wendet man in der Landesvermessung das Präzisionsnivellement, eine Verfeinerung des gewöhnlichen Nivellierens der Ingenieure und Geometer.

Aus den Schweremessungen erkennen wir, dass die Niveauflächen der Erde keine Parallelflächen sind. Daraus ergibt sich, dass die Ergebnisse der Nivellemente nicht in Strenge orthometrische Meereshöhen ergeben, wo wir unter der orthometrischen Meereshöhe eines Punktes die Länge der Lotlinie zwischen Punkt und Geoid verstehen. Mit Hilfe von Schweremessungen können wir die rohen Nivellementsresultate in orthometrische Höhen verwandeln.

So dienen also diese Schweremessungen in erster Linie zu wissenschaftlichen Zwekken (Bestimmung der Erdfigur), z. T. aber auch für die praktische Landesvermessung.

Topologie und Algebra

Von

B. ECKMANN (Lausanne / Zürich)

Mit 4 Abbildungen im Text

Antrittsvorlesung, gehalten am 22. Mai 1943 an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

1. Es sei mir gestattet, an zwei einfache Tatsachen anzuknüpfen. Die eine ist der berühmte EULER'sche Polyedersatz: Beim Würfel ist die Anzahl der Ecken und Flächen zusammen um zwei grösser als die der Kanten. Und das ist nicht nur beim Würfel so, sondern bei jedem Körper, ob er regelmässig oder unregelmässig, einfach oder kompliziert sei, wenn er nur, grob gesagt, etwa die Gestalt einer deformierten Kugel hat. Das zweite Beispiel: Wenn man auf der unendlichen Geraden nach beiden Seiten Punkte in gleichen Abständen markiert und dann die Gerade auf einen Kreis aufrollt, so liegen die markierten Punkte auf dem Kreis überall vollkommen dicht und gleichmässig verteilt — wenn nicht gerade zufällig der Abstand der Punkte ein ganzzahliger Bruchteil des Kreisumfangs ist (oder ein Vielfaches davon); in diesem Falle kommen die markierten Punkte nur auf vereinzelte, regelmässig verteilte Stellen des Kreises zu liegen.

Ich will vorläufig mit diesen Beispielen nur andeuten, dass es überraschende Beziehungen gibt zwischen einfachen Gegenständen der räumlichen Anschauung und den Zahlen, dem Rechnen. Solche Beziehungen finden sich in allen Teilen der Mathematik, in den abstraktesten Theorien wie in den Anwendungen in Physik und Technik.

Raum und Zahl — wenn sie auch fast immer gleichzeitig auftreten, so ist man doch geneigt, sie auf den ersten Blick als sehr verschiedenartige Dinge anzusehen, die zu ebenso verschiedenartigen Methoden und Denkweisen Anlass gegeben haben; man unterscheidet ausdrücklich zwischen algebraischen und geometrischen Überlegungen, d. h. solchen, die auf dem Rechnen, und solchen, die auf dem Raumbegriff beruhen. Bei näherem Zusehen zeigt es sich aber bald, dass die beiden Denkweisen eng miteinander verknüpft, ja ineinander verflochten sind, so dass es gar nicht leicht wäre, eine Grenze zwischen ihnen zu ziehen. Ihre eingehende Analyse und die Verfolgung ihrer Wechselbeziehungen, das ist für das Verständnis vieler Teile der Mathematik besonders wertvoll und hat in neuerer Zeit zu ihrer Entwicklung entscheidend beigetragen.

Wenn ich es im folgenden versuche, mit einigen Andeutungen und an Hand einfachster Beispiele auf solche Zusammenhänge aufmerksam zu machen, so weiss ich wohl, dass man damit das Wesen der Sache nur sehr unvollkommen wiedergeben kann, und dass ohne die wirkliche Durchführung der Ideen in Theorie und Praxis das Bild immer verzerrt bleibt. So werde ich mich vor allem bemühen, die gedankliche Atmosphäre fühlbar zu machen, in welcher sich solche Beziehungen abspielen. Man wird es wohl entschuldigen, wenn ich im Rahmen dieses Vortrages manches nur sehr unvollständig formuliere, mit allzu allgemeinen Wendungen über die Schwierigkeiten hinweggehe und hier oder dort etwas vereinfache oder übertreibe; und auf der andern Seite wird man es mir nicht übel nehmen, wenn ich gelegentlich in abgelegenere Gebiete der Wissenschaft gerate und dabei nicht umhin kann, die dort gebräuchliche Geheimsprache zu verwenden.

