Der Begriff der Ultrafunktion[1]

Von

H. HADWIGER (Bern)

Beim Versuch, das Problem der kontinuierlichen Differentiation und Integration (Derivation nicht ganzer Ordnung) auf grundsätzlich neue Weise zu lösen, wurde ich vor einigen Jahren auf die Idee der Ultrafunktion geführt. Die vorliegende Note stellt eine Einführung in das Wesen dieser Erweiterung des üblichen Begriffs der analytischen Funktion dar. Die Begriffswandlung ermöglicht eine neuartige Lösung des oben erwähnten Problems, und es ist das Ziel dieser Arbeit, eine vorläufige Uebersicht der Möglichkeiten zu geben, die für eine Weiterentwicklung der Theorie dieser Ultrafunktionen offenstehen.

§ 1. Entwicklung des Begriffs der Ultrafunktion

Es ist bekannt, dass das Problem der kontinuierlichen Integration trotz eingehender Bearbeitung zu keiner befriedigenden Lösung geführt werden

[1]) Vortrag, gehalten am 8. Juli 1941 im mathematischen Kolloquium der E.T.H. und der Universität Zürich. Es handelt sich um eine Umarbeitung und Erweiterung der Einleitung zu meiner, im Jahre 1936 der Philosophischen Fakultät II der Universität Bern vorgelegten, noch nicht veröffentlichten Habilitationsschrift.

konnte. Es handelt sich darum, eine Operation J_α (Funktionaltransformation), die auf Funktionen eines geeignet abgegrenzten Definitionsbereiches M anzuwenden ist, so zu definieren, dass für ganzzahlige Werte des Transformationsparameters α die mehrfachen Integrale sowie auch die höheren Ableitungen geliefert werden. Um bei einer derartigen Erweiterung der klassischen Operation des Differenzierens und Integrierens den erwünschten rein gruppentheoretischen Gesichtspunkt zur Geltung zu bringen, müsste die definierte Operation eindeutig sein. Von einer befriedigenden Lösung des Problems erwartet man, daß der Operator J_α die nachstehenden Operationsgesetze erfüllt:

(1) $$J_\alpha[\lambda f(t)] = \lambda J_\alpha[f(t)]\,;\; J_\alpha[f(t)+g(t)] = J_\alpha[f(t)] + J_\alpha[g(t)];$$

(2) $$J_\alpha J_\beta[f(t)] = J_{\alpha+\beta}[f(t)];$$

(3) $$J_0[f(t)] \equiv f(t);$$

(4) $$J_{-1}[f(t)] = f'(t).$$

Es handelt sich also um einen einparametrigen linearen Operator, der bezüglich des Parameters eine Abelsche additive Gruppe erzeugt und bei ganzzahligen negativen Parametern die höheren Ableitungen entsprechender Ordnung liefert. Integration und Differentiation gleich hoher Ordnung sind inverse Operationen.

Eine typische Schwierigkeit in diesem Problemkreis muss sofort auffallen: Wie soll der hier auftretende eindeutig erklärte Operator Umkehrung der klassischen Differentiation sein können, wo doch diese Umkehrung als klassische allgemeine Integration mehrdeutig ist? Bei dem eindeutig definierten Integraloperator kann es sich doch nur um eine Operation handeln, die als Verallgemeinerung eines mehrfachen bestimmten Integrals zu interpretieren ist. Dies bedeutet indessen die Auszeichnung eines Punktes im Variablenbereich der Funktionen, die sich nun bei den inversen Operationen, also nun bei den Differentiationen, störend auswirkt. Als Beispiel erwähnen wir den Riemann-Liouvilleschen Derivator in der von G. Doetsch gegebenen Fassung.[2]) Bei diesem Kalkül tritt der oben beschriebene Nachteil besonders deutlich zutage. Die Störung, die der Kalkül erleidet, besteht darin, daß entweder der Definitionsbereich so stark eingeengt wird, dass nur Funktionen die im Punkte $t = 0$ mit allen Ableitungen beliebig hoher Ordnung verschwinden. zugelassen werden, oder aber, dass man auf die uneingeschränkte Gültigkeit des Gruppengesetzes (2) verzichtet.

