Vom Gravitationsfeld des inhomogenen Rotationsellipsoides im Aussenraum

Von

FRITZ GASSMANN (Zürich)

(Mitteilung Nr. 2 aus dem Institut für Geophysik der Eidg. Techn. Hochschule)

1. Das Basisellipsoid: In einem rechtwinkligen (x, y, z)-Koordinatensystem ist

$$\frac{x^2+y^2}{b^2+D^2}+\frac{z^2}{b^2}-1=0 \tag{1}$$

die Gleichung eines Rotationsellipsoides mit dem Polradius $b>0$, dem Äquatorradius $+\sqrt{b^2+D^2}$ und der z-Achse als Rotationsachse. Es sei Basisellipsoid genannt. $|D|$ ist die lineare Exzentrizität des Ellipsoides, d. h. seiner Meridianellipsen. Ist D reell, so ist das Rotationsellipsoid abgeplattet, ist D rein imaginär und $0<|D|<b$, so ist es verlängert. Die nachstehenden Betrachtungen gelten für beide Fälle.

2. Rotationselliptische Koordinaten: Ist das Basisellipsoid mit Masse gefüllt, und wird das Gravitationsfeld dieser Masse betrachtet, so ist es zweckmässig, ein diesem Körper möglichst gut angepasstes $(\rho, \vartheta, \varphi)$-Koordinatensystem zu verwenden. Es ist definiert durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= +\sqrt{\rho^2+D^2}\,\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= +\sqrt{\rho^2+D^2}\,\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= \rho\cos\vartheta \end{aligned} \tag{2}$$

und soll rotationselliptisches Koordinatensystem genannt werden. Die Elimination von ϑ und φ ergibt nämlich die Gleichung

$$\frac{x^2+y^2}{\rho^2+D^2}+\frac{z^2}{\rho^2}-1=0\,. \tag{3}$$

Es ist daraus ersichtlich, dass die Fläche $\rho=b$ gerade das Basisellipsoid (1) ist. Ist ferner ρ_1 eine beliebige positive Konstante, so ist $\rho=\rho_1$ die Gleichung eines Rotationsellipsoides, das zum Basisellipsoid konfokal ist; d. h. jede Ebene durch die z-Achse schneidet das Basisellipsoid und das Ellipsoid $\rho=\rho_1$ in Ellipsen, die die gleichen Brennpunkte besitzen. Aus der geometrischen Bedeutung von ρ als dem Polradius des Ellipsoides (3) geht ferner hervor, dass das Ellipsoid $\rho=\rho_1$ ausserhalb oder innerhalb des Basisellipsoides liegt, je nachdem $\rho_1>b$ oder $0<\rho_1<b$ ist. Wie man durch Nachrechnen leicht bestätigen kann, ist das rotationselliptische Koordinatensystem orthogonal. Hält man daher ϑ und φ fest und variiert ρ, so stellen

die Gleichungen (2) Hyperbeln dar, die die Ellipsoide $\rho = \rho_1$ rechtwinklig schneiden.

3. **Das Gravitationspotential des inhomogenen Basisellipsoides:** Das Basisellipsoid (1) sei mit Masse gefüllt. $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ sei die Dichte im Punkte mit den rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ. Ausserhalb des Basisellipsoides, d. h. für $\rho > b$, sei $\mu = 0$. Das Newton'sche Gravitationspotential im Punkte (x, y, z) ist dann $f \cdot U$, wo $f = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{gr}^{-1}\,\mathrm{sec}^{-2}$ die Newton'sche Gravitationskonstante und

$$U = \iiint \frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{+\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \tag{4}$$

ist. Das Integral ist über den Innenraum des Basisellipsoides zu erstrecken. Im folgenden soll U selbst kurz Potential genannt werden. μ sei zunächst als stückweise stetig und beschränkt im Sinne von KELLOGG [6][1]) Seite 113 vorausgesetzt.

In diesem Falle ist nach [6], Seite 152 das Potential im ganzen Raume stetig und stetig differenzierbar. Ferner ist U ausserhalb des Basisellipsoides harmonisch, genügt also der Differentialgleichung von LAPLACE

$$\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0. \tag{5}$$

Schreibt man diese Gleichung in rotationselliptischen Koordinaten und macht den bekannten Lösungsansatz

$$U(\rho, \vartheta, \varphi) = Q(\rho) \cdot X(\vartheta) \cdot H(\varphi), \tag{6}$$

so lassen sich in (5) die Variabeln trennen, und man erhält für die 3 unbekannten Funktionen 3 gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sind A und B willkürliche Konstante, und ist n eine willkürliche, ganze positive Zahl, so lautet die allgemeine Lösung für H

$$H = A \cos j\varphi + B \sin j\varphi \qquad j = 0, 1, 2, \ldots n. \tag{7}$$

Setzt man noch

$$\cos \vartheta = t \qquad\qquad i\frac{\rho}{D} = \sqrt{-1}\,\frac{\rho}{D} = \tau, \tag{8}$$

so erhält man für X als Funktion von t und Q als Funktion von τ übereinstimmende Differentialgleichungen, nämlich die Differentialgleichung der zugeordneten Kugelfunktionen. Wegen $-1 \leq t \leq 1$ kommt als partikuläre Lösung für X nur die zugeordnete Kugelfunktion erster Art in Frage, also

$$X = X_n^{(j)}(t) = \frac{1}{2^n (n+j)!}\,(t^2-1)^{\frac{j}{2}} \cdot \frac{d^{n+j}(t^2-1)^n}{dt^{n+j}}. \tag{9}$$

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss der Arbeit.

Für Q ist hingegen die zugeordnete Kugelfunktion zweiter Art zu nehmen, da U im Unendlichen regulär ist, also

$$Q = Q_n^{(j)}(\tau) = X_n^{(j)}(\tau) \cdot \int_{\tau}^{\infty} \frac{d\Theta}{(\Theta^2-1)\,[X_n^{(j)}(\Theta)]^2} \,. \tag{10}$$

Das Produkt HXQ erfüllt für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $j = 0, 1, 2, \ldots n$ die Gleichung (5). Durch Summation solcher Produkte kann man eine allgemeinere Lösung jener Gleichung, z. B. in Form folgender Reihe, zusammensetzen:

$$U(\rho, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=o}^{\infty} \sum_{j=o}^{n} y_n^{(j)}(\vartheta, \varphi) \cdot \frac{Q_n^{(j)}\left(i\frac{\varrho}{D}\right)}{Q_n^{(j)}\left(i\frac{b}{D}\right)}$$

$$y_n^{(j)}(\vartheta, \varphi) = (a_n^{(j)} \cos j\varphi + b_n^{(j)} \sin j\varphi) \cdot X_n^{(j)}(\cos \vartheta). \tag{11}$$

$a_n^{(j)}$ und $b_n^{(j)}$ sind willkürliche Konstante, deren Werte erst durch passende Randbedingungen festgelegt sind.

Die Reihe (11) wurde schon von Heine ([4], Bd. II, § 36) aufgestellt und zur Lösung von Randwertaufgaben benützt. Nach einer Mitteilung meines Kollegen C. F. Baeschlin ist jedoch bisher bei der Behandlung des Neumann'schen Randwertproblems für den Aussenraum des Basisellipsoides die Konvergenzfrage unabgeklärt geblieben. Auf seine Anregung hin habe ich diese Frage untersucht und dabei die folgenden Feststellungen gemacht.

4. Konvergenz der Reihenentwicklung für das Potential: Für ein festes $\rho \geq b$ ist $U(\rho, \vartheta, \varphi)$ eine Funktion von ϑ und φ, die in eine Reihe nach Laplace'schen Kugelfunktionen entwickelt werden soll. Transformiert man den (x, y, z)-Raum mit Hilfe der Gleichungen

$$x = \sqrt{\rho^2 + D^2} \cdot x' \quad , \quad y = \sqrt{\rho^2 + D^2} \cdot y' \quad , \quad z = \rho \cdot z' \tag{12}$$

in einen (x', y', z')-Raum, wobei x', y' und z' wiederum rechtwinklige Koordinaten sein sollen, so wird das Ellipsoid (3) des (x, y, z)-Raumes auf die Einheitskugel

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \tag{13}$$

abgebildet, und nach [6], Seite 259, Theorem III ist $U(\rho, \vartheta, \varphi)$ in eine gleichmässig konvergente Reihe nach Laplace'schen Kugelfunktionen entwickelbar, wenn U auf der Einheitskugel (13) einmal stetig differenzierbar ist. Dies ist tatsächlich der Fall, denn nach Abschnitt 3 ist U im ganzen Raume nach x, y, z einmal stetig differenzierbar, und da sich nach (12) diese Variabeln von x', y', z' nur um konstante, von Null verschiedene Faktoren unterscheiden, ist die Differenzierbarkeit nach x', y', z' mit der nach x, y, z völlig äquivalent.

Nach [7], Band II, lässt sich die Entwicklung von U folgendermassen schreiben. Wo das Argument ρ hinzugefügt ist, soll angedeutet werden, dass die betreffende Grösse von dem für ρ gewählten festen Wert abhängt.

$$U(\rho,\vartheta,\varphi)=\sum_{n=o}^{\infty}\sum_{j=o}^{n} Y_n^{(j)}(\rho,\vartheta,\varphi)$$

$$Y_n^{(j)}(\rho,\vartheta,\varphi)=\left[A_n^{(j)}(\rho)\cdot\cos j\varphi+B_n^{(j)}(\rho)\sin j\varphi\right]\cdot X_n^{(j)}(\cos\vartheta)$$

$$A_n^{(j)}(\rho)=C_n^{(j)}\int_o^{\pi}\sin\vartheta'\, X_n^{(j)}(\cos\vartheta')\, d\vartheta'\int_o^{2\pi}U(\rho,\vartheta',\varphi')\cos j\varphi'\, d\varphi'$$

$$B_n^{(j)}(\rho)=C_n^{(j)}\int_o^{\pi}\sin\vartheta'\, X_n^{(j)}(\cos\vartheta')\, d\vartheta'\int_o^{2\pi}U(\rho,\vartheta',\varphi')\sin j\varphi'\, d\varphi' \tag{14}$$

$$C_n^{(j)}=(-1)^j\cdot\frac{(1+sgn\, j)\,(2n+1)\,(n-p)!\,(n+p)!}{4\pi\cdot(n!)^2}$$

$$sgn\, j=0 \quad \text{für } j=0$$
$$sgn\, j=1 \quad » \ \ j>0.$$

Die Entwicklung (14) konvergiert insbesondere auch für $\rho=b$. Sie ist in diesem Falle identisch mit der Entwicklung, die man erhält, wenn man in (11) $\rho=b$ setzt, denn die Entwicklung einer Funktion von ϑ und φ in eine Reihe nach Laplace'schen Kugelfunktionen ist höchstens auf eine Art möglich (siehe z. B. [7], Bd. II, Seite 82). Es folgen daraus die Beziehungen

$$\begin{gathered} Y_n^{(j)}(b,\vartheta,\varphi)=y_n^{(j)}(\vartheta,\varphi)\\ A_n^{(j)}(b)=a_n^{(j)} \qquad\qquad B_n^{(j)}(b)=b_n^{(j)}\end{gathered} \tag{15}$$

Im Aussenraum $\rho\geqq b$ des Basisellipsoides ist die Reihe (11) eine Reihe von harmonischen Funktionen. Da sie am Rande $\rho=b$ des Gebietes gleichmässig konvergiert, sind die Voraussetzungen für die Anwendung des Konvergenztheorems von HARNACK gegeben (siehe z. B. [6], Seite 248), d. h. die Reihe konvergiert auch gleichmässig für $\rho>b$, und die Summe der Reihe ist eine für $\rho\geqq b$ harmonische Funktion $U(\rho,\vartheta,\varphi)$. Die Entwicklungen (11) und (14) sind Glied für Glied identisch.

5. Eigenschaften von $\dfrac{\partial U}{\partial\rho}$: Für die Behandlung des Neumann'schen Randwertproblems sollen die Voraussetzungen über die Dichte μ gegenüber Abschnitt 3 etwas verschärft werden. Zunächst werde eine feste positive Grösse $\rho_o<b$ gewählt. Durch die Ellipsoidfläche $\rho=\rho_o$ wird das Innere des Basisellipsoides in einen Kern $\rho\leqq\rho_o$ und eine Schale $\rho_o\leqq\rho\leqq b$ zerlegt. Für die Dichte μ im Kern soll die Voraussetzung von Abschnitt 3 gelten. Die Dichte in der Schale soll hingegen im Sinne von GUNTHER ([3,]

Seite 8) «regulär stetig» sein, d. h. es existieren zwei positive Konstante A und λ, so dass $|\mu(Q)-\mu(P)| \leqq A \cdot r^{\lambda}$, $r=\overline{PQ}$, wo P und Q beliebige Punkte der Schale sind. Das Neumann'sche Randwertproblem für den Aussenraum besteht in der Bestimmung von U für $\rho \geqq b$, wenn $\frac{\partial U}{\partial \rho}$ auf der Oberfläche $\rho=b$ des Basisellipsoides gegeben ist. Zur Lösung des Randwertproblems ist es notwendig, die Funktion $\frac{\partial U}{\partial \rho}$ im Aussenraum $\rho \geqq b$ zu betrachten. Das Potential U kann dabei als Summe der Potentiale des Kerns und der Schale betrachtet werden. Das Potential des Kerns ist im Aussenraum des Kerns harmonisch und daher für $\rho \geqq b$ beliebig oft stetig differenzierbar. Für die Differenzierbarkeitseigenschaften von U ist daher die Massenverteilung in der Schale ausschlaggebend.

Wir gehen aus von der Beziehung

$$\frac{\partial U}{\partial \rho}=\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho}+\frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \rho}\,. \tag{16}$$

Aus (2) ist zu entnehmen, dass die Funktionen $\frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial y}{\partial \rho}$ und $\frac{\partial z}{\partial \rho}$ für $\rho \geqq b$ stetig und nach x, y, z stetig differenzierbar sind. Nach [3], Seite 91, bebesitzen unter Berücksichtigung der über die Dichte in der Schale gemachten Voraussetzung die Grössen $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ und $\frac{\partial U}{\partial z}$ partielle Ableitungen 1. Ordnung nach x, y, z, die für $\rho>b$ regulär stetig sind. Diese Ableitungen, also die zweiten Ableitungen von U, gehen daher nach [3], Seite 8, gegen wohlbestimmte Grenzwerte, wenn man vom Aussenraum des Basisellipsoides her gegen einen beliebigen Punkt seiner Oberfläche geht. Die Grenzwerte bilden auf dieser Fläche stetige Funktionen. In diesem Sinne dürfen wir unter Berücksichtigung von (16) kurz von der stetigen Differenzierbarkeit von $\frac{\partial U}{\partial \rho}$ nach x, y, z im abgeschlossenen Aussenraume $\rho \geqq b$ sprechen.

6. Reihenentwicklung von $\frac{\partial U}{\partial \rho}$: Wir gehen aus von der Reihenentwicklung (14), wobei nun ϑ und φ festgehalten werden sollen, und ρ zwischen b und einer willkürlichen festen Grösse $\rho_1>b$ variiert wird. Die gliedweise Ableitung der Reihe (14) nach ρ stellt $\frac{\partial U}{\partial \rho}$ dar, sofern die entstehende Reihe im betrachteten Intervall gleichmässig konvergiert. (Siehe z. B. [1], Seite 259, Theorem 5). Es ist daher die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial \rho}\, y_n^{(j)}(\rho, \vartheta, \varphi) \tag{17}$$

zu untersuchen, wobei

$$\frac{\partial}{\partial \rho} y_n^{(j)}(\rho, \vartheta, \varphi) = \left(\frac{\partial A_n^{(j)}}{\partial \rho} \cos j\varphi + \frac{\partial B_n^{(j)}}{\partial \rho} \sin j\varphi \right) X_n^{(j)}(\cos \vartheta)$$

ist. Bei der Ableitung von $A_n^{(j)}$ und $B_n^{(j)}$ ist die Vertauschung mit der Integration gestattet, ([2], Bd. I, Seite 228), sofern die Ableitung des Integranden, d.h. $\frac{\partial}{\partial \rho} U(\rho, \vartheta', \varphi')$, stetig ist. Dies ist nach Abschnitt 5 in der Tat der Fall, d.h.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_n^{(j)}}{\partial \rho} &= C_n^{(j)} \int_o^\pi \sin \vartheta' X_n^{(j)}(\cos \vartheta') d\vartheta' \int_o^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} U(\rho, \vartheta', \varphi') \cos j\varphi' \, d\varphi' \\
\frac{\partial B_n^{(j)}}{\partial \rho} &= C_n^{(j)} \int_o^\pi \sin \vartheta' X_n^{(j)}(\cos \vartheta') d\vartheta' \int_o^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} U(\rho, \vartheta', \varphi') \sin j\varphi' \, d\varphi'.
\end{aligned} \tag{18}$$

Vergleicht man (18) mit (14), so sieht man, daß (17) die Entwicklung von $\frac{\partial U}{\partial \rho}$ nach Kugelfunktionen darstellt, sofern die Entwickelbarkeitsbedingungen erfüllt sind. Dies ist tatsächlich der Fall, denn nach dem Ergebnis von Abschnitt 5 kann man auf $\frac{\partial U}{\partial \rho}$ für $\rho \geqq b$ die gleichen Ueberlegungen anwenden, wie sie in Abschnitt 4 auf U angewandt wurden. Die gliedweise Ableitung der Reihe (11) ist daher gestattet, und man erhält

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \rho} &= \sum_{n=o}^{\infty} \sum_{j=o}^{n} y_n^{(j)}(\vartheta, \varphi) \cdot \frac{T_n^{(j)}(\rho)}{Q_n^{(j)}\left(i \frac{b}{D}\right)} \\
T_n^{(j)}(\rho) &= \frac{\partial}{\partial \rho} Q_n^{(j)}\left(i \frac{\rho}{D}\right).
\end{aligned} \tag{19}$$

7. Lösung der zweiten Randwertaufgabe für den Aussenraum des Basisellipsoides: Gegeben sind die Werte von $\frac{\partial U}{\partial \rho}$ auf der Oberfläche des Basisellipsoides, also

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_{\varrho = b} = p(\vartheta, \varphi).$$

$p(\vartheta, \varphi)$ wird in eine Reihe von Kugelfunktionen entwickelt.

$$p(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=o}^{\infty} \sum_{j=o}^{n} Z_n^{(j)}(\vartheta, \varphi)$$

$$Z_n^{(j)}(\vartheta, \varphi) = (\alpha_n^{(j)} \cos j\varphi + \beta_n^{(j)} \sin j\varphi) \cdot X_n^{(j)}(\cos \vartheta). \tag{20}$$

Die Koeffizienten $\alpha_n^{(j)}$ und $\beta_n^{(j)}$ sind den Formeln (14) entsprechend aus $p(\vartheta, \varphi)$ zu berechnen. Setzt man in (19) $\rho = b$ und vergleicht mit (20), so erhält man

$$y_n^{(j)}(\vartheta, \varphi) \cdot \frac{T_n^{(j)}(b)}{Q_n^{(j)}\left(i\frac{b}{D}\right)} = Z_n^{(j)}(\vartheta, \varphi).$$

Löst man nach $y_n^{(j)}$ auf und setzt in (11) ein, so erhält man als Lösung der zweiten Randwertaufgabe für den Aussenraum $\rho \geqq b$:

$$U(\rho, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=o}^{\infty} \sum_{j=o}^{n} Z_n^{(j)}(\vartheta, \varphi) \cdot \frac{Q_n^{(j)}\left(i\frac{\varrho}{D}\right)}{T_n^{(j)}(b)}. \tag{21}$$

8. Vom Schwerefeld der Erde: Ist das Basisellipsoid $\rho = b$ das Referenzellipsoid der Geodäsie, μ die Dichte im Erdinnern für den Fall, dass durch irgend ein Reduktionsverfahren die Massen ausserhalb des Referenzellipsoides beseitigt sind, und ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, so ist

$$W = f \cdot U + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \tag{22}$$

die sog. Kräftefunktion des Schwerefeldes, d. h.

$$\mathfrak{g} = \text{grad } W$$

ist der Vektor der Schwerebeschleunigung (siehe [5], Seite 8). $\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{\varrho = b}$ ist die Komponente von $\mathfrak{g}$ in der Richtung der Normalen zum Referenzellipsoid. (Der Winkel zwischen dieser Normalen und der Lotrichtung ist durchwegs so klein, dass man innerhalb der Messgenauigkeit bleibt, wenn man $\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{\varrho = b}$ durch $|\mathfrak{g}|$ ersetzt.) Leitet man (22) nach ρ ab und setzt $\rho = b$, so erhält man

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{\varrho = b} = f \cdot p(\vartheta, \varphi) + \omega^2 b \sin^2 \vartheta \tag{23}$$

(φ = geogr. Länge, $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ = reduzierte Breite). Denkt man sich die Schwerebeschleunigung $|\mathfrak{g}|$ und damit $\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{\varrho = b}$ gegeben, so gibt die Gleichung (23) die Werte von $p(\vartheta, \varphi)$. Nach Abschnitt 7 lässt sich daraus für den Aussenraum $\rho \geqq b$ $U(\rho, \vartheta, \varphi)$ und damit nach (22) die Kräftefunktion W des Schwerefeldes bestimmen. Die Gleichungen W = const. ergeben schliesslich die Niveauflächen des Schwerefeldes.

Literatur

[1] E. CESARO: Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Deutsch von G. Kowalewski. Teubner, Leipzig 1904.

[2] E. GOURSAT: Cours d'Analyse mathématique. 3 Bde. Gauthier-Villars, Paris 1933/33/27.

[3] N. M. GUNTHER: La théorie du potentiel. Gauthier-Villars, Paris 1934.

[4] E. HEINE: Handbuch der Kugelfunktionen. 2 Bände. Reimer, Berlin 1878/1881.

[5] F. R. HELMERT: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Band II. Teubner, Leipzig 1884.

[6] O. D. KELLOGG: Foundations of potential theory. Springer, Berlin 1929.

[7] A. WANGERIN: Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. 2 Bände. Sammlung Schubert LVIII und LIX, W. de Gruyter, Berlin und Leipzig 1922/1921