2. Wenn man sich einzelne, besonders wichtige Züge eines etwas komplexen und unübersichtlichen Gegenstandes klar machen will, so löst man sie vom Ganzen los und untersucht sie selbständig; man macht sich ein vereinfachtes Bild, ein Schema, des Gegenstandes, oder sogar mehrere verschiedene, indem man ihn von verschiedenen Seiten zu beleuchten sucht. In diesem Sinn hat man als Schema des Rechnens die abstrakte Algebra und als Schema der Raumbeschreibung die abstrakte Geometrie herausgeschält und verselbständigt.

Ein Schema — man denke etwa an dasjenige einer komplizierten Maschine — ist kein getreues Abbild der Wirklichkeit, sondern sehr unvollständig und meistens verzerrt. Aber das, worauf es ankommt, kann man ihm übersichtlicher entnehmen als der Wirklichkeit selbst: Es lässt Überflüssiges weg, und hebt dafür das Wesentliche um so besser hervor; es erhebt nicht den Anspruch darauf, die Dinge richtig wiederzugeben, sondern nur bestimmte Beziehungen zwischen ihnen. Deswegen umfasst es oft gleichzeitig verschiedene ähnliche Fälle und erleichtert das Verständnis der Grundidee, die gewöhnlich nicht nur hinter einer Fülle technischer Einzelheiten, sondern auch hinter einer gefälligen äussern Form verborgen ist. Und nicht viel anders ist es eigentlich in der Mathematik: selbst wenn man die mehr oder weniger verwickelten Einzelheiten blinder Rechnungen oder unübersichtlicher Konstruktionen verstanden hat, so empfindet man doch oft das Bedürfnis, den Gedankengang als Ganzes zu überblicken, ihn in allgemeine Zusammenhänge einzuordnen, das «Wesen der Methode» oder die «Idee des Beweises» zu kennen. Man möchte über die speziellen Anwendungen hinaus alle Möglichkeiten erfassen und sucht selbst Einzelprobleme durch allgemeingültige Schlüsse zu meistern; man gibt sich nicht mit «zufälligen» Resultaten zufrieden, sondern fragt nach ihrem «tiefern» Grund.

So hat es sich als besonders lohnend erwiesen, aus der Fülle der Möglichkeiten die beiden nächstliegenden Gesichtspunkte herauszugreifen und sich über das Schema des Rechnens und dasjenige der Raumbeschreibung Rechenschaft zu geben.

