkeit der Zahlen in Monozahlen ergibt sich ein für später nützlicher Hilfssatz:

Ist $a+b=c+d$, so folgt aus $|a|=|c|$ und aus $|b|=|d|$, dass $a=c$ und $b=d$ ist.

Die Stufenzahlen der Monozahlen sind mindestens gleich 1 und addieren sich bei der Addition der Monozahlen. Die Summe der ersten Monozahlen bei der vollständigen Zerfällung der Zahl $z=a+b=c+d$ bis zur Gesamt-Stufenzahl $|a|=|c|$

ist also eindeutig bestimmt; dies bedeutet aber $a=c$ und folglich $b=d$. Dasselbe ergibt sich, wenn man die Summe der letzten Monozahlen mit der Gesamt-Stufenzahl $|b|=|d|$ betrachtet.

8. Die Multiplikation

Die Figur des Produkts * ab von zwei Zahlen a und b erhält man, indem man in der Figur von a jeden Pfeil durch die Figur von b ersetzt. Damit ist auch das Produkt ab selbst definiert.

Es ergeben sich die folgenden Regeln:

Die Multiplikation ist assoziativ, d. h. es ist $a(bc)=(ab)c$.

Dies ist direkt ersichtlich.

Die Multiplikation ist nicht immer kommutativ, denn es ist z. B. $2\cdot 2=2+2=\{2,\{2\}\}$, aber $2\cdot 2=\{1,3\}$.

Es ist stets $0\cdot a=a\cdot 0=0$ und $1\cdot a=a\cdot 1=a$.

Aus $ab=0$ folgt $a=0$ oder $b=0$; aus $ab=a$ folgt $b=1$ und aus $ab=b$ folgt $a=1$.

Dies ergibt sich direkt aus der Definition oder auch aus der folgenden Regel:

Bei der Multiplikation von Zahlen werden ihre Stufenzahlen und auch ihre Elementenzahlen multipliziert, d. h. es ist $|a|\,|b|=|ab|$ und $a^*b^*=(ab)^*$.

Die «längste» Verbindung von a zur 0 in der Figur von a enthält $|a|$ Pfeile, die längste Verbindung von b zur 0 in der Figur von b enthält $|b|$ Pfeile. Ersetzt man also in der Figur von a jeden Pfeil durch die Figur von b, so erhält man als längste Verbindung von ab zur 0 in der Figur von ab eine solche mit $|a|\,|b|$ Pfeilen.

In der Figur von a gehen a^* Pfeile vom Punkt a und in der Figur von b b^* Pfeile vom Punkt b aus, also gehen in der Figur von ab gerade a^*b^* Pfeile vom Punkt ab aus.

Ist n eine natürliche Zahl, so ist $na=a+a+\cdots+a$ gleich einer Summe von n gleichen Summanden a.

Die Figur von n besteht aus n aufeinanderfolgenden Pfeilen, die dann, je durch die Figur von a ersetzt, zusammen die Figur der Summe $a+a+\cdots+a$ ergeben.

Insbesondere hat das Produkt mn von natürlichen Zahlen m und n die gewöhnliche Bedeutung, und es ist hier auch $mn=nm$.

Weiter gilt allgemein, wie direkt zu sehen ist, das distributive Gesetz in der Form $(a+b)c=ac+bc$.

Umgekehrt ist aber z. B. $2(1+1)=2\cdot 2\neq 2\cdot 1+2\cdot 1=2\cdot 2$.

Ein Produkt von Ordnungszahlen ist im allgemeinen keine Ordnungszahl. So ist z. B. $2\cdot 2=\{0,1,2,\{2\}\}\neq 4=\{0,1,2,3\}$.

9. Kommutative Summen

$a+b=b+a$ gilt für Monozahlen a und b nur, wenn $a=b$ ist. Dies folgt direkt aus der eindeutigen Zerfällbarkeit der Zahl $a+b$, da der erste Summand eindeutig bestimmt ist.

* Das Produkt von Zahlen ist hier nicht dasselbe wie das in der Mengenlehre gebräuchliche Produkt von Mengen.

Für beliebige Zahlen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt der Satz:

Ist $a+b=b+a$, so ist $a=mc$ und $b=nc$ mit natürlichen Zahlen m und n.

Zum Beweis seien die Zahlen a und b als Summen von Monozahlen dargestellt: $a=d_1+d_2+\cdots+d_k$, $b=e_1+e_2+\cdots+e_l$.

Aus der Eindeutigkeit der Zerfällung der Zahl

$$z=a+b=b+a$$

in Monozahlen ergibt sich z. B. für $k>l$, dass $d_1=e_1$, $d_2=e_2, \ldots, d_l=e_l$ sein muss. Setzt man nun $d_{l+1}+\cdots+d_k=b_1$, so ist $a=b+b_1$ und $z=b+b_1+b=b+b+b_1$, also $b_1+b=b+b_1$.

Nun kann $$z_1=b_1+b=b+b_1$$

ebenso behandelt werden. Während $z=a+b$ in $k+l$ Monosummanden zerfällt, enthält $z_1=b+b_1$ nur k solche Summanden, also um l weniger als z.

Setzt man $k=l+l_1$, so kann man für $l>l_1$ $l=l_1+l_2$ und $b=b_1+b_2$ setzen, wobei $z_1=b_1+b_1+b_2=b_1+b_2+b_1$ wird, also $b_1+b_2=b_2+b_1=z_2$. Ist aber $l_1>l$, so setzt man $l_1=l+l_2$ und $b_1=b+b_2$, wobei $z_1=b+b_2+b=b+b+b_2$ wird, also $b_2+b=b+b_2=z_2$. In beiden Fällen enthält z_2 weniger Summanden als z_1, und man kann so fortfahren, bis man, da die Anzahl der Summanden nicht unbegrenzt abnehmen kann, zu einem

$$z_r=b_q+b_r=b_r+b_q$$

kommt mit $l_r=l_q$; dann folgt aber $b_r=b_q=c$.

Dieses Verfahren entspricht dem Euklidischen Algorithmus, und es ist $l_r=l_q=t=(k,l)$ der grösste gemeinsame Teiler der Zahlen k und l.

Wie man nun, die Gleichungen in umgekehrter Reihenfolge durchlaufend, aus $l_r=l_q=t$ auf $k=mt$ und $l=nt$ schliessen kann, so folgt auch aus $b_r=b_q=c$, dass $a=mc$ und $b=nc$ sein muss mit denselben natürlichen Zahlen m und n als Faktoren.

Ist z. B. $l_1>l$ und sind $b_2=(m-2n)c$ und $b=nc$ schon gefunden, so folgt $b_1=b+b_2=(m-n)c$ und $a=b+b_1=mc$.

10. Die Primzahlen

Eine Zahl, die sich als Produkt von zwei von 0 und 1 verschiedenen Zahlen darstellen lässt, heisse «multiplikativ zerlegbar» oder kurz zerlegbar.

Die multiplikativ unzerlegbaren Zahlen ausser 0 und 1 heissen Primzahlen.

Wenn ein Faktor eines nicht verschwindenden Produkts keine natürliche Zahl ist, dann enthält die Figur dieses Faktors wenigstens einen Punkt, von dem mindestens zwei Pfeile ausgehen; dies gilt dann auch für die Figur des Produkts. Es folgt:

Ein Produkt von Zahlen ist nur dann eine natürliche Zahl, wenn alle Faktoren natürliche Zahlen sind. Die Primzahlen unter den natürlichen Zahlen sind also die gewöhnlichen Primzahlen.

Da sich bei der Multiplikation von Zahlen auch die zugehörigen Stufenzahlen multiplizieren, gilt der Satz:

Alle Zahlen, deren Stufenzahl eine Primzahl ist, sind selbst Primzahlen.

Man findet die Primzahlen am einfachsten, indem man in der Reihe aller Zahlen die Zahlen 0 und 1 und die zerlegbaren Zahlen streicht.

Alle Zahlen mit den Stufenzahlen 2, 3, 5 sind Primzahlen. Unter den Zahlen mit der Stufenzahl 4 sind die einzigen zerlegbaren die Zahlen $2\cdot 2=4$, $2\cdot\mathit{2}=\{\mathit{2},\{\mathit{2}\}\}$, $\mathit{2}\cdot 2=\{1,3\}$ und $\mathit{2}\cdot\mathit{2}=\{0,1,\mathit{2},\{\mathit{2}\}\}$.

Unter den Zahlen z mit $|z|\leqq 5$ gibt es also nur 4 zerlegbare, jedoch $2^{65536}-6$ Primzahlen.

11. Die Zerlegbarkeit der Zahlen in Primfaktoren

Wenn eine Zahl z zerlegbar ist, dann lässt sie sich als Produkt von zwei Zahlen darstellen, welche kleinere Stufenzahlen besitzen wie z. Diese Faktoren lassen sich, soweit sie nicht Primzahlen sind, wiederum in Faktoren mit kleinerer Stufenzahl zerlegen usf. Da die Stufenzahlen nicht unbegrenzt abnehmen können, erhält man schliesslich eine Darstellung der Zahl z als Produkt von lauter Primfaktoren.

Wenn man noch sagt, dass die Zahl 1 als Produkt von 0 Primzahlen und jede Primzahl als Produkt von einer Primzahl darstellbar ist, so folgt:

Jede von 0 verschiedene Zahl ist als Produkt von Primzahlen darstellbar.

Bei einer solchen Zerlegung ist die *Reihenfolge* der Faktoren wesentlich. Um eine *eindeutige* Zerlegung zu erhalten, wird man auf jeden Fall die Primfaktoren der *natürlichen Zahlen*, die als Faktoren der gegebenen Zahl auftreten können, *der Grösse nach* anordnen. Ob dies aber genügt, um die Zerlegung eindeutig zu machen, ist eine noch offene Frage.

Es fragt sich zunächst, in welchen Fällen ein Produkt *kommutativ* ist, wann also $ab=ba$ ist.

Wenn man ein Produkt von n gleichen Faktoren a als n-te Potenz von a bezeichnet, so gilt für natürliche Zahlen m und n die Regel $a^m a^n=a^n a^m=a^{m+n}$. Ferner gilt $mn=nm$ für natürliche Zahlen m und n.

Ob aber auch in andern Fällen, wenn z. B. a und b Primzahlen, aber keine natürlichen Zahlen sind, $ab=ba$ mit $a\neq b$ möglich ist, bleibt noch dahingestellt. Auf jeden Fall ist $ab\neq ba$, wenn a zerfällbar und b eine von 1 verschiedene Monozahl ist, da die Anzahl der Knoten von a beim Produkt ab erhalten bleibt, beim Produkt ba aber verschwindet.

Es ergeben sich bezüglich der Faktorenzerlegung noch einige besondere Sätze:

Ist m eine natürliche Zahl, so folgt aus $ma=mb$ die Gleichung $a=b$; man kann also eine natürliche Zahl als Faktor in einer Gleichung «links wegheben».

Es folgt nämlich zunächst $|a|=|b|$; wenn man aber die Produkte ma und mb als Summen von m gleichen Summanden darstellt, so ergibt sich $a=b$ nach dem in Nr. 7 erwähnten Hilfssatz.

Ist $z=pa=qb$, wobei p und q verschiedene natürliche Primzahlen sind, so ist $z=pqc$ mit passendem c.

Da die Stufenzahl $|z|$ ebenfalls durch die verschiedenen Primzahlen p und q und folglich durch pq teilbar ist, kann $|z|=pqs$ gesetzt werden. Es folgt $|a|=qs$ und $|b|=ps$.

Es sei $p<q$. Wie bekannt, lässt sich mq für $m=0, 1, 2, \ldots, p-1$ in der Form $np+i$ darstellen, wobei i ebenfalls alle Werte $0, 1, 2, \ldots, p-1$ annimmt. Andernfalls müssten zwei gleiche Reste i auftreten, d. h. es wäre $np+i=mq$, $kp+i=lq$. Daraus folgt aber $(k-n)p=(l-m)q$; es wäre also $l-m$ durch p teilbar, und wenn auch l nur die Werte $0, 1, 2, \ldots, p-1$ annehmen darf, so folgt $l=m$ und $k=n$.

Die Figur von b muss nun bei jeder Stufe is mit $i=1, 2, \ldots, p-1$ einen Knoten besitzen, da $n|b|+is=nps+is=mqs$ gesetzt werden kann und die Figur von z bei der Stufe $mqs=m|a|$ einen Knoten hat. Es ist also $b=c_1+c_2+\cdots+c_p$ mit $|c_i|=s$ $(i=1, 2, \ldots, p)$, und $ma=nb+c_1+c_2+\cdots+c_i$.

Der letzte Summand a in der Summe $a+\cdots+a=ma$ hat somit die Form $a=\cdots+c_1+c_2+\cdots+c_i$, und da dies für $i=1, 2, \ldots, p$ gilt und $|c_i|=s$ ist, so folgt nach dem Hilfssatz von Nr. 7, dass $c_1=c_2=\cdots=c_p$ sein muss. Wird diese Zahl gleich c gesetzt, so wird $b=pc$, folglich $z=qb=pqc$ und $a=qc$. Damit ist der Satz bewiesen.

Allgemeiner folgt:

Ist $z=ma=nb$ und k das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen m und n, so ist $z=kc$ mit passendem c.

Zunächst kann man in z den grössten gemeinsamen Teiler von m und n als linken Faktor herausheben oder «links abspalten». Sind aber m und n teilerfremd und ist p ein Primfaktor von m und q ein Primfaktor von n, so lässt sich nach dem letzten Satz der Faktor pq in ma und nb links abspalten. Ist aber etwa $m=1$, also $a=nb$, so lässt sich der Faktor n links abspalten, wenn man a durch nb ersetzt.

Führt man diese Operationen für $z=ma=nb$ soweit möglich der Reihe nach durch, so kommt man schliesslich zur Abspaltung des ganzen Faktors k; es wird also z in der Form $z=kc$ dargestellt.

Damit ist jedoch noch nicht gezeigt, dass bei jeder Primfaktorenzerlegung von z das Produkt der links stehenden natürlichen Primzahlen immer durch k teilbar ist. Auf jeden Fall gibt es aber eine grösste natürliche Zahl k, die sich von z bei passender Darstellung links abspalten lässt.

Analoge Resultate ergeben sich, wenn natürliche Zahlen als Faktoren auf der rechten Seite auftreten; die Herleitung ist aber anders.

Wenn eine Zahl z rechts mit einer natürlichen Zahl n multipliziert wird, so wird in der Figur von z jede in z wesentliche Zahl mit n multipliziert, da jeder Pfeil durch die Figur von n ersetzt wird.

Eine in z wesentliche Zahl heisse Verzweigungszahl der Ordnung v, wenn sie v Elemente besitzt und $v>1$ ist. Wird z rechts mit der natürlichen Zahl n multipliziert, so bleiben die Verzweigungszahlen mit ihrer Ordnung als solche erhalten; sie werden nur ebenfalls mit n multipliziert.

Eine Reihe aufeinanderfolgender Pfeile, die vom Punkt z oder von einer Verzweigungszahl von z zu einer andern Verzweigungszahl oder zum Punkt 0 führt, ohne sonst noch eine Verzweigungszahl zu treffen, heisse ein Weg; die Anzahl der Pfeile eines Weges heisse seine Länge. Wird das Produkt zn gebildet, so geht jeder Weg in einen Weg von n-facher Länge über.

Ist nun der grösste gemeinsame Teiler der Längen aller Wege, die in der Figur von z vorkommen, gleich m, so lässt sich z in der Form $z=cm$ darstellen; die Figur von c erhält man aus der Figur von z durch «Verkürzung» aller Wege auf den m-ten Teil. Die Zahl m ist die grösste natürliche Zahl, die sich als Faktor von z rechts abspalten lässt; sie ist als solche eindeutig bestimmt.

Es ist aber damit noch nicht gezeigt, dass bei jeder Primfaktorenzerlegung von z das Produkt der rechts stehenden natürlichen Primzahlen immer gleich m ist.

Aus $am = bm$ folgt jedoch $a = b$, wenn m eine natürliche Zahl ist; man kann also einen solchen Faktor in einer Gleichung auch «rechts wegheben».

Wenn $z = anb \neq 0$ ist, wobei a und b im Gegensatz zu n keine natürlichen Zahlen sind, so kann man in a eine grösste natürliche Zahl rechts und in b eine solche links abspalten und mit dem Faktor n vereinigen. Dies liefert eine grösste natürliche Zahl, die bei der Faktorenzerlegung von z an dieser Stelle als Faktor auftreten kann.

Es fragt sich, ob sich vielleicht auch andere als natürliche Zahlen in ähnlicher Weise von z abspalten lassen.

12. Vereinigung und Durchschnitt von Zahlen

Da die Zahlen Mengen sind, kann man auch die üblichen mengentheoretischen Operationen darauf anwenden, insbesondere die Bildung der Vereinigung und des Durchschnitts.

Die Vereinigung $a \cup b$ von zwei Zahlen a und b ist eine Zahl, welche jedes Element von a und jedes Element von b und nur diese als Elemente besitzt.

Der Durchschnitt $a \cap b$ von zwei Zahlen a und b ist eine Zahl, welche genau diejenigen Elemente besitzt, die in a und in b zugleich als Elemente vorkommen.

So ist z. B. $1 \cup 2 = 2$, $1 \cap 2 = 0$, $1 \cap 2 = 1$, $2 \cap 2 = 2$, und allgemein $0 \cup a = a \cup 0 = a$, $0 \cap a = a \cap 0 = 0$, $a \cup a = a \cap a = a$.

Die Operationen der Vereinigung und des Durchschnitts sind kommutativ und assoziativ, d. h. es ist

$$a \cup b = b \cup a, \quad a \cap b = b \cap a,$$
$$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c = a \cup b \cup c,$$
$$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c = a \cap b \cap c.$$

Es gelten weiter die Distributivgesetze:

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c),$$
$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c).$$

Zusammen mit der Addition gelten die Regeln:

Für $a \neq 0$, $b \neq 0$ ist $(a \cup b) + c = (a + c) \cup (b + c)$,

und für $a \cap b \neq 0$ ist $(a \cap b) + c = (a + c) \cap (b + c)$.

Bei der Addition von c wird hier überall die in den Figuren von a, b, $a \cup b$, $a \cap b$ vorkommende und in diesen Zahlen wesentliche 0 durch die Figur von c ersetzt, was auf beiden Seiten der Gleichungen dasselbe ergibt. Da aber 0 nicht in sich selbst wesentlich ist, sind die Ausnahmen zu beachten; es wird z. B.

$$(0 \cup 1)+1 = 2 \neq (0+1) \cup (1+1) = 2$$

und

$$(1 \cap 2)+1 = 1 \neq (1+1) \cap (2+1) = 0.$$

Im allgemeinen ist ferner

$$a+(b \cup c) \neq (a+b) \cup (a+c)$$

und

$$a+(b \cap c) \neq (a+b) \cap (a+c).$$

Dies erkennt man schon an den Beispielen

$$1+(1 \cup 2) = \{2\} \neq (1+1) \cup (1+2) = \{1,2\}$$

und

$$1+(1 \cap 2) = 2 \neq (1+1) \cap (1+2) = 0.$$

Zusammen mit der Multiplikation gilt ohne Einschränkung:

$$(a \cup b)c = ac \cup bc \quad \text{und} \quad (a \cap b)c = ac \cap bc.$$

Bei der Multiplikation mit c werden in den Figuren von a, b, $a \cup b$, $a \cap b$ alle Pfeile durch die Figur von c ersetzt; die Vereinigungen und Durchschnitte als solche bleiben erhalten.

Im allgemeinen ist aber

$$a(b \cup c) \neq ab \cup ac \quad \text{und} \quad a(b \cap c) \neq ab \cap ac.$$

Dies erkennt man an den Beispielen

$$2(1 \cup 2) = \{2, \{2\}\} \neq 2 \cdot 1 \cup 2 \cdot 2 = \{1,3\}$$

und

$$2(1 \cap 2) = 2 \neq 2 \cdot 1 \cap 2.2 = 0.$$

Vereinigung und Durchschnitt kann man für beliebig endlich viele Zahlen bilden. Sind z_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ endlich viele Zahlen, so bedeutet $\bigcup z_j$ ihre Vereinigung, also eine Zahl, welche genau die sämtlichen Elemente der Zahlen z_j als Elemente besitzt, und $\bigcap z_j$ ihren Durchschnitt, also eine Zahl, welche genau die allen Zahlen z_j gemeinsamen Elemente als Elemente besitzt.

Eine Anwendung bildet der Satz:

Sind e_j die Elemente einer Zahl $a \neq 0$ und ist b eine beliebige Zahl, so ist das Produkt $ab = \bigcup (b + e_j b)$.

Zur Bildung der Figur von ab hat man in der Figur von a alle Pfeile durch die Figur von b zu ersetzen, insbesondere also die vom Punkt a zu den Elementen e_j führenden Pfeile. Die Elemente e_j selbst werden dann ebenfalls mit b multipliziert, also durch $e_j b$ ersetzt. Das Produkt ab ist dann die Vereinigung aller Zahlen $b + e_j b$.

Zusammen mit der Beziehung $0 . b = 0$ ergibt sich daraus eine induktive Definition der Multiplikation:

Wenn das Produkt ab bis zu einer bestimmten Stufenzahl von a erklärt ist, liefert der Satz die Definition von ab für die nächsthöhere Stufenzahl von a.