Der Begriff des mathematischen Mittelwertes und die Mittelwertformeln

Von

HEINRICH JECKLIN (Zürich)

Obwohl die Idee des Mittelwertes einer Wertereihe recht alt ist, hat doch der Mittelwertbegriff zumeist nicht die ihm zustehende Beachtung gefunden, und insbesondere in neuerer Zeit ist ihm unseres Erachtens eine ausreichende Wertung nicht zuteil geworden.

In der klassisch-griechischen Mathematik versteht sich der Mittelwert stets nur in bezug auf zwei positive Grössen, deren mittlere Proportionale er darstellt; er bildet also einen Sonderfall im Rahmen der Proportionenlehre. Die Ausdehnung der Mittelwertbildung auf mehrere Grössen geschah zunächst einfach in Analogie zu den klassischen Mittelwertformeln zweier Grössen.

Die heutige Literatur zeigt hinsichtlich des Mittelwertbegriffes keine einheitliche Auffassung. Wir können hauptsächlich drei Arten der Interpretation unterscheiden:

1. Der Mittelwert wird aufgefasst als ein Wert in der Mitte. Damit ist gesagt, dass es sich um eine in der geordneten Wertereihe lagebedingte Festsetzung handelt. Typisch hiefür ist z. B. die Klasse der Teilungswerte bei den statistischen Mittelwerten, mit dem Zentralwert als bekanntestem Repräsentanten[1]).
2. Der Mittelwert ist ein zwischen den Extremen der Wertereihe liegender Wert. Ein schönes Beispiel dieser Art ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Von den statistischen Mittelwerten ist die Klasse der Maximalwerte, wovon der dichteste Wert am geläufigsten ist, hieher gehörig.
3. Der Mittelwert repräsentiert den Durchschnitt der gegebenen Werte. Als charakteristisch ist hier der Mittelwertsatz der Integralrechnung zu nennen. Die statistischen Mittelwerte sind hier vertreten mit der Klasse der Durchschnittswerte, voran das arithmetische Mittel.

Es kann nicht schaden, die von CAUCHY (2) gegebene Mittelwertdefinition wieder einmal zu zitieren: «Ein Mittel zwischen mehreren gegebenen Grössen ist eine neue Grösse, welche zwischen der kleinsten und der grössten der gegebenen Grössen liegt.» Diese Definition ist ebenso einfach wie eindeutig. CAUCHY ergänzt dann noch: «Dieser gegebenen Erklärung gemäss ist h ein Mittel zwischen den beiden Grössen g und k, oder ein Mittel von mehreren Grössen, von welchen die beiden die grösste und die kleinste sind, wenn die beiden Differenzen $g—h$, $h—k$ einerlei Zeichen haben.» Damit wird nochmals erhärtet, dass ein Mittelwert dadurch charakterisiert ist, dass er zwischen den Extremen einer Wertereihe liegt. Jeder dieser Bedingung genügende Wert,

[1]) Literaturangaben am Schluss.

ob er willkürlich oder methodisch festgelegt wird, ist ein Mittelwert der bezüglichen Wertereihe.

Es ist nun aber festzustellen, dass der Begriff des Mittelwertes, insbesondere durch statistischen Gebrauch und dessen Rückwirkung auf die Mathematik, eine Einengung erfahren hat, die mathematisch besehen, wie auch erkenntnismässig zu verwerfen ist. Dabei wollen wir es den Statistikern nicht verargen, wenn sie von den Methoden zur Bestimmung von Mittelwerten nur jene in Betracht ziehen, welche im Hinblick auf den Zweck des Mittelwertes als Masszahl der Statistik sinnvoll erscheinen. Keineswegs aber darf deswegen der mathematische Mittelwertbegriff im Gegensatz zur einfachen und doch umfassenden Formulierung CAUCHY's unberechtigterweise eingeengt werden.

Da haben wir beispielsweise die von CHISINI (*3*) eingeführte Mittelwertdefinition. Dieser Verfasser gibt der Meinung Ausdruck, die Definition von CAUCHY besage so gut wie nichts und sei besser durch folgende Definition zu ersetzen: «Wenn eine Funktion $y = f\ (x_1 ... x_n)$ von n unabhängigen Grössen x_i gegeben ist, so ist ein Mittelwert der x_i bezüglich der Funktion f jene Grösse m, welche bei Substitution an Stelle der x_i für f den gleichen Wert ergibt wie die x_i.» Das heisst also, dass m so zu wählen ist, dass $f\ (m ... m) = f\ (x_1 ... x_n)$. Offensichtlich vertritt CHISINI den Standpunkt, dass ein Mittelwert zumindest implizit durch eine analytische Formel zu definieren sei. Aber ganz abgesehen davon, dass nicht einzusehen ist, weshalb andere als formelmässige Methoden der Mittelwertbestimmung nicht zugelassen sein sollten, ist die Definition CHISINI's durchaus unzulänglich. Man sieht dies sofort, wenn man in der von CHISINI angegebenen Weise zur expliziten Darstellung von m übergeht. Zu diesem Zwecke bildet man die Umkehrfunktion $\varphi\ (y)$ von $y = f\ (m ... m)$ und setzt dann für y wieder $f\ (x_1 ... x_n)$ ein. Sei z. B. $f(x_1 ... x_n) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n$, so ist $y = (p_1 + p_2 + ... + p_n) \cdot m$,

$$\varphi(y) = \frac{y}{p_1 + p_2 + ... + p_n} \quad \text{und } m = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}.$$

Oder sei $f(x_1 ... x_n) = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot ... x_n^{p_n}$, so ist $y = m^{(p_1 + p_2 + ... + p_n)}$, $\varphi\ (y) = y^{1/\Sigma p_i}$ und $m = (x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot ... x_n^{p_n})^{1/\Sigma p_i}$. Es sind nach diesem Rezept leicht alle üblichen Mittelwertformeln zu erhalten. Aber setzen wir etwa $f(x_1\, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1\, x_2}$, so ist $y = 2\,m$, $\varphi\ (y) = \frac{y}{2}$ und $m = \frac{x_1^3 + x_2^3}{2\, x_1\, x_2}$. Man verifiziert leicht, dass das hieraus resultierende m keineswegs zwischen x_1 und x_2 liegen muss. Denn wenn $x_1 < x_2$ folgt aus $x_1^2\, x_2 < x_2^3 > x_2^2\, x_1$ einerseits und $x_1^2\, x_2 > x_1^3 < x_2^2\, x_1$ anderseits sofort $x_1 \gtrless \frac{x_1^3 + x_2^3}{2\, x_1\, x_2} \lesseqgtr x_2$.

Solche Beispiele lassen sich beliebig vermehren. Hält man aber an der Bedingung fest, dass ein Mittelwert zwischen den Extremwerten seiner Wertereihe liegen muss, so ist also die von CHISINI gegebene formelmässige Definition nicht richtig, sofern damit nur solche Formeln erfasst sein sollen, welche stets Mittelwerte liefern. Sollte aber die Meinung sein, dass sie alle jene Formeln umfasst, welche Mittelwerte liefern *können*, so ist sie ebenfalls nicht hinreichend. In $m = k \cdot x_1 - x_2$ z. B. kann k nur den Wert 2 haben, wenn die Formel aus der impliziten Darstellung $f(m,m) = f(x_1\, x_2)$ resultieren soll. Anderseits kann aber die Formel lediglich im Falle $k \neq 2$ ein m zwischen x_1 und x_2 liefern. Denn aus $x_1 < x_2 = x_1 + d$ folgt bei $k = 2$ sofort $m = 2\, x_1 - x_2 = x_1 - d < x_1$.

Es gereichte CHISINI bei seiner Definition zum Verhängnis, dass er nicht für die Erfüllung der fundamentalen Bedingung des Zwischenliegens sorgte. Sei $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ und m implizit durch $f(m \ldots m) = f(x_1 \ldots x_n)$ gegeben, wobei stets $x_1 < m < x_n$ gelten soll, so ist dies nur garantiert, wenn entweder

$$f(x_1 \ldots x_1) < f(x_1 \ldots x_n) < f(x_n \ldots x_n)$$

oder

$$f(x_1 \ldots x_1) > f(x_1 \ldots x_n) > f(x_n \ldots x_n)$$

Aus dem Satz über die Umkehrbarkeit einer stetigen eigentlich monotonen Funktion einer reellen Veränderlichen folgt dann, dass wenn

$$f(x_1) = f(x_1 \ldots x_1) < f(m) = f(m \ldots m) < f(x_n) = f(x_n \ldots x_n)$$

oder $$f(x_n) = f(x_n \ldots x_n) < f(m) = f(m \ldots m) < f(x_1) = f(x_1 \ldots x_1),$$

notwendigerweise $x_1 < m < x_n$ sein muss.

Andere Autoren (*4*) definieren den Mittelwert durch die Formel $f(m) = \frac{\Sigma p_i\, f(x_i)}{\Sigma p_i}$, wobei die p_i üblicherweise Gewichte der Werte x_i bedeuten. Abgesehen davon, dass auch hiedurch nur formelmässig bestimmte Mittelwerte definiert werden, ist eine solche Definition ebenfalls nicht hinreichend für $x_1 < m < x_n$, wenn nicht über die Funktion $f(x_i)$ bestimmte Voraussetzungen getroffen werden, so vor allem, dass sie eindeutig und eigentlich monoton ist. Wenn diese Vorsorge getroffen ist, so liefert diese Formel tatsächlich stets Mittelwerte und zwar von der Art der statistischen Mittelwertklasse der Durchschnittswerte. Es ist aber damit die Möglichkeit der Mittelwertermittlung vermittels einer analytischen Formel in keiner Weise erschöpft. Die genannte Formel ist in den x_i symmetrisch, was vom Standpunkt der statistischen Durchschnittsbildung wohl unerlässlich, für eine mathematische Mittelwertbestimmung aber keineswegs nötig ist. Hiefür hat lediglich die Bedingung des Zwischenliegens erfüllt zu sein, was auch eine unsymmetrische Formel leisten kann. Wenn beispielsweise $x_1 < x_2$, so gilt für den positiven Wurzelwert $m = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_1 x_2}{2}}$ stets $x_1 < m < x_2$, was sofort aus $2x_1^2 < x_1^2 + x_1 x_2 < 2x_2^2$ folgt.

GINI (*5*), der die Frage der Mittelwertdefinition allerdings rein vom Standpunkt des Statistikers aus beleuchtet, stellt sehr richtig fest, dass allgemeine formelmässige Definitionen nur sinnvoll sind, wenn die zugelassenen Funktionen genau abgegrenzt werden. Statt aber diese Abgrenzung durch Nennung der zu erfüllenden Eigenschaften vorzunehmen, zieht er vor, eine möglichst umfassende algebraische Mittelwertformel aufzustellen. Damit ist aber selbst für die mathematische Statistik nur ein spezieller Mittelwerttypus umschrieben, die nichtalgebraischen Durchschnittswerte und alle sogenannte lagebedingten Mittelwerte sind nicht erfasst. Anders wieder BLASCHKE (*6*), welcher ausdrücklich auf die wichtige Rolle transzendenter Funktionen bei der Bildung von Durchschnittsformeln aufmerksam macht, anderseits aber die zu mittelnden Werte x_i nur in einfacher und nicht in kombinatorischer Verwendung zulassen will.

Wenn man sich über den Begriff des mathematischen Mittelwertes klar werden will, so tut man gut, die Definition von CAUCHY wieder in den Vordergrund zu rücken. Diese Definition ist absolut hinreichend und bedarf keiner Ergänzung. Sodann muss man sich auch darüber klar sein, dass Formeln und Methoden zur Mittelwertbildung nicht mit dem Begriff des Mittelwertes selbst identifiziert werden dürfen. Die Mittelwertformel bietet lediglich eine der verschiedenen methodischen Möglichkeiten, aus einer Wertereihe einen neuen Wert zu bestimmen, welcher sich der allgemeinen Mittelwertdefinition unterordnet. Dass die nach verschiedenen Methoden bestimmten Mittelwerte gegenüber der allgemeinen Definition noch zusätzliche Eigenschaften haben können, ist eine Sache für sich. Ebenso ist es unbenommen, den Begriff des statistischen von jenem des mathematischen Mittelwertes zu trennen. Aber all dies nötigt in keiner Weise — wir betonen es nochmals — die umfassende CAUCHYsche Definition des methematischen Mittelwertes einzuengen.

Wenden wir uns nach dieser Klarstellung speziell der analytischen Mittelwertformel zu, als einem der wichtigsten methodischen Hilfsmittel zur Bestimmung von Mittelwerten. Bezüglich der zu mittelnden Werte x_i gelte in der Folge stets $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \ldots \leqq x_n$. Die gebräuchlichen Mittelwertformeln lassen sich in der Gestalt darstellen $n \cdot F(m) = \sum_1^n F(x_i)$, wobei jeweils von $F(x)$ vorausgesetzt wird, dass es eine positive Funktion einer positiven Variablen sei. Wir beschränken uns in der Folge auch auf positive Funktionen positiver Veränderlicher, aber lediglich aus Gründen der Vereinfachung in der Darstellung; prinzipiell ist diese Forderung unwesentlich. Wesentlich dagegen in der vorgenanntenMittelwertformel ist, dass die Funktion $F(x)$ im Betrachtungsbereich eindeutig und eigentlich monoton ist, damit eine Umkehrung von $F(m)$ gewährleistet ist. Als besonders hervorstechende Eigenschaft des arithmetischen Mittels wird zumeist gepriesen, dass bei seiner Anwendung die zu mittelnden Grössen x_i auch negativ sein können. Dies beruht darauf, dass die Funktion $F(x) = x$ im ganzen Bereich der reellen Zahlen eigentlich monoton ist. Wenn man daher in $n \cdot F(m) = \Sigma F(x_i)$ für $F(x)$ eine andere Funktion mit dieser Eigenschaft wählt, so erhalten wir eine Mittelbildung, die den genannten Vorzug des arithmetischen Mittels auch besitzt. So z. B. $F(x) = x^3$, womit für m der reelle Wert von

$\sqrt[3]{\frac{\Sigma x^3}{n}}$ resultiert, oder $F(x) = c^x$, $c =$ pos. konst., woraus $m = \frac{\log \Sigma c^x - \log n}{\log c}$.

Das quadratische Mittel dagegen ist lediglich auf nur positive oder nur negative x_i anwendbar, da $F(x) = x^2$ nur in den getrennten Bereichen $[0, +\infty]$ und $[-\infty, 0]$ monoton ist. Ebenso ist die Mittelbildung mit $F(x) = \sqrt{x}$ nur bei x_i durchweg gleichen Vorzeichens durchführbar, wobei man sich noch wegen der notwendigen Eindeutigkeit für $F(x) = +\sqrt{x}$ oder $F(x) = -\sqrt{x}$ zu entscheiden hat.

Man wird nur solche Formeln $m = f(x_1 \ldots x_n)$, für welche stets $x_1 < m < x_n$ erfüllt ist, als eigentliche Mittelwertformeln bezeichnen. Anderseits wird man allen Formeln, welche diese Bedingung erfüllen, die Bezeichnung Mittelwertformel zukommen lassen müssen. Man sieht dann aber gleich, dass die Menge der Mittelwertformeln ungleich grösser ist, als gemeinhin angenommen wird. Wir haben bereits erwähnt, dass eine Mittelwertformel entgegen der meist gemachten Forderung, in den zu mittelnden Werten x_i nicht notwendigerweise symmetrisch sein muss, und wir haben als einfaches Beispiel einer unsymmetrischen algebraischen Mittelwertformel zweier Grössen $m = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_1 x_2}{2}}$ angeführt. Als einfaches Beispiel transzendenter Mittelbildung sei $c^m = \frac{c^{2x_1} + c^{2x_2}}{2\, c^{x_1}}$ mit $c =$ pos. konst., genannt. Die Forderung der Symmetrie ist vom Standpunkt der statistischen Mittelbildung aus durchaus verständlich; alle Formeln zur Bildung statistischer Durchschnittswerte müssen symmetrisch sein, damit der Mittelwert von der Reihenfolge der zu mittelnden Grössen unabhängig ist. Für den mathematischen Mittelwert, der nur der CAUCHYschen Definition zu genügen hat, ist dies jedoch irrelevant. Des weitern wird meist stillschweigend vorausgesetzt, dass sich eine Mittelwertformel auf alle n zu mittelnden Werte x_i beziehen müsse. Mathematisch besehen ist das gar nicht nötig. Vom statistischen Standpunkt aus wird etwa argumentiert, dass der durch die Formel erhaltene Mittelwert einen Ausdruck der Gesamtheit der x_i darstellen müsse. Aber z. B. das sogenannte statistische Variationszentrum, $z = \frac{x_1 + x_n}{2}$, von n Werten x_i, $i = 1, 2 \ldots n$, fügt sich nicht dieser Forderung. Weiter wird durch $m = x_i$, $1 < i < n$, sicher ein Mittelwert geliefert; wenn n ungerade, $n = 2k + 1$, so ist $m = x_{K+1}$ identisch dem sogenannten Zentralwert. Sodann gibt die Formel $m = +\sqrt{x_1 \cdot x_n}$ einen Mittelwert bezüglich n positiver Grössen x_i, der in der Klasse der Potenzmittel bei deren geometrischer Interpretation eine bemerkenswerte Stellung einnimmt (7). Es befindet sich nämlich unter den Niveaulinien der Potenzmittelfläche $m = \sqrt[t]{\frac{\Sigma x_i^{k+t}}{\Sigma x_i^k}}$ eine einzige Gerade, und diese hat den vorgenannten Niveauwert.

Man könnte also die eigentlichen Mittelwertformeln nach zwei Gesichtspunkten in je zwei Klassen aufteilen: einesteils in solche, die alle zu mittelnden Werte x_i umfassen, und in solche, bei denen dies nicht der Fall ist; anderseits in solche, die in den x_i symmetrisch gebaut sind, und in solche, die es nicht sind. Üblicher- aber unberechtigterweise werden als Mittelwertformeln nur solche bezeichnet, die symmetrisch sind und sich auf alle x_i beziehen. Die statistische Mittelwertklasse der Durchschnittswerte ist von dieser Art.

Abschliessend wollen wir insbesondere den algebraischen Mittelwertformeln eine etwas eingehendere Betrachtung zukommen lassen. Wir erinnern daran, dass wir uns auf positive Funktionen positiver Veränderlicher beschränken. Gewohntermassen kennt man die algebraischen Mittelwertformeln nur in der Gestalt $m = \left(\frac{\Sigma Z}{\Sigma N}\right)^E$. Beim quadratischen Mittel z. B. ist $\Sigma Z = \Sigma p_i \cdot x_i^2$, $\Sigma N = \Sigma p_i$, $E = \frac{1}{2}$, wobei die p_i Gewichte der x_i bedeuten. Diese, stark durch statistischen Gebrauch bedingte Gewohnheit ist mathematisch jedoch unbegründet, wie an folgenden zwei Beispielen ersichtlich. Definieren wir die implizite algebraische Mittelwertformel durch $f(m \dots m) = f(x_1 \dots x_n)$, wobei $f(x_1 \dots x_n)$ eine algebraische Funktion sein soll, aber derart, dass die Bedingung $f(x_1 \dots x_1) < f(x_1 \dots x_n) < f(x_n \dots x_n)$ erfüllt ist. Sei erstens $f(x_1 \dots x_n) = +\sqrt{\Sigma x_i^2} + \Sigma x_i$. Hier ist sicher $+\sqrt{n \cdot x_1^2} + n \cdot x_1 < +\sqrt{\Sigma x_i^2} + \Sigma x_i < +\sqrt{n \cdot x_n^2} + n \cdot x_n$. Die explizite Darstellung von m erhalten wir in bereits besprochener Weise:

Es ist $y = f(m \dots m) = +\sqrt{n \cdot m^2} + n \cdot m = m \cdot (+\sqrt{n} + n)$, $\varphi(y) = \frac{y}{+\sqrt{n} + n}$, und damit $m = \frac{+\sqrt{\Sigma x_i^2} + \Sigma x_i}{+\sqrt{n} + n}$. Oder es sei $f(x_1 \dots x_n) = (\Sigma x_i)^2 + \Sigma x_i$. Auch hier ist sicher $(\Sigma x_1)^2 + \Sigma x_1 = (n + 2\binom{n}{2}) \cdot x_1^2 + n \cdot x_1 < (\Sigma x_i)^2 + \Sigma x_i < (n + 2\binom{n}{2})\, x_n^2 + n \cdot x_n = (\Sigma x_n)^2 + \Sigma x_n$. Die explizite Darstellung ergibt sich in folgender Umformung: $y = (n + 2\binom{n}{2})\, m^2 + n \cdot m$,

$$\varphi(y) = -\frac{n}{2n + 4\binom{n}{2}} + \sqrt{\frac{n^2 + 4(n + 2\binom{n}{2}) \cdot y}{4(n + 2\binom{n}{2})^2}},$$

$$\text{also } m = -\frac{n}{2n + 4\binom{n}{2}} + \sqrt{\frac{1}{n + 2\binom{n}{2}} \cdot \left[\frac{n^2}{4(n + 2\binom{n}{2})} + (\Sigma x_i)^2 + \Sigma x_i\right]}.$$

Nunmehr beschränken wir uns auf den Fall, dass $f(x_1 \dots x_n)$ ein Quotient zweier homogener ganzer algebraischer Funktionen ist. Wir haben also $f(x_1 \dots x_n) = \frac{\Sigma g_i \Pi x_i^{t_i}}{\Sigma h_i \Pi x_i^{k_i}}$, wobei $\Sigma t_i = T$ für jedes Π des Zählers, $\Sigma k_i = K$ für jedes Π des Nenners, und $T \neq K$.

Die Darstellung braucht weder symmetrisch in den x_i zu sein, noch müssen Zähler und Nenner gleichviel Glieder enthalten. Setzen wir nun $f(m \dots m) = f(x_1 \dots x_n)$ und gehen zur expliziten Darstellung von m über, so erhalten wir

$$y = \frac{m^T \cdot \Sigma g_i}{m^K \cdot \Sigma h_i} = m^{(T-K)} \cdot \frac{\Sigma g_i}{\Sigma h_i}, \varphi(y) = \left[\frac{\Sigma h_i}{\Sigma g_i} \cdot y\right]^{1/T-K}, m = \left[\frac{\Sigma h_i \cdot \Sigma g_i \Pi x_i^{ti}}{\Sigma g_i \cdot \Sigma h_i \Pi x_i^{ki}}\right]^{1/T-K}.$$

Bei der expliziten Darstellung ergeben sich also automatisch in Zähler und Nenner, nach Gewichten gezählt, gleich viele Glieder, und wir können jetzt auch schreiben

$$m = \left[\frac{\Sigma \alpha_i \Pi x_i^{ti}}{\Sigma \beta_i \Pi x_i^{Ki}}\right]^{1/T-K}, \text{ wobei } \Sigma \alpha_i = \Sigma \beta_i.$$

Die Beantwortung der Frage, wann hier $x_1 < m < x_n$, ist nun leicht zu geben: Wir setzen $\Sigma \alpha_i \Pi x_i^{ti} = \Sigma A_i$, $\Sigma \beta_i \Pi x_i^{ki} = \Sigma B_i$, und haben dann

$$m^{(T-K)} \cdot \Sigma B_i = \Sigma A_i.$$

1) $T > K$, $T - K = S$. Es ist $x_1 < m < x_n$ wenn $x_1^S \cdot \Sigma B_i < \Sigma A_i < x_n^S \cdot \Sigma B_i$ und dies ist sicher erfüllt, sofern
   a) ΣB_i und ΣA_i nur positive Glieder enthalten und
   b) $A_i = B_i \cdot \Pi x_i^{si}$, $\Sigma s_i = S$ für jedes Π in ΣA_i.

2) $T < K$, $T - K = -S$. Hier ist $x_1 < m < x_n$ wenn $x_1^S \Sigma A_i < \Sigma B_i < x_n^S \Sigma A_i$ und dies ist sicher erfüllt, sofern
   a) ΣA_i und ΣB_i nur positive Glieder aufweisen und
   b) $B_i = A_i \cdot \Pi x_i^{si}$, $\Sigma s_i = S$ für jedes Π in ΣB_i.

Es muss also für m in lauter positiven Gliedern die Darstellung möglich sein $m = \left[\frac{\Sigma p_i \Pi x_i^{si}}{\Sigma p_i}\right]^{1/S}$, wobei $\Sigma s_i = S$ für jedes Π, d. h. der Nenner darf nur aus im Zähler auch auftretenden Gewichten bestehen (wobei die x_i selbst auch zur Gewichtung Verwendung finden können). Dagegen braucht die Darstellung weder in den x_i symmetrisch zu sein, noch müssen alle n Werte x_i erfasst werden. Ist dies beides auch noch der Fall, so haben wir eine besondere Klasse von algebraischen Mittelwerten, in welcher die einfachen und die kombinatorischen Potenzmittel (7) die hervorragendsten Repräsentanten sind.

Literaturhinweise

(*1*) H. JECKLIN, Zur Systematik der statistischen Mittelwerte. Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik, 1947, Heft 3.

(*2*) A. L. CAUCHY, Cours d'Analyse. Ire Partie, Analyse Algébrique. Paris 1821, p. 14 et 444. Oder auch: A. L. Cauchys Lehrbuch der algebraischen Analysis, aus dem Französischen übersetzt von C. L. B. Huzler. Königsberg 1828, S. 11 und 315.

(*3*) O. CHISINI, Sul concetto di medio. Periodico di Matematiche, Seria IV, Vol. IX, 1929.

(*4*) Zum Beispiel G. DARMOIS, Statistique mathématique. Paris 1928, p. 31.

(*5*) C. GINI, Di una Formula comprensiva delle medie. Metron, Vol. XIII, 2, 1938.

(*6*) E. BLASCHKE, Die statistischen Mittelwerte. Wirtschaft und Recht der Versicherung, Berlin 1925, Nr. 1.

(*7*) H. JECKLIN und M. EISENRING, Die elementaren Mittelwerte. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 47, Heft 1, 1947.