3. Darf ich zunächst über das erste, die Algebra, einige ganz kurz und allgemein gehaltene Bemerkungen machen.

In der abstrakten Algebra nimmt man vom Zahlbegriff nur eines, das Rechnen, sieht aber von der Natur der Zahlen selbst völlig ab; man ersetzt sie ja durch Buchstaben und führt mit diesen alle Operationen aus, Addition, Multiplikation und ihre Umkehrungen. Dabei ahmt man die Regeln des Zahlenrechnens mehr oder weniger vollständig nach; so soll z. B., weil $3+5=5+3$ ist, auch $a+b=b+a$ sein (Kommutativgesetz). Und das hat diesen Sinn: Formeln und Resultate bleiben richtig, wenn man für die Buchstaben irgendwelche Zahlen einsetzt. Natürlich bleibt auf diese Weise manches am Charakter der reellen Zahlen unausgenützt: etwa dass sie, auf der Zahlgeraden dargestellt, eine lückenlose Menge bilden. Denn rechnen kann man ja auch mit den ganzen Zahlen, die doch in mancher Hinsicht einen andern Charakter haben. Überhaupt gibt es noch viele andere Dinge als reelle oder ganze Zahlen, die man auch addieren kann (oder multiplizieren, oder beides), und für diese gilt genau derselbe Formalismus. So kann man z. B. die Winkel in einem Punkt addieren, oder die Drehungen um diesen Punkt; obschon dabei dieselben formalen Regeln gelten wie etwa für die Addition reeller Zahlen, so ist doch dieses System ganz anders beschaffen; durch wiederholtes Addieren kommt man wieder auf Null zurück. Systeme von Dingen, mit denen man eine Operation ausführen kann, nennt man Gruppen (genauer kommutative, wenn, wie in allen unsern Beispielen, das Kommutativgesetz gilt). Es gibt auch Gruppen, die nur aus endlich vielen Dingen bestehen; z. B. nehme man statt aller Winkel oder Drehungen nur die Achtelsdrehungen und ihre Vielfachen und numeriere sie mit den Zahlen 0 bis 7; dann ist $1+2=3$, $2+4=6$, aber $3+5=0$, $4+7=3$ usw., und man spricht von einer Gruppe endlicher Ordnung (hier 8). Die Gruppe der Ordnung 2 besteht nur aus zwei Dingen, etwa 0 und 1, und es ist $1+1=0$.

Die Theorie der Gruppen sucht die Beziehungen aufzufinden, die allen Systemen mit einer Operation gemeinsam sind, und alle überhaupt möglichen solchen Systeme zu bestimmen. Da man in den verschiedensten Gebieten auf solche Systeme stösst, vereinigt diese Theorie Gedankengänge, die in der Zahlentheorie, beim Auflösen von Gleichungen, in der Funktionentheorie, in der Atomphysik, in der Lehre von den Kristallen usw. vorkommen — sie bildet für sie alle ein gemeinsames Schema, das natürlich komplizierter ist, als es meine anspruchslosen Beispiele vermuten lassen.

In analoger Weise untersucht man die Systeme mit beiden Operationen (Addition und Multiplikation und ihre Umkehrungen); man nennt sie *Körper*. Vom Kommutativgesetz der Multiplikation ($a . b = b . a$) sieht man dabei oft ab, da es viele Zahlsysteme gibt, in welchen es nicht gilt, und die in mancher Hinsicht, sogar für Anwendungen in Physik und Technik, wichtig sind. Ich will darauf verzichten, über die Fülle der Probleme und Möglichkeiten, die dieser Körperbegriff in sich birgt, auch nur Andeutungen zu machen.

Der wesentliche Schritt der abstrakten Algebra besteht darin, dass man das Schema verselbständigt, jede Gruppe und jeden Körper gewissermassen als eine Welt für sich betrachtet, in der es zwischen den Dingen keine andern Beziehungen gibt als die reinen Rechenoperationen. Was man darin vornimmt, sind also endliche, Schritt für Schritt zu überblickende Vorgänge. Es entsteht so ein abstraktes Gebäude von seltener Geschlossenheit und Harmonie, die auch in allen Anwendungen — in der Mathematik oder in unserer Umwelt — aufs schönste zur Geltung kommt.

Die abstrakte Algebra ist keine alte Disziplin; in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts unter den Händen von Dedekind und Kronecker entstanden, ist sie erst in jüngerer Zeit von Emmy Noether und ihrem Kreis zur vollen Blüte gebracht worden.

4. Nun zur *Geometrie*, zum Schema des Raumes. Als einfachste Eigenschaften und Beziehungen, die man aus dem ziemlich komplexen Raumbegriff herausgreifen könnte, erscheinen einem zunächst sicher diejenigen, welche vom Verbinden von Punkten, vom Schneiden von Geraden, vom Aufspannen von Ebenen usw. handeln, also etwa das, was man als *projektive Geometrie* bezeichnet. Man wird hier wieder von der Natur der Dinge Punkt, Gerade, Ebene absehen und nur auf ihre gegenseitigen Beziehungen achten und erhält so eine Theorie, die sich in ihrer Einfachheit und Allgemeinheit sehr wohl der abstrakten Algebra gegenüberstellen lässt. Wenn man aber nun meint, dass man in dieser Weise streng zwischen algebraischen und geometrischen Überlegungen unterscheiden könne, dass man genau trennen könne, was im einen und was im andern Schema wurzelt oder sich beweisen lässt — dann ist das ein Irrtum.