Wie man sich leicht überlegt, kann es keinen Definitionsbereich M eines Operators $J\alpha$, der den Postulaten (1) bis (4) genügt, geben, der beispielsweise die ganzen rationalen Funktionen $f(t)$ enthält. Diese Erkenntnis, verbunden mit anderen grundsätzlichen Erwägungen, die mit der Eindeutigkeit des Operators im Gegensatz zur Mehrdeutigkeit des klassischen Inte-

[2]) G. DOETSCH, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, Verlag J. Springer 1937, 15. Kap. § 3 (2) S. 298-304.

gration zusammenhängen, führt zu der klaren Einsicht, daß eine befriedigende Lösung des Problems im üblichen Sinne gar nicht möglich ist.[3])

Die Tatsache nun, dass es nicht gelingt die Grundoperationen der Analysis, nämlich Differentiation und Integration dem so überaus fruchtbaren Formalismus der Gruppentheorie unterzuordnen, führt zu der Vermutung, dass der für den Kalkül vorgesehenene Funktionsbegriff mit einem Mangel behaftet ist, der die gruppentheoretische Eingliederung der Operationen des Kalküls erschwert oder verunmöglicht.

Die Unlösbarkeit des funktionalanalytischen Problems verrät nach dieser Auffassung die Unvollkommenheit des verwendeten Funktionsbegriffs, etwa so, wie die Nichtgültigkeit des Fundamentalsatzes der Algebra im Bereiche der reellen Zahlen die Unvollständigkeit des zugrunde gelegten Zahlbegriffs aufdeckt.

In welcher Weise kann nun der Begriff der analytischen Funktion erweitert werden, so dass der in Aussicht gestellte Erfolg tatsächlich sich einstellt?

Die Unzulänglichkeit des üblichen Funktionsbegriffs innerhalb des hier vorliegenden Fragenkreises muß nach den obigen Erörterungen mit der Erscheinung zusammenhängen, daß bei der allgemeinen Integration willkürliche Integrationskonstanten auftreten, eine Grundtatsache, die zum unerschütterlichen Gebäude der klassischen Differential- und Integralrechnung gehört. Unser Versuch soll nicht etwa auf eine Beseitigung dieser nützlichen Konstanten hinzielen, sondern soll nur eine grundsätzlich neue Interpretation ihres Erscheinens geben. Wir argumentieren nun so:

Sind die Zahlen a_n die Nullpunktswerte der höheren Ableitungen einer im Nullpunkt regulären Funktion $f(z)$, so ist diese Funktion durch die einseitig unendliche Folge

$$a_0, a_1, a_2, \ldots \tag{5}$$

eindeutig charakterisiert.

Nach der bekannten Taylorschen Entwicklung gilt

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}. \tag{6}$$

Eine sinngemässe Abstraktion besteht nun darin, daß man statt (6)

$$f(z) \backsim \{a_0, a_1, a_2, \cdots\} \tag{7}$$

schreibt. Die bei Integration der Funktion $f(z)$ auftretenden Integrationskonstanten lassen sich als Nullpunktswerte der durch diese Operation entstehenden Funktionen interpretieren, und es ist naheliegend, diese Konstanten in der Reihenfolge ihres Auftretens mit

[3]) G. DOETSCH (Fussnote 2, S. 298) bemerkt, dass es «keine eindeutige und universelle Weise der Definition dieser Begriffe» geben kann.

(8) $$a_{-1}\,,\; a_{-2}\,,\; a_{-3}\,,\; \cdots$$

zu bezeichnen. Die Folge (8) erscheint nun als natürliche Fortsetzung der Folge (7) nach der linken Seite hin, so dass wir diese Folgen zu einer beidseitig unendlichen Folge vereinigen können, nämlich:

(9) $$\mathfrak{F}(z) \backsim \left\{ \cdots\; a_{-2},\; a_{-1},\; a_0,\; a_1,\; a_2,\; \cdots \right\}.$$

Diese beidseitig unbegrenzte Zahlenfolge (9), die also die Nullpunktswerte der höheren Ableitungen und die Nullpunktswerte der höheren Integrale der Funktion zu einer abstrakten Einheit, die wir durch das Fraktursymbol $\mathfrak{F}$ kennzeichnen, zusammenfasst, ist nun der Repräsentant der Ultrafunktion[4]).

Ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem üblichen Funktionsbegriff tritt deutlich hervor: Nach der gewöhnlichen Auffassung wird die Funktion begrifflich identifiziert mit der Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene (Zuordnung eines Funktionswertes w zu jedem Argument z). Dies entspricht ja auch der geläufigen Interpretation des Funktionszeichens als Repräsentant der Zuordnung oder Abbildungsvorschrift.

Die Definition der Ultrafunktion löst sich von dieser Auffassung und erklärt als Funktion etwas, das wohl eine derartige Abbildung vermittelt, ohne aber mit ihr äquivalent zu sein.

Für den der Ultrafunktion

(10) $$\mathfrak{F}(z) \backsim \{a_n\}$$

zugeordneten Ausdruck der Abbildung schreiben wir jetzt

(11) $$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}.$$

In der angeschriebenen Reihe sind für die Brüche $\frac{1}{n!}$ für negative n die Werte 0 einzusetzen. So entsteht wieder die Taylorsche Reihe (6), und es scheint nach dieser formalen Darstellung so, als ob die Nichtbeachtung des Ultrateiles (8) in der konventionellen Analysis darauf zurückzuführen wäre, dass dieser Teil im Funktionalausdruck (11) tatsächlich verschwindet.

Die Tatsache, dass bei der Differentiation keine willkürlichen «Differentiationskonstanten» in Erscheinung treten, sondern im Gegenteil solche verschwinden, hängt bei der von uns nun angestrebten Interpretation damit zusammen, dass diese Operation einen Schub der Konstantenreihe in der Richtung des Ultrateiles erwirkt, so dass solche Konstanten dort untertauchen. Bei der inversen Operation, d. h. also bei der Integration werden solche Konstanten bei dem Schub in der entgegengesetzten Richtung aus

[4]) Durch diese Bezeichnung soll daran erinnert werden, dass die Wandlung der realen zur ultralen Funktion erwirkt wird, durch die Mitberücksichtigung eines jenseits der Realität liegenden unsichtbar gebliebenen Teiles.

dem Ultrateil in den Realteil verschoben und treten jetzt als Integrationskonstanten in Erscheinung. Da man diese vor der Integration als zum Ultrateil gehörend nicht mitberücksichtigte, kennt man ihren Wert nicht, und so scheinen diese willkürlich wählbar.

Um eine für den weiteren Ausbau der Theorie geeignete Darstellung der Ultrafunktion zu gewinnen, führen wir den Kommutator j ein, der die Ultrafunktion (9) überführt in

$$j\,\mathfrak{F}(z)=\{\cdots\ a_2,\ a_1,\ a_0,\ a_{-1}\ ,\ a_{-2},\ \cdots\}. \tag{12}$$

Der mit (12) definierte formale Operator, also der Kommutator j, vertauscht den realen Teil der Funktion mit ihrem Ultrateil. Offenbar gilt die Relation

$$j^2=1. \tag{13}$$

Eine Ultrafunktion der Art

$$\mathfrak{F}_0(z)=\{\cdots\ 0,0,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\}, \tag{14}$$

deren Ultrateil also vollständig verschwindet, wollen wir als identisch mit der gewöhnlichen Funktion

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n\frac{z^n}{n!} \tag{15}$$

erklären, so dass wir nachfolgend in solchen Fällen

$$\mathfrak{F}_0(z)=f(z) \tag{16}$$

schreiben. Ist nun die beliebige Ultrafunktion (9) gegeben, so lässt sich diese mit Hilfe der beiden gewöhnlichen Funktionen

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n\frac{z^n}{n!},\qquad f^*(z)=\sum_1^\infty a_{-n}\frac{z^n}{n!} \tag{17}$$

und mit Verwendung des Kommutators j in der Form

$$\mathfrak{F}(z)=f(z)+jf^*(z) \tag{18}$$

schreiben. Hierbei wird von einer auf naheliegende Weise definierten Addition von Ultrafunktionen Gebrauch gemacht. Diese «komplexe» Darstellung (18) ist bei Beachtung der Nebenbedingung $f^*(0)=0$ eindeutig. Der Operator j erscheint so als neue abstrakte Einheit (Ultraeinheit), und spielt so bei der Erweiterung der Klasse der gewöhnlichen analytischen Funktionen auf die Klasse der Ultrafunktionen eine analoge Rolle, wie die imaginäre Einheit i beim Uebergang vom reellen in den komplexen Zahlenbereich.

Die Funktionen $f(z)$ und $f^*(z)$ sollen als Realkomponente und Ultrakomponente der Ultrafunktion (18) angesprochen werden. Eine gewöhnliche Funktion $f(z)$ ist also nach (16) bzw. (18) eine Ultrafunktion, deren Ultrakomponente identisch verschwindet. Ihre Gehamtheit wollen wir nachfolgend als Realklasse R bezeichnen. Die weiter unten folgenden Ausführungen werden zeigen, daß die für den Ausbau der Theorie vorgesehenen Ultraoperationen, nämlich die Addition, Multiplikation und Faltung die Eigenschaft haben, angewendet auf Funktionen der Realklasse R nicht aus R hinauszuführen. Dies trifft dagegen nicht zu, für die vorgesehene Gruppe der Integraloperationen (Differentiation und Integration). In diesem Verhalten ist der Grund dafür zu sehen, daß die Lösung des Problems, das wir eingangs schilderten, bei Beschränkung auf gewöhnliche Funktionen also auf die Realklasse R, nicht gelingen konnte.

Die Gesamtheit aller Ultrafunktionen, deren Komponenten Polynome sind, fassen wir zu der Polynomklasse P zusammen. Die Addition, Multiplikation und Faltung sind weiter unten definierte Ultraoperationen, die nicht aus P hinausführen.

Unter der Norm einer Ultrafunktion wollen wir den Wert

$$\|\mathfrak{F}\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \tag{19}$$

verstehen, falls die Reihe konvergiert. Die Gesamtheit aller Ultrafunktionen existenter Norm wollen wir als Klasse H einführen. H ist offenbar ein Hilbertscher Raum. Diese Klasse spielt eine besondere Rolle als Definitionsmenge der unten eingeführten Integraloperatoren.

Diese Entwicklung über den Begriff der Ultrafunktion abschliessend erwähnen wir noch zwei besonders wichtige Ultrafunktionen:

a) Die Einheitsfunktion, nämlich

$$\mathfrak{J}(z) \backsim \left\{ \cdots 0, 0, 1, 0, 0, \cdots \right\}; \tag{20}$$

b) Die Exponentialfunktion, nämlich

$$\mathfrak{E}(z) \backsim \left\{ \cdots 1, 1, 1, 1, 1, \cdots \right\}. \tag{21}$$

§ 2. Lineare Operationen, Multiplikation und Faltung

Die nachfolgenden Ausführungen beziehen sich auf die Ultrafunktionen

$$\mathfrak{F}(z) \backsim \left\{ a_n \right\}, \quad \mathfrak{G}(z) \backsim \left\{ b_n \right\}. \tag{22}$$

Die Addition erklären wir durch

$$\mathfrak{F}(z) + \mathfrak{G}(z) \backsim \left\{ c_n \right\}; \quad c_n = a_n + b_n, \tag{23}$$

und die Multiplikation mit einer Zahl λ durch

$$\lambda\,\mathfrak{F}(z) \backsim \{c_n\};\quad c_n = \lambda a_n. \tag{24}$$

Die Addition ist offenbar kommutativ, assoziativ und in Verbindung mit der Multiplikation mit einer Zahl distributiv.

Die Multiplikation zweier Ultrafunktionen erklären wir durch

$$\mathfrak{F}(z)\,\mathfrak{G}(z) \backsim \{c_n\};\quad c_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{n}{\nu} a_\nu\, b_{n-\nu} \tag{25}$$

Diese Multiplikation ist naturgemäß nur für solche Funktionenpaare erklärt, für die alle unendlichen Reihen für die c_n, $n < o$, konvergieren. Dies trifft beispielsweise für alle Funktionen der Polynomklasse P zu, und das Produkt gehört offenbar wieder zu P.

Die Multiplikation ist, Existenz vorausgesetzt, im allgemeinen nicht kommutativ, dagegen assoziativ und in Verbindung mit der Addition distributiv.

Für zwei Funktionen der Realklasse R ist das Produkt stets vorhanden, gehört wieder zu R und ist identisch mit der gewöhnlichen Multiplikation.

Wir merken uns noch die folgende Formel

$$\mathfrak{J}(z)\,\mathfrak{F}(z) = \mathfrak{F}(z). \tag{26}$$

Wir definieren ferner die Faltung zweier Ultrafunktionen durch

$$\mathfrak{F}(z) * \mathfrak{G}(z) \backsim \{c_n\};\quad c_n = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu\, b_{n-\nu-1}\,. \tag{27}$$

Die Faltung ist nur für solche Funktionen erklärt, für die alle unendlichen Reihen für die c_n konvergieren.

Die Faltung ist, Existenz vorausgesetzt, kommutativ, assoziativ und in Verbindung mit der Addition distributiv.

Die Faltung existiert beispielsweise für alle Funktionen der Polynomklasse P, und das Faltungsresultat gehört wieder zu P. Ferner können stets zwei Funktionen der Klasse H gefaltet werden.

Für zwei Funktionen der Realklasse R ist die Faltung stets vorhanden, und das Faltungsresultat gehört wieder zu R und ist identisch mit dem Faltungsintegral

$$f(z) * g(z) = \int_0^z f(\xi)\, g(z-\xi)\, d\xi. \tag{28}$$

§ 3. Die Laplace-Transformation

Die der Ultrafunktion

$$\mathfrak{F}(z) \backsim \{a_n\}$$

zugeordnete Funktion

$$L(\mathfrak{F}) = \varphi(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \, \xi^{-n-1} \tag{29}$$

bezeichnen wir als die Laplace-Transformierte von $\mathfrak{F}(z)$. Diese ist also wenigstens auf der Konvergenzmenge der mit (29) angeschriebenen Reihe erklärt. Die Laplace-Transformation kann naturgemäß nur auf solche Ultrafunktionen angewendet werden, für welche diese Konvergenzmenge nicht leer ist. Dies ist beispielsweise für alle Funktionen der Polynomklasse P der Fall. Die Laplace-Transformierte eines Ultrapolynoms ist offenbar eine in $|\xi| > o$ reguläre rationale Funktion. Für Funktionen der Realklasse R ist die Laplace-Transformierte für die ganzen Funktionen $f(z)$ vom Exponentialtypus vorhanden, und insbesondere ist diese identisch mit der durch das Laplace-Integral

$$L(f) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-\xi t}\, dt \tag{30}$$

dargestellten Funktion.

Für eine Funktion der Klasse H ist nach dem RIESZ-FISCHERschen Theorem die Laplace-Transformierte für fast alle Punkte $\xi = e^{i\Theta}$ des Einheitskreises durch die Fourier-Reihe (29) erklärt, und stellt eine im Lebesgueschen Sinne quadratisch integrierbare Funktion von Θ dar. — Nach dem PARSEVALschen Satz gilt dann für die Norm die Beziehung

$$\|\mathfrak{F}\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\Theta})|^2 \, d\Theta \tag{31}$$

§ 4. Die Faltungssätze

Die nachfolgenden Ausführungen beziehen sich auf zwei Ultrafunktionen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ der Polynomklasse und auf ihre Laplace-Transformierten

$$L(\mathfrak{F}) = \varphi(\xi), \; L(\mathfrak{G}) = \psi(\xi). \tag{32}$$

Wie bereits oben erwähnt, sind dann die beiden Funktionen (32) rationale, in $|\xi| > o$ reguläre Funktionen. — Wir führen noch den bekannten Begriff der «komplexen» Faltung [5]) ein. Diese ist durch das Integral

[5]) Vgl. G. DOETSCH, das in Fussnote [2]) zitierte Werk, S. 168 und 314.

$$\varphi * \psi = \frac{1}{2\pi i} \int^{C} \varphi(\eta)\, \psi(\xi - \eta)\, d\eta \tag{33}$$

definiert, wo C ein einfach geschlossener, im positiven Sinn zu umlaufender Integrationsweg, ist der den Punkt 0 im Innern und den Punkt ξ im Aussern enthält.

Wie man sich durch direkte Verifikation leicht überzeugt, gelten nun die beiden sich dual entsprechenden Faltungssätze

$$\begin{aligned} L(\mathfrak{F})\, L(\mathfrak{G}) &= L(\mathfrak{F} * \mathfrak{G}); \\ L(\mathfrak{F}) * L(\mathfrak{G}) &= L(\mathfrak{F}\mathfrak{G}), \end{aligned} \tag{34}$$

d. h., die Laplace-Transformierte der Faltung ist gleich dem Produkt und diejenige des Produktes gleich der Faltung der Laplace-Transformierten der Faktoren.

Es liegt im Sinne dieser einführenden Darstellung, die verschiedenen Aussagen unter geeignet starken Voraussetzungen so zu formulieren, daß ihre Gültigkeit unmittelbar ohne kompliziertere Beweisverfahren erkannt werden kann. Jedoch lassen sich viele Theoreme weitgehend verallgemeinern, so beispielsweise die beiden oben angegebenen Faltungssätze, die auf ganze Ultrafunktionen vom Exponentialtypus erweitert werden können. Naturgemäß sind hierbei aber etwas umständlichere Zusatzbetrachtungen über Existenz und Konvergenz erforderlich, die wir in diesem einführenden Aufsatz vermeiden wollen.

§ 5. Differentiation und Integration

Wir erklären nun die auf eine beliebige Ultrafunktion

$$\mathfrak{F}(z) \propto \{a_n\}$$

anwendbare Integration und Differentiation ganzzahliger Ordnung ν. Es sei der Operator J_ν für eine beliebige positive oder negative ganzzahlige Ordnung ν definiert durch

$$J_\nu(\mathfrak{F}) \propto \{a_n^{[\nu]}\}\,; \quad a_n^{[\nu]} = a_{n-\nu}\,. \tag{35}$$

Insbesondere gilt also

$$J_0(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}. \tag{36}$$

Diese Operation soll im Falle positiver Ordnung ν, als ν-fache Integration, im Falle negativer Ordnung ν, als $(-\nu)$-fache Differentiation bezeichnet werden. — Offenbar gilt das Gesetz

$$J_\nu J_\mu(\mathfrak{F}) = J_{\nu+\mu}(\mathfrak{F}). \tag{37}$$

Funktionen der Polynomklasse P werden durch Differentiation und Integration in ebensolche übergeführt.

Für eine Funktion $f(z)$ der Realklasse ist die Integration J_1 identisch mit der klassischen Integration; genauer gilt

$$J_1(f) = \int_0^z f(t)\,dt. \tag{38}$$

Während die mehrfache Integration beliebig hoher ganzzahliger Ordnung eine Funktion der Realklasse R nicht aus R hinausführt, trifft dies für die Differentiationen im allgemeinen nicht zu.

Aufschlußreich ist es, die Laplace-Transformation heranzuziehen. Existenz vorausgesetzt, gilt die Relation

$$L\left\{J_\nu(\mathfrak{F})\right\} = z^{-\nu} L(\mathfrak{F}). \tag{39}$$

Wir möchten an dieser Stelle darauf hinweisen, daß das Abbildungsgesetz (39) im Bereiche der gewöhnlichen Funktionen und der üblichen Laplace-Transformation nur für positive ν, also nur für Integrationen uneingeschränkt gilt. Für negative ν ist die Gültigkeit der Formel (39) an die Nebenbedingung geknüpft, daß die Funktion im Nullpunkt bis und mit der $(-\nu+1)$-ten Ableitung verschwinden muß. Von unserm nun gewonnenen Ultra-Standpunkt aus, klärt sich dieses Verhältnis dadurch auf, daß einmal der weiter oben geschilderte Unterschied zwischen Integration und Differentiation besteht, und daß ferner die zitierte Nebenbedingung gerade verhüten muß, daß die $(-\nu)$-fache Differentiation die Ultrafunktion der Realklasse R aus R hinausführt. Damit versuchten wir darzulegen, daß die Ultra-Laplace-Transformation in einem gewissen Sinne eine Vervollständigung der gewöhnlichen Laplace-Transformation darstellt, die sich von gewissen Mängeln befreit, die bei der üblichen Fassung beispielsweise bei den Abbildungsgesetzen deutlich in Erscheinung treten.

Auf Grund des Abbildungsgesetzes (39) und des Faltungssatzes (34) lassen sich die, jedenfalls für Funktionen der Polynomklasse P gültigen, LEIBNIZschen Regeln ($k = 0, 1, 2, \ldots$)

$$J_{-k}(\mathfrak{F}\mathfrak{G}) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_{-i}(\mathfrak{F})\, J_{-(k-i)}(\mathfrak{G}), \tag{40}$$

und

$$J_k(\mathfrak{F}\mathfrak{G}) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-k}{i} J_{-i}(\mathfrak{F})\, J_{k+i}(\mathfrak{G}) \tag{41}$$

ableiten.

Abschliessend erwähnen wir noch die Faltungsformel

$$J_\nu(\mathfrak{F}) * J_\mu(\mathfrak{G}) = J_{\nu+\mu}(\mathfrak{F} * \mathfrak{G}), \tag{42}$$

welche entweder direkt verifiziert, oder aus Faltungssatz (34) und Abbildungssatz (39) gefolgert werden kann.

§ 6. Eine spezielle Faltungsgruppe

Wir betrachten die einparametrige Schar von Ultrafunktionen der Klasse H, die durch

(43) $$\mathfrak{T}_\alpha(z) \infty \left\{ \overset{[\alpha]}{t_n} \right\}, \quad \overset{[\alpha]}{t_n} = (-1)^n \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left(\frac{1}{n+1-\alpha} \right)$$

gegeben sind. Der Parameter α sei beliebig reell, aber nicht ganz; ist $\alpha = \nu$, ganz, so ersetzen wir die Darstellung (43) durch

(44) $$\mathfrak{T}_\nu(z) \infty \left\{ \overset{[\nu]}{t_n} \right\}, \quad \overset{[\nu]}{t_n} = \begin{cases} 0 & [n \neq \nu - 1] \\ 1 & [n = \nu - 1] \end{cases}$$

eine Formel, die sich aus (43) durch Grenzübergang $\alpha \longrightarrow \nu$ ergibt, falls Stetigkeit postuliert wird. Insbesondere ist beispielsweise

(45) $$\mathfrak{T}_1(z) = \mathfrak{J}(z).$$

Nach einer geläufigen Formel ergibt sich für die Norm der Funktionen unserer Schar

(46) $$\| \mathfrak{T}_\alpha(z) \| = 1.$$

Die Funktionen der Schar (43) bzw. (44) bilden nun hinsichtlich ihrer Faltung eine Gruppe; genauer gilt

(47) $$\mathfrak{T}_\alpha(z) * \mathfrak{T}_\beta(z) = \mathfrak{T}_{\alpha+\beta}(z),$$

eine Formel, die direkt verifiziert werden kann.

Bilden wir die Laplace-Transformierte

(48) $$L(\mathfrak{T}_\alpha) = \varphi_\alpha(\xi),$$

so ergibt sich, dass für Punkte des Einheitskreises $\xi = e^{i\Theta}$, $\Theta \neq \pi$,

(49) $$\varphi_\alpha(e^{i\Theta}) = e^{-i\alpha\Theta}$$

ist, so dass dem Faltungsgesetz (47) als Laplace-Bild die Funktionalbeziehung

(50) $$e^{-i\alpha\Theta} e^{-i\beta\Theta} = e^{-i(\alpha+\beta)\Theta}$$

entspricht.

§ 7. Die Integratorgruppe

Wir gelangen nunmehr zu der in der Einleitung in Aussicht gestellten Lösung des im Bereiche der gewöhnlichen Funktionen unlösbaren Problems, die mehrfache Differentiation und Integration als diskontinuierliche Untergruppe einer kontinuierlichen Abelschen Operatorgruppe darzustellen. Unser Operator J_α, den wir Integrator der Ordnung α nennen wollen, hat die in § 5 entwickelte Differentiation und Integration einer Ultrafunktion auf beliebige positive oder negative Ordnung α zu erweitern.

Wir beschränken uns auf Ultrafunktionen der Klasse H, und definieren den Integrator J_α durch

$$J_\alpha (\mathfrak{F}) = \mathfrak{T}_\alpha (z) * \mathfrak{F} (z), \tag{51}$$

wobei der Faltungsfaktor auf der linken Seite mit der im vorstenden Abschnitt betrachteten speziellen Ultrafunktion identisch ist. Explizite ausgeschrieben lautet die Darstellung (51) also

$$J_\alpha (\mathfrak{F}) = \left\{ \overset{[\alpha]}{a_n} \right\}, \overset{[\alpha]}{a_n} = (-1)^n \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{a_\lambda}{\lambda + \alpha - n}. \tag{52}$$

Nach (52) lässt sich der Integrator als eine bekannte orthogonale Transformation im Hilbertschen Raum H interpretieren.[6])

Die sich ergebende Resultatfunktion gehört wieder zu H, insbesondere gilt für die Norm die Invarianz

$$\| J_\alpha (\mathfrak{F}) \| = \| \mathfrak{F} \|. \tag{53}$$

Von ausschlaggebender Bedeutung ist nun das Gruppengesetz

$$J_\alpha \, J_\beta (\mathfrak{F}) = J_{\alpha+\beta} (\mathfrak{F}), \tag{54}$$

das natürlich im Hinblick auf die hier gültige Assoziativität der Faltung mit dem Faltungsgesetz (47) in Zusammenhang gebracht werden kann.

Wie man sich unmittelbar überzeugt, stimmt für ganzzahlige α der Integrator J_α vollkommen mit dem in § 5 behandelten Differential- und Integraloperator überein, so dass in der Tat eine Lösung des von uns bezeichneten Problems vorliegt.

---

[6]) Vgl. M. RIESZ, Sur les fonctions conjugées, Math. Zeitschrift 27, 1928, 218-244 (bes. S. 242), ferner: E. C. TITCHMARSH, Lond. M. S. Proc. Serie 2, Bd. 22, Heft 5, III, 1924.