Mitteilungen

Eine Bemerkung zum Borsukschen Antipodensatz [1]

Von

H. HADWIGER (Bern)

Nach dem zweidimensionalen Spezialfall des Antipodensatzes von LUSTERNIK, SCHNIRELMANN, BORSUK [2]) gilt die folgende

Aussage a: *Ist die Kugelfläche durch drei abgeschlossene Mengen überdeckt, so enthält wenigstens eine der Mengen ein antipodisches Punktepaar.*

Unter Kugelfläche verstehen wir hier wie üblich die Randfläche der Vollkugel des dreidimensionalen Euklidischen Raumes; sie heisst dann durch ein System von Mengen überdeckt, wenn jeder Punkt der Kugelfläche zu mindestens einer Menge des Systems gehört. Im folgenden werden wir unter der Distanz eines Punktepaares stets die auf der Einheitskugelfläche (Radius $=1$) gemessene sphärische Distanz verstehen. Ein antipodisches Punktepaar ist dann ein solches der Distanz $\Delta = \pi$. Durch einen Satz von H. HOPF [3]) hat der allgemeine Borsuksche Antipodensatz eine wesentliche Erweiterung und Verallgemeinerung erfahren, indem eine entsprechende Aussage für abgeschlossene Überdeckungen von Mannigfaltigkeiten mit Riemann'scher Metrik in bezug auf Punktepaare, welche Endpunkte geodätischer Bogen vorgeschriebener Länge sind, gemacht wird. Die Spezialisierung auf die zweidimensionale Sphäre ergibt die folgende

Aussage b: *Ist die Kugelfläche durch drei abgeschlossene Mengen überdeckt und ist Δ, $0 < \Delta \leqq \pi$, eine beliebig vorgegebene Distanz, so enthält wenigstens eine der Mengen ein Punktepaar der Distanz Δ.*

Nach einem Ergebnis von A. DE MIRA FERNANDES [4]) gilt für das Distanzteilintervall $0 < \Delta \leqq \frac{2\pi}{3}$ sogar, dass wenigstens eine Menge ein gleichseitiges Punktedreieck der Seitenlänge Δ enthält, falls die drei Mengen keinen Punkt gemeinsam haben.[5])

In dieser Note treten wir auf eine Überholung der beiden vorausgeschickten Aussagen *a* und *b* ein; wir beweisen nämlich:

Aussage c: *Ist die Kugelfläche durch drei abgeschlossene Mengen überdeckt, so hat wenigstens eine der Mengen die Eigenschaft, zu jeder beliebig vorgegebenen Distanz Δ, $0 < \Delta \leqq \pi$, ein Punktepaar der Distanz Δ zu enthalten.*

Eine Menge eines metrischen Raumes, die durch ihre Punktepaare alle Distanzen des

---

[1]) Vortrag, gehalten am 16. Mai 1944 im Mathematischen Kolloquium Zürich.

[2]) L. LUSTERNIK et L. SCHNIRELMANN: Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels, Moskau 1930 (russisch) S. 26. K. BORSUK: Drei Sätze über die n-dimensionale Sphäre. Fund. Math. XX, 1933. K. BORSUK: Über die Zerlegung einer Euklidischen n-dimensionalen Vollkugel in n-Mengen, Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932, II. Bd. S. 192.

[3]) H. HOPF: Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze, Portugaliae Mathematica *4* (1943—44), 129—139.

[4]) A. DE MIRA FERNANDES: Funzioni continue sopra una superficie sferica, Portugaliae Mathematica, Vol. 4, Fasc. 1—2, 1943.

[5]) Verf. wurde durch Herrn H. HOPF (Zürich) auf diesen Zusammenhang aufmerksam gemacht. Die im Text angegebene Aussage kann, wie Herr HOPF in einem Brief vom 4. 2. 1944 dies andeutet, auf Grund des Kuratowskischen Abbildungsverfahrens (vgl. P. ALEXANDROFF und H. HOPF, Topologie I, Berlin 1935, S. 366) aus dem Hilfssatz von A. DE MIRA FERNANDES gewonnen werden.

Raumes realisiert, haben wir an anderer Stelle als Δ-Menge (Deltamenge)[6]) bezeichnet. Verfasser hegt die Vermutung, dass unter den gleichen Bedingungen, unter welchen der Borsuk'sche Antipodensatz für die n-dimensionale Sphäre gilt, gefolgert werden kann, dass wenigstens eine der bedeckenden Mengen eine Δ-Menge sei. Es kann hier darauf hingewiesen werden, dass der entsprechende Satz für den n-dimensionalen Euklidischen Raum richtig ist.[7]) Wie erwähnt, beweisen wir den erläuterten Deltasatz, d. h. Aussage c, für die zweidimensionale Sphäre. Abgesehen von der Verwendung eines Hilfssatzes von S. STRASZEWICZ[8]), auf den B. KNASTER[9]) in ähnlicher Weise zurückgriff, trägt der Beweis durchwegs elementaren Charakter. Die im nachfolgenden Beweis verwendeten Bezeichnungen seien hier kurz zusammengestellt:

Die drei die Kugelfläche S überdeckenden Mengen bezeichnen wir mit A_i ($i = 1, 2, 3$). Werden die drei Ziffern i, k, l im engeren Formelzusammenhang angeschrieben, so sollen sie stets eine Anordnung der drei verschiedenen Ziffern 1, 2, 3 bedeuten. Mit a_i, p_i usw. bzw. a_{ik}, p_{ik} usw. bezeichnen wir Punkte, die zur Menge A_i bzw. solche, die zum Durchschnitt A_iA_k gehören. $\Delta(a, b)$ bedeutet die sphärische Distanz der beiden Punkte a und b. Ferner bezeichnen wir mit a^* den zu a antipodischen Punkt. Entsprechend sei M^* das antipodische Bild der Menge M. Eine Menge M heisse antipodisch, wenn $M = M^*$ gilt, d. h. wenn sie mit ihrem antipodischen Bild identisch ist.

Den Beweis des Deltasatzes führen wir so, dass wir die Gegenannahme von Aussage c durch verschiedene Fälle hindurch auf Widersprüche führen. Diese Gegenannahme kann wie folgt formuliert werden: Die Menge A_i enthält kein Punktepaar der Distanz α_i ($i = 1, 2, 3$).

(I) Zunächst ist klar, dass A_i keine antipodische Komponente[10]) enthalten kann, da die Punktepaare eines antipodischen Kontinuums alle Distanzen realisieren. Es kann aber auch die Vereinigungsmenge $A_i + A_i^*$ keine antipodische Komponente enthalten. In der Tat: Wäre K eine solche antipodische Komponente der erwähnten Menge, so wäre offensichtlich K durch die beiden nicht leeren abgeschlossenen Mengen KA_i und KA_i^* überdeckt, die also ihrerseits einen nicht leeren Durchschnitt haben müssen. Es sei a ein Punkt des Durchschnittes $KA_iA_i^*$. Nun enthält K sicher einen weiteren Punkt z, $\Delta(a, z) = \alpha_i$; z gehört nun entweder zu A_i oder aber zu A_i^*. Im erstgenannten Fall enthält A_i mit a, z ein Punktepaar der Distanz α_i, im zweitgenannten Fall aber mit a^*, z^* ebenfalls. In beiden Fällen ergibt sich der Widerspruch mit der Gegenannahme.

(II) Da die Menge $A_i + A_i^*$ keine antipodische Komponente enthält, lässt sie sich in zwei zueinander antipodische, abgeschlossene und fremde Mengen M_i und M_i^* zerlegen. Diese lassen sich in zwei abgeschlossene, antipodische und sie ε-umhüllende Mengen N_i und N_i^* derart einschliessen, dass immer noch $N_i N_i^* = O$ gilt, und dass die Komplementärmengen $S - N_i$ und $S - N_i^*$ aus endlich vielen, also k-Komponenten bestehen.[11]) Nach einem Hilfssatz von S. STRASZEWICZ[12]) besteht nun die antipodische Komplementärmenge $S - (N_i + N_i^*)$ aus $2k + 1$ Komponenten. Hieraus folgt, dass diese Menge eine antipodische Komponente enthalten muss, da ja andernfalls die Komponentenzahl notwendig gerade sein müsste. Eine solche offene antipodische und zusammenhängende Menge enthält einen antipodischen topologischen Kreis. Einen solchen Kreis bezeichnen wir mit T_i. Aus der Konstruktion folgt, dass T_i durch die Mengen A_k und A_l überdeckt wird.

(III) Da nun zwei antipodische topologische Kreise stets wenigstens ein antipodisches Punktepaar gemeinsam haben,[13])

---

[6]) H. HADWIGER: Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum, Portugaliae Mathematica *4* (1943—44), 140—144.

[7]) Vgl. Fussnote [6]).

[8]) S. STRASZEWICZ: Fund. Math. VII, 1925, S. 179 (Hilfssatz I).

[9]) B. KNASTER: Ein Zerlegungssatz über unikohärente Kontinua, Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses, Zürich 1932, II. Bd., S. 193.

[10]) Unter einer Komponente einer Menge verstehen wir wie üblich eine grösste zusammenhängende Teilmenge.

[11]) Vgl. auch den von B. KNASTER für lokal zusammenhängende Kontinua formulierten Hilfssatz der in Fussnote [9]) zitierten Arbeit.

[12]) Vgl. Fussnote [8]).

[13]) Folgerung aus dem speziellen Jordan-Brouwer'schen Satz. Vgl. P. ALEXANDROFF u. H. HOPF, Topologie I, Berlin 1935, S. 450.

folgert man weiter, dass die Menge A_i ein antipodisches Punktepaar p_i, p_i^* enthält, das zum Durchschnitt $T_l\, T_k$ gehört. Damit ist übrigens ein Beweis des Antipodensatzes gegeben, wobei noch besonders zu beachten ist, dass aus unserer Gegenannahme folgt, dass jede der drei Mengen ein antipodisches Punktepaar enthält.

(IV) Wir betrachten nun weiter die beiden Kreise K_i und K_i^*, die auf der Kugelfläche S um die beiden Punkte p_i und p_i^* mit dem Radius α_i gezogen werden können. Nach der Gegenannahme werden beide Kreise durch die Mengen A_k und A_l überdeckt. Da nun A_k wenigstens einen Schnittpunkt von K_i mit dem durch das Antipodenpaar p_i, p_i^* hindurchlaufenden antipodischen topologischen Kreis T_l enthalten wird, folgt, dass die Menge $K_i\, A_k$ und aus analogen Gründen auch die Menge $K_i\, A_l$ nicht leer sein kann, so dass die beiden soeben genannten abgeschlossenen Mengen einen nicht leeren Durchschnitt haben. Damit stellen wir fest, dass der Kreis K_i wenigstens einen Punkt a_{kl} des Durchschnittes $A_k\, A_l$ enthalten muss.

(V) Es ist nun wohl keine Einschränkung der Allgemeinheit, für die drei nach der Gegenannahme in den Mengen A_i verbotenen Distanzen α_i die Ordnungsbeziehung

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3$$

anzunehmen. Weiter treffen wir die Fallunterscheidung:

1. Fall. $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \frac{\pi}{2}$,

2. Fall. $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \frac{\pi}{2} < \alpha_3$; $\alpha_2 \leqq 2(\pi - \alpha_3)$,

3. Fall. $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \frac{\pi}{2} < \alpha_3$; $\alpha_2 > 2(\pi - \alpha_3)$,

4. Fall. $\alpha_1 \leqq \frac{\pi}{2} < \alpha_2 \leqq \alpha_3$; $\alpha_2 \leqq \pi - 2\alpha_1$,

5. Fall. $\alpha_1 \leqq \frac{\pi}{2} < \alpha_2 \leqq \alpha_3$; $\alpha_2 > \pi - 2\alpha_1$,

6. Fall. $\frac{\pi}{2} < \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3$.

Die einzelnen Fälle werden anschliessend behandelt und einzeln auf Widersprüche geführt:

1. Fall. Als Ausgangspunkt wählen wir den Punkt a_{12} auf K_3. Da der Durchmesser des Kreises K_3 durch $2\alpha_3$ gegeben ist, und da mit Rücksicht auf die Ordnungsbeziehung

$$\alpha_1 < 2\alpha_3, \ \alpha_2 < 2\alpha_3$$

gilt, können mit beständiger Berufung auf die Gegenannahme auf K_3 die folgenden Punkte festgestellt werden:

a_1 mit $\Delta(a_1, a_{12}) = \alpha_2$, a_2 mit $\Delta(a_2, a_{12}) = \alpha_1$, ferner x mit $\Delta(x, a_1) = \alpha_1$, $\Delta(x, a_2) = \alpha_2$, $\Delta(x, p_3) = \alpha_3$.

Nach der Gegenannahme kann der Punkt x zu keiner Menge A_i gehören, im Widerspruch zur Überdeckungseigenschaft.

2. Fall. Als Ausgangspunkt wählen wir den Punkt a_{12} auf K_3. Da nun der Durchmesser des Kreises K_3 durch $2(\pi - \alpha_3)$ gegeben ist, und da mit Rücksicht auf die Ordnungsbeziehung nun

$$\alpha_1 \leqq 2(\pi - \alpha_3), \ \alpha_2 \leqq 2(\pi - \alpha_3)$$

gilt, kann der Widerspruch in der gleichen Weise wie beim 1. Fall erzielt werden.

3. Fall. Als Ausgangspunkt wählen wir den Punkt a_{13} auf K_2. Da die Distanz der Kreise K_2 und K_2^* durch $\pi - 2\alpha_2$ gegeben ist, und da aus $\alpha_2 > 2(\pi - \alpha_3)$ auf $\alpha_3 > \pi - 2\alpha_2$ geschlossen werden kann, gibt es auf K_2^* einen Punkt a_1 mit $\Delta(a_1, a_{13}) = \alpha_3$. Da der Durchmesser von K_2^* durch $2\alpha_2$ gegeben ist, und da wegen der Ordnungsbeziehung $\alpha_1 < 2\alpha_2$ ist, kann weiter auf K_2^* ein Punkt a_3 mit $\Delta(a_3, a_1) = \alpha_1$ festgestellt werden. Schliesslich gibt es nun wieder auf K_2 einen Punkt x mit

$$\Delta(x, a_3) = \alpha_3, \ \Delta(x, a_{13}) = \alpha_1, \ \Delta(x, p_2) = \alpha_2.$$

Der Punkt x kann nach der Gegenannahme zu keiner Menge A_i gehören, im Widerspruch zur Überdeckungseigenschaft.

4. Fall. Als Ausgangspunkt wählen wir wieder den Punkt a_{13} auf K_2. Die Distanz der Kreise K_2 und K_2^* ist nun gegeben durch $2\alpha_2 - \pi$. Nach der Ordnungsbeziehung kann mit $\alpha_3 \geqq \alpha_2$ auf $\alpha_3 \geqq 2\alpha_2 - \pi$ geschlossen werden. Ferner folgert man aus $\alpha_2 \leqq \pi - 2\alpha_1$ leicht $\alpha_1 < 2(\pi - \alpha_2)$. Nun ist aber $2(\pi - \alpha_2)$ der Durchmesser der Kreise K_2^* und K_2, und so kann der Widerspruch in gleicher Weise erzielt werden wie beim 3. Fall.

5. Fall. Als Ausgangspunkt wählen wir den Punkt a_{23} auf K_1. Da die Distanz der beiden Kreise K_1 und K_1^* durch $\pi - 2\alpha_1$ gegeben ist, und da mit Rücksicht auf die Ordnungsbeziehung aus $\alpha_2 > \pi - 2\alpha_1$

auf $\alpha_3 > \pi - 2\alpha_1$ geschlossen wird, gibt es auf K_1^* zwei Punkte a_2 und a_3 mit $\Delta(a_2, a_{23}) = \alpha_3$ und $\Delta(a_3, a_{23}) = \alpha_2$. Ferner gibt es nun wieder auf K_1 einen Punkt x mit

$$\Delta(x, a_2) = \alpha_2,\ \Delta(x, a_3) = \alpha_3,\ \Delta(x, p_1) = \alpha_1.$$

Der Punkt x kann nach der Gegenannahme zu keiner Menge A_i gehören, im Widerspruch zur Überdeckungseigenschaft.

6. Fall. Als Ausgangspunkt wählen wir den Punkt a_{23} auf K_1. Aus der Ordnungsbeziehung folgert man leicht, dass

   $\alpha_2 \geqq 2\alpha_1 - \pi$, $\alpha_3 \geqq 2\alpha_1 - \pi$ gilt. Nun ist aber $2\alpha_1 - \pi$ die Distanz der beiden Kreise K_1 und K_1^*, so dass in gleicher Weise ein Widerspruch erzielt wird, wie beim 5. Fall.

Mit diesem letzten Widerspruch ist die Beweiskette geschlossen.

Elektronenoptische Abbildung des submikroskopischen Gel-Feinbaues

Von

A. FREY-WYSSLING und K. MÜHLETHALER (Zürich)

Aus dem pflanzenphysiologischen Institut der Eidg. Technischen Hochschule Zürich

(Mit 2 Abbildungen im Text)

Auf Grund indirekter Untersuchungsmethoden ist für den submikroskopischen Feinbau der Gele eine Retikulartextur aus Micellarsträngen gefordert worden [1]). Während die ursprüngliche Hypothese eine beliebige Überkreuzung der mikroskopisch unsichtbaren Stränge annahm, wurde in einer neueren Arbeit [2]) darauf hingewiesen, dass das Prinzip der Nahordnung von Fadenmolekülen, das von KRATKY als Ordnung in kleinsten Bereichen bezeichnet worden ist, auch auf die submikroskopischen Micellarstränge anzuwenden sei. Infolgedessen können nicht beliebige Überschneidungen der kolloiden Bündel von Fadenmolekülen auftreten, sondern die Retikulartextur muss durch zahllose Aufspaltungen (weichenartige Verzweigungen) und Vereinigungen der Micellarstränge zustande kommen, die zwischen sich das Dispersionsmittel einschliessen.

Mit Hilfe des schweizerischen Elektronenmikroskopes von der Firma TRÜB, TÄUBER & Co., AG., Zürich, ist es gelungen, diese Retikulartextur für das anorganische Gel von Vanadiumpentoxyd nachzuweisen. Wir verdanken die V_2O_5-Gele Herrn P.-D. Dr. GESSNER. Sie erinnern hinsichtlich ihres hohen Wassergehaltes und ihres halbfesthalbflüssigen Aggregatzustandes an wasserreiche Biogele wie Schleime oder Zytoplasma.

Die Abbildungen zeigen ein zusammenhängendes submikroskopisches Gelgerüst, das aus verschieden mächtigen Micellarsträngen gebildet wird. Die Verzweigungen und Verschmelzungen auseinanderweichender und zusammenlaufender Stränge sind deutlich sichtbar. Wo rundliche Maschen vorhanden sind, verlaufen die Stränge tangential um die vorhandenen Poren.

Aus zwei Gründen erscheint das submikroskopische Netzwerk, verglichen mit dem natürlichen Zustande, zu dicht: 1. durch das Trocknen der Präparate für die elektronenoptischen Aufnahmen im Vakuum und 2. durch die grosse Tiefenschärfe des

---

[1]) FREY-WYSSLING, A.: Submikroskopische Morphologie des Protoplasmas und seiner Derivate. Berlin 1938.

[2]) FREY-WYSSLING, A.: Über den submikroskopischen Feinbau der Zellbestandteile. Verhandlungen Schweiz. Naturf. Ges. Schaffhausen 1943, S. 145 und Schweiz. Med. Wochenschr. *74*, 330 (1944).