Es handelt sich wohl um einen methodischen, aber nicht um einen inhaltlichen Unterschied. Es hat sich gezeigt, und das ist eines der Ergebnisse der berühmten Untersuchungen von Hilbert [1][1]) über die «Grundlagen der Geometrie», dass die beiden Theorien, so verschieden ihr anschaulicher Ursprung auch sein mag, genau dasselbe leisten (falls man die *räumliche* projektive Geometrie zugrunde legt, die ebene genügt nicht!). Das wird den, der mit der «analytischen Geometrie» vertraut ist, vielleicht wenig wundern; in dieser wird ja einfach ein Punkt der Ebene ersetzt durch zwei Zahlen, seine Koordinaten (wie das jedem bei topographischen Karten geläufig ist), ein Punkt im Raum durch drei Zahlen, und das geometrische Konstruieren wird ersetzt durch das Rechnen mit diesen Zahlen, und umgekehrt. So kann man z. B. ein Geschütz mit Hilfe von Koordinaten und Berechnungen richten — und das Ziel auch tatsächlich treffen!

Aber die Übereinstimmung ist tiefer; das liegt daran, dass den Grundbegriffen der projektiven Geometrie (d. h. dem Verbinden, Schneiden, Aufspannen) analytisch die einfachsten Rechenoperationen entsprechen, wie man sie nicht nur mit reellen

[1]) Solche Zahlen [1] usw. verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluss dieses Vortrags.

Zahlen, sondern in jedem Körper ausführen kann. So bedeutet z. B. das Schneiden von Geraden in der Ebene oder von Ebenen im Raum nichts anderes als das Auflösen linearer Gleichungen. Die Verwandtschaft lässt sich bis in die Grundregeln verfolgen: der Regel a(bc) = (ab)c, die für jedes Zahlsystem unentbehrlich ist, entspricht die als «Satz von Desargues» bekannnte ebene Schnittfigur (Abb. 1; die Ecken der

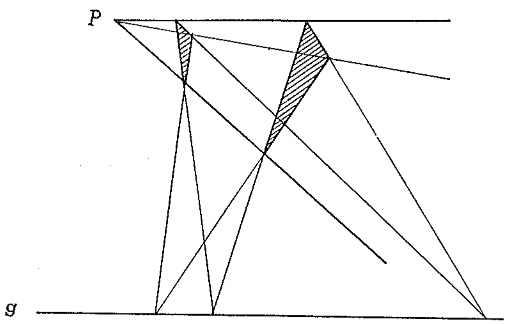

Abb. 1

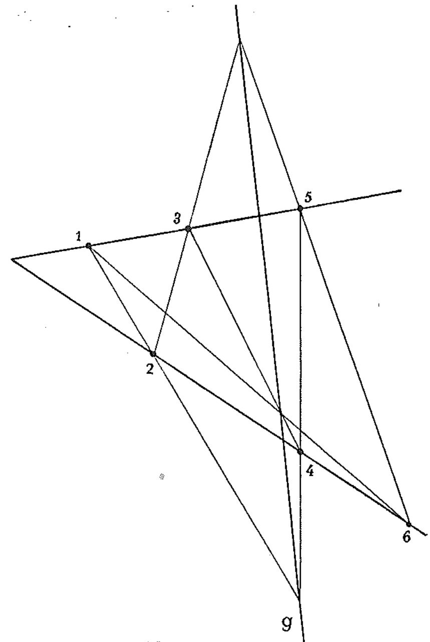

Abb. 2

drei Dreiecke liegen auf den drei Strahlen durch P, und ihre verlängerten Seiten müssen sich immer auf einer Geraden g schneiden — falls wir uns in einer Ebene befinden, die Teil der räumlichen Geometrie bildet; in diesem Fall erkennt man die Richtigkeit sofort, wenn man die Abbildung als Photographie einer räumlichen betrachtet). Und die Rechenregel a . b = b . a entspricht dem «Satz von Pascal» (Abb. 2; man schreibt dem Winkel ein Sechseck 123456 ein und findet, dass die drei Schnittpunkte (12)(45), (23)(56), (34)(61) auf einer Geraden g liegen).

Dem abstrakten Standpunkt entsprechend wird man jedes System von Dingen, an welchem sich die projektiven Operationen des Schneidens von Geraden usw. ausführen lassen, einen projektiven Raum nennen, auch wenn dieses System mit unserem Erfahrungsraum nicht viel zu tun hat. Dann gibt es — ähnlich wie das Rechnen in den verschiedenen Zahlsystemen der abstrakten Algebra möglich ist — verschiedene projektive Geometrien; jede aber kann man als analytische Geometrie betreiben, wenn man nur für die Koordinaten ein geeignetes Zahlsystem wählt. Die Geometrie bestimmt die Eigenschaften des ihr angemessenen Zahlsystems (Körpers) selbst (z. B. gilt — im Gegensatz zum Satz von Desargues — der Satz von Pascal nicht immer, was zur Folge hat, dass dann im zugehörigen Körper das Kommutativgesetz a . b = b . a nicht gilt). Zu jeder projektiven Geometrie gehört ein Zahlsystem und umgekehrt: man ist wohl berechtigt, hier mit Hermann Weyl von einer «prästabilierten Harmonie zwischen Geometrie und Algebra» zu sprechen. Man sieht sich zur Auffassung der Griechen zurückgeführt, wonach ein Sachgebiet aus sich heraus einen ihm zukommenden Zahlbegriff bestimmt. Diese Auffassung hat lange Zeit einer wohl erklärlichen Vorrangstellung der (reellen) Zahlen weichen müssen, ist aber in den letzten Jahren in der Physik besonders eindrücklich wieder hervorgetreten. Es hat sich dort gezeigt, dass die reellen Zahlen wohl zur Wiedergabe des makroskopischen Geschehens und experimenteller Messungen, aber nicht zur Beschreibung der Systeme von Atomdimensionen geeignet sind; da treten andere Zahlsysteme an ihre Stelle, in denen vor allem das Kommutativgesetz a . b = b . a nicht gilt, und es lässt sich genau verfolgen, wie ihren algebraischen Eigenschaften gewisse physikalische (Ladung, Eigendrehimpuls usw.) entsprechen.

5. Man muss also feststellen, dass der als besonders einfach betrachtete Teil der Raumbeschreibung, die projektive Geometrie, uns genau auf die abstrakte Algebra zurückführt; und man fragt nach andern dem reinen Raumbegriff entspringenden Ideen, die man dem Algebraischen mit Recht als geometrisch gegenüberstellen darf. Dies besonders auch deshalb, weil man ja mit dem bisher Erwähnten vielen Eigenschaften von Raum und Zahl gewiss nicht gerecht worden ist. Das erhellt schon aus dem einfachen Beispiel der reellen Zahlen.

Wenn man diese, wie es der reine Algebraiker tut, nur addiert und multipliziert, so betrachtet man sie als isolierte Dinge, mit denen man gewissermassen nur sprunghaft umgeht; denn man behandelt sie ja nicht anders als die ganzen Zahlen oder endliche Gruppen. Man denkt nicht daran, dass sie gleichzeitig eine kontinuierliche, lückenlose Mannigfaltigkeit bilden — die Zahlgerade, den Maßstab —, in welcher man stetig von einer Zahl zur andern übergehen und jedes Intervall unbegrenzt beliebig fein unterteilen kann. Der algebraischen Auffassung, in welcher das Einzelwesen isoliert, ohne Rücksicht auf seine Nachbarschaft, betrachtet wird, steht eine andere gegenüber, die es auf Gedeih und Verderb mit seiner Umgebung verbindet und für die der stetige Zusammenhang des Ganzen ausschlaggebend ist: die topologische Auffassung.

In der Topologie oder Analysis situs, wie sie früher genannt wurde, untersucht man solche Eigenschaften geometrischer Gebilde, die eben auf ihrem stetigen Zusammenