Über die Gruppen mit der identischen Relation

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)\ ^{1)}$$
$$(n \geq 3)$$

Von

HEINRICH MEIER-WUNDERLI (Rorbas, Zch.)

Im Falle $n = 3$ erweist sich die Bestimmung der Gruppen, die der identischen Relation $(x, y, z) = (y, z, x)$ genügen, als äquivalent mit der Bestimmung der Gruppen die dadurch definiert werden, dass in ihnen je zwei konjugierte Elemente miteinander vertauschbar sind.

Gruppen mit vertauschbaren konjugierten Elementen wurden erstmals von BURNSIDE [2]) untersucht und man verdankt ihm die Entdeckung einer Reihe

---

[1]) Unter einer identischen Relation einer Gruppe $\mathfrak{G}$ verstehen wir mit B. H. NEUMANN (Math. Annalen 114 (1937), p. 506—525) eine Relation, die von allen Elementen aus $\mathfrak{G}$ erfüllt ist. Für die sonst verwendeten Begriffe und Eigenschaften von Gruppen, vgl. H. ZASSENHAUS: Lehrbuch der Gruppentheorie. 1. Bd. (Leipzig und Berlin 1937).

[2]) W. BURNSIDE. On Groups in which every two conjugate operations are permutable. Proc. of London Math. Soc. (35) 1902—1903, p. 28—37. Bekanntlich gehören zu diesen Gruppen auch diejenigen, deren Elemente der Gleichung $x^3 = 1$ genügen, vgl. hierzu:

a) W. BURNSIDE. On an unsettled Question in the Theory of Discontinuous Groups. Quart. Journ. of Math. (1902) p. 230—238.

b) F. LEVI und B. L. VAN DER WAERDEN. Abh. Math. Seminar Hamburg Univ. 9, p. 154—158 (1933).

der wichtigsten Folgerelationen. Insbesondere beweist er für den Fall der Gruppen mit endlich vielen, etwa n Erzeugenden, dass sie nilpotent sind und höchstens von der Klasse n.

Für den Fall der endlichen Gruppen mit vertauschbaren konjugierten Elementen hat W. B. FITE [3]) später bewiesen, dass ihre Klasse c höchstens 5 sein kann. Durch Konstruktion eines Beispieles weist er die Existenz einer endlichen Gruppe dieser Art von der Klasse $c = 3$ nach.

1929 hat HOPKINS [4]) bewiesen, dass für endliche Gruppen mit vertauschbaren konjugierten Elementen die Klasse sogar ≤ 3 sein muss.

Wir werden in dieser Arbeit durch Weiterverfolgung der von BURNSIDE und HOPKINS gemachten Ansätze das allgemeine Resultat beweisen: Die Gruppen, in denen je zwei konjugierte Elemente miteinander vertauschbar sind, sind nilpotent und von der Klasse $c \leq 3$.

Der Fall $n > 3$ lässt sich weitgehend auf den Fall $n = 3$ zurückführen. Es gilt der Satz: Die Gruppen mit der identischen Relation $(x_1, x_2 \ldots, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_1)$ sind nilpotent und höchstens von der Klasse $c = 4(n-2)-1$ oder $c = 3(n-2)-1$, je nachdem n ungerade oder gerade.

Für weitere Struktureigenschaften sei auf die Arbeit selbst verwiesen.

I. Der Fall $n = 3$

§ 1

Sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, deren Elemente der Gleichung

$$(x, y, z) = (y, z, x) \tag{1}$$

genügen.

Setzt man in (1) für z das Element y^{n-1}, so ergibt sich die Folgerelation

$$(x, y, y^{n-1}) = 1 \text{ [5])} \tag{2}$$

Substituiert man für z denselben Wert in der für jede Gruppe gültigen Identität

$$(x, yz) = (x, z)(x, y)(x, y, z) \text{ [6])} \tag{3}$$

so resultiert wegen (2) die Formel

$$(x, y^n) = (x, y)^n \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4}$$

Zufolge (1) und (4) hat man jetzt

$$(x, y, z) = ([y, x]^{-1}, z) = (y, x, z)^{-1}. \tag{5}$$

---

[3]) W. B. FITE. Groups of order 3^m in which every two conjugate operations are permutable. Math. Annalen vol. 67 (1909), p. 498—510.

[4]) C. HOPKINS. Americ. Journ. Math. 51, p. 35 — 41 (1929).

[5]) 1 = Gruppeneinheit.

[6]) P. HALL. A contribution to the theory of groups of prime-power order. Proc. Lond. Math. Soc. (2) vol. 36 (1933). p. 29—95. Formula (2.15).

Durch Kombination von (1), (4) und (5) erkennt man die Richtigkeit von

$$\begin{gathered}[(x, y), (z, t)] = [x, y, (z, t)] = [(z, t), x, y] = (z, t, x, y) = \\ (x, z, t, y) = (x, z, y, t)^{-1} = (x, y, z, t) = [(z, t), (x, y)].\end{gathered} \tag{6}$$

Dies liefert die entscheidende Relation

$$[(x, y), (z, t)]^2 = 1 \text{ [7]} \tag{7}$$

die nach (6) auch

$$(x, y, z, t)^2 = 1 \tag{8}$$

impliziert.

Wegen (1) und (6) schliesst man weiter:

$$\begin{gathered}(x, y, x) = 1 \\ [(x, y), (x, z)] = 1.\end{gathered} \tag{9}$$

Beachtet man nun, dass in der für jede Gruppe gültigen Identität von WITT [8])

$$(x, y, z) = (x, y)^{-1} (x, z)^{-1} (y, z, x)^{-1} (y, z)^{-1} (x, y) (x, z) (x, z, y) (y, z) \tag{10}$$

in $\mathfrak{G}$ nach (1), (4) und (9) alle Terme miteinander vertauschbar werden, so besagt (10) nur

$$(x, y, z) = (y, z, x)^{-1} (x, z, y)$$

was gemäss (1) und (5) auch geschrieben werden kann in der Form [9])

$$(x, y, z)^3 = 1. \tag{11}$$

Nach (4) und (11) gilt somit auch

$$(x, y, z, t)^3 = 1. \tag{12}$$

Aus (8) und (12) folgt aber

$$(x, y, z, t) = 1. \tag{13}$$

D. h. die Gruppen $\mathfrak{G}$ sind nilpotent und höchstens von der Klasse 3.

§ 2

Um zu beweisen, dass die Klasse 3 von gewissen Gruppen $\mathfrak{G}$ tatsächlich angenommen wird, beschränken wir uns auf Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$ $(n \geq 3)$. [10])

Auf Grund der Relationen in § 1 erkennt man, dass dann jedes Element aus $\mathfrak{G}$ in der Gestalt

---

[7]) Vgl. HOPKINS [4]) und F. LEVI und B. L. VAN DER WAERDEN in [2]) b.

[8]) E. WITT. Crelle-s Journ. 177 (1937), p. 152—160.

[9]) Vgl. BURNSIDE in [2]).

[10]) Vgl. auch [2]) b.

$$P_{(x)} = P_1^{x_1} P_2^{x_2} \ldots\ldots P_n^{x_n} \prod_{\substack{1 \\ i>j}}^{n} (P_i, P_j)^{x(i,j)} \prod_{\substack{1 \\ i>j>k}}^{n} (P_i, P_j, P_k)^{x(i,j,k)} \tag{14}$$

darstellbar ist. Definiert man die Kompositionsfunktionen $f_i(x, y)$, $f_{(i,j)}(x, y)$, $f_{(i,j,k)}(x, y)$ durch

$$P_{(x)} \cdot P_{(y)} = P_{(f(x,y))} \tag{15}$$

so ergibt sich leicht

$$\left.\begin{array}{lll} (1 \leq i \leq n) & f_i(y, x) & = x_i + y_i \\ (1 \leq j < i \leq n) & f_{(i,j)}(x, y) & = x_{(i,j)} + y_{(i,j)} + x_i y_j \\ (1 \leq k < j < i \leq n) & f_{(i,j,k)}(x, y) & \equiv x_{(i,j,k)} + y_{(i,j,k)} + x_{(i,j)} y_k - x_{(i,k)} y_j + x_{(j,k)} y_i \\ & \text{(mod. 3)} & \qquad + x_i x_j y_k - x_i y_k y_j + x_j y_k y_i \end{array}\right\} \tag{16}$$

Betrachtet man zwei Symbole $P_{(x)}$ und $P_{(y)}$ dann als gleich, wenn

$$\left.\begin{array}{lll} (1 \leq i \leq n) & x_i = y_i & \\ (1 \leq j < i \leq n) & x_{(i,j)} = y_{(i,j)} & \\ (1 \leq k < j < i \leq n) & x_{(i,j,k)} \equiv y_{(i,j,k)} & \text{(mod. 3)} \end{array}\right\} \tag{17}$$

so überzeugt man sich nach kleiner Rechnung, dass die P-Symbole bei der Komposition nach (16) eine Gruppe bilden.

Für das Exponentensystem von $P_{(x)}^{-1}$ findet man den Ausdruck

$$\left.\begin{array}{ll} (1 \leq i \leq n) & = -x_i \\ (1 \leq j < i \leq n) & = -x_{(i,j)} + x_i x_j \\ (1 \leq k < j < i \leq n) & \equiv -x_{(i,j,k)} + x_{(i,j)} x_k - x_{(i,k)} x_j + x_{(j,k)} x_i + x_i x_j x_k \\ \text{(mod. 3)} & \end{array}\right\} \tag{18}$$

Wendet man (16), (17) und (18) an zur Bestimmung des Exponenten-Systems von $P_{(y)}^{-1} P_{(x)} P_{(y)}$ so bestätigt man die Formeln [11])

$$\left.\begin{array}{lll} (1 \leq i \leq n) & = & x_i \\ (1 \leq j < i \leq n) & = & x_{(i,j)} + (x_i y_j - y_i x_j) \\ (1 \leq k < j < i \leq n) & \equiv & x_{(i,j,k)} + (x_{(i,j)} y_k - y_{(i,j)} x_k) + (x_i x_j y_k - y_i y_j x_k) \\ \text{(mod. 3)} & & \qquad - (x_{(i,k)} y_j - y_{(i,k)} x_j) - (x_i x_k y_j - y_i y_k x_j) \\ & & \qquad + (x_{(j,k)} y_i - y_{(j,k)} x_i) + (x_j x_k y_i - y_j y_k x_i) \end{array}\right\} \tag{19}$$

Nochmalige Transformation von $P_{(y)}^{-1} P_{(x)} P_{(y)}$ mit $P_{(x)}$ liefert für $P_{(x)}^{-1} P_{(y)}^{-1} P_{(x)} P_{(y)} P_{(x)}$ nach (19) wieder das Exponentensystem (19). Für die Gruppe der P-Symbole gilt somit die Relation:

$$P_{(y)}^{-1} P_{(x)} P_{(y)} = P_{(x)}^{-1} P_{(y)}^{1} P_{(x)} P_{(y)} P_{(x)} \tag{20}$$

[11]) Vgl. HOPKINS [4]).

die wir auch schreiben können in der bemerkenswerten Form

$$P_{(x)} \cdot P_{(y)}^{-1} P_{(x)} P_{(y)} = P_{(y)}^{-1} P_{(x)} P_{(y)} \cdot P_{(x)} \tag{21}$$

D. h. in der Gruppe der P-Symbole sind je zwei konjugierte Elemente miteinander vertauschbar.

§ 3

Es soll nun die Äquivalenz der Relationen (1) und (21) bewiesen werden.

Ausgangspunkt sei eine Gruppe, deren Elemente der Gleichung (21) genügen, d. h. einer Gleichung der Form

$$y \cdot x^{-1} y\, x = x^{-1} y\, x \cdot y \tag{22}$$

Komponiert man (22) sowohl von links als auch von rechts her mit y^{-1} so geht die Relation über in

$$x^{-1} y\, x\, y^{-1} = y^{-1} x^{-1} y\, x \tag{23}$$

was gleichbedeutend ist mit

$$(x, y^{-1}) = (x, y)^{-1}. \tag{24}$$

Setzt man in (4) $n = -1$ so folgt (24), d. h. (22) ist eine Folgerelation von (1).

Da der Kommutator (x, y) aufgefasst werden kann als Produkt der Elemente x^{-1} und $y^{-1} x\, y$ oder $x^{-1} y^{-1} x$ und y, so erkennt man wegen (22) und (23) sofort die Richtigkeit von [12])

$$(x, y, x) = 1. \tag{25}$$

$$[(x, y), (x, z)] = 1. \tag{26}$$

Nun gilt nach 24)

$$(x, y\, z) = (x, z^{-1} y^{-1})^{-1}. \tag{27}$$

Nach (3) gelten aber die Entwicklungen

$$(x, z)\,(x, y)\,(x, y, z) = [(x, y^{-1})\,(x, z^{-1})\,(x, z^{-1}, y^{-1})]^{-1}$$

und nach (24)

$$= [(x, z)^{-1}, y]\,(x, z)\,(x, y)$$

$$(x, z)\,(x, y)\,(x, y, z) = (z, x, y)\,(x, z)\,(x, y). \tag{28}$$

Wegen der Vertauschbarkeit der Terme in (28) gemäss (25) und (26) folgt somit [13])

$$(x, y, z) = (z, x, y). \tag{29}$$

D. h. (1) ist tatsächlich eine Folgerelation von (21).

---

[12]) Vgl. BURNSIDE [2]).

[13]) Vgl. BURNSIDE [2]).

Die Resultate der §§ 1, 2 und 3 liefern die Sätze:

1. Satz: Die Klasse der Gruppen, die durch die identische Relation (1) definiert werden, ist identisch mit der Klasse von Gruppen die dadurch definiert werden können, dass in ihnen je zwei konjugierte Elemente miteinander vertauschbar sind.

2. Satz: Die grösste Gruppe aus n Erzeugenden $P_1, P_2, \ldots, P_n$ $(n \geq 3)$, deren Elemente der Gleichung (1) genügen, wird eindeutig dargestellt durch (14) mit dem Kompositionsgesetz (16).

D.h. jede Gruppe aus endlich vielen Erzeugenden n und der erzeugenden Relation (1) ist isomorph einer Faktorgruppe der «grössten» Gruppe in Satz 2.

Allgemein liefert (13) in Verbindung mit Satz 2:

3. Satz: Die Gruppen, deren Elemente der Gleichung (1) genügen, sind nilpotent von der Klasse $c \leq 3$.

II. Der Fall $n > 3$

§ 4

Es sei nun eine Gruppe vorgelegt, deren Elemente der Gleichung

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) \tag{30}$$

genügen.

Bedeuten dann $X, Y, Z, T, \ldots$ $(n-2)$-fache Kommutatoren, d. h. Kommutatoren der Form $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$, so beweist man auf Grund von (30) analog wie bei (4)

$$(X, y^n) = (X, y)^n \qquad n = 0, \pm 1, \ldots \tag{31}$$

Das Analogon zu (4) lautet dann

$$(X, Y^n) = (X, Y)^n. \qquad n = 0, \pm 1, \ldots . \tag{32}$$

Für $n = -1$ liefert (31) analog zu (22) und (23) die Vertauschbarkeitsregeln

$$y \cdot X^{-1} y X = X^{-1} y X \cdot y \tag{33}$$

$$y^{-1} \cdot X^{-1} y X = X^{-1} y X \cdot y^{-1} \tag{34}$$

Hieraus folgt

$$(y, X, y) = 1. \tag{35}$$

$$(y, X, y^{-1}) = 1. \tag{36}$$

Die analoge Entwicklung zu (28) lautet dann wegen (31)

$$(X, Z)(X, Y)(X, Y, Z) = (Z, X, Y)(X, Z)(X, Y) \tag{37}$$

Nach (35) und (36) kann man hierfür auch schreiben

$$(X, Z)(X, Y, Z)(X, Y) = (X, Z)(Z, X, Y)(X, Y).$$

Wir haben somit das Analogon von (29) bewiesen

$$(X, Y, Z) = (Z, X, Y). \tag{38}$$

Man kann nun, wie man sich leicht überzeugt, für X, Y, Z, T die Entwicklungen in § 1 (5), (6), (7) und (8) wörtlich wiederholen und also beweisen dass

$$(X, Y, Z, T)^2 = 1. \tag{39}$$

Ebenso kann man nach (6) und (38) die Richtigkeit von

$$[(X, Y), (X, Z)] = 1 \tag{40}$$

einsehen.

Wegen (35), (39) und (40) gelten jetzt auch die analogen Überlegungen, die zum Beweis von (11) geführt haben. D. h. man hat

$$(X, Y, Z)^3 = 1. \tag{41}$$

Hieraus schliessen wir aber

$$(X, Y, Z, T)^3 = 1. \tag{42}$$

(39) und (41) besagen dann

$$(X, Y, Z, T) = 1. \tag{43}$$

Nun gilt aber gemäss (30) nacheinander

$$\begin{aligned}(X, Y, Z) &= (x_1, \ldots, x_{n-2}, Y, Z)\\ &= (Y, Z, x_1, \ldots, x_{n-2})\\ &= (y_1, \ldots, y_{n-2}, Z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})\\ &= (Z, x_1, y_1, \ldots, y_{n-2}, x_2, \ldots, x_{n-2})\\ &= (z_1, \ldots, z_{n-2}, x_1, y_1, \ldots, y_{n-2}, x_2, \ldots, x_{n-2})\end{aligned} \tag{44}$$

Nach (30) und (38) beweist man ebenso

$$\begin{aligned}(X, Y, Z, T) &= [(X, Y)\, Z, T]\\ &= [T, (X, Y), Z]\\ &= (t_1, \ldots, t_{n-2}, (X, Y), Z)\\ &= (X, Y, Z, t_1, t_2, \ldots, t_{n-2})\\ &= [(X, Y, Z), t_1, \ldots, t_{n-2}].\end{aligned} \tag{45}$$

(41), (43), (44) und (45) ergeben zusammen die Aussage

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k)^3 = 1 \text{ wenn } k \geq 3(n-2) \tag{46}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1 \text{ wenn } k \geq 4(n-2). \tag{47}$$

D. h. unsere Gruppen sind nilpotent höchstens von der Klasse $c = 4(n-2) - 1$.

§ 5

Im folgenden sei die natürliche Zahl $n > 3$ als gerade vorausgesetzt. Dann erhält man durch Kombination der Beziehungen (30) und (31) die Relation

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots\ldots, x_n, x_{n+1}) &= [(x_2, x_1)^{-1}, x_3, \ldots\ldots, x_{n+1}] \\ &= [x_3, \ldots\ldots, x_{n+1}, (x_2, x_1)]^{-1} \\ &= [(x_2, x_1, x_3, \ldots\ldots x_n), x_{n+1}]^{-1} \\ &= [(x_1, x_3, \ldots\ldots x_n, x_2), x_{n+1}]^{-1} \qquad (48)\end{aligned}$$

Da n gerade, liefert dies bei Iteration

$$(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n+1})^2 = 1. \qquad (49)$$

Es gilt also auch

$$(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k)^2 = 1 \text{ wenn } k \geq n+1. \qquad (50)$$

Da für $n > 3$ auch $3(n-2) > n+1$ hat man wegen (46)

$$(x_1, \ldots\ldots, x_k) = 1 \text{ für } k = 3(n-2). \qquad (51)$$

D. h. falls n gerade, so ist die Klasse der Gruppe höchstens gleich $c = 3(n-2) - 1$.

Nach der von P. HALL [14]) bewiesenen Kongruenz mod. dem $(n+1)$-ten Glied H_{n+1} der absteigenden Zentralreihe

$$(x_1\, x_2, \ldots\ldots, x_n) \equiv (x_2, x_1, x_3, \ldots\ldots, x_n)^{-1} \pmod{H_{n+1}} \qquad (52)$$

folgt wegen (30) und n gerade durch Iteration wie bei (49)

$$(x_1, \ldots\ldots, x_n)^2 \equiv 1 \pmod{H_{n+1}} \qquad (53)$$

§ 6

Die Hauptresultate der §§ 4 und 5 fassen wir zusammen in den Satz:
4. Satz: Die Gruppen, deren Elemente der Gleichung (30) genügen, sind nilpotent und höchstens von der Klasse $c = 4(n-2) - 1$ falls n ungerade und höchstens von der Klasse $c = 3(n-2) - 1$ falls n gerade.

---

[14]) Vgl. HALL [6]) unter (2. 8. 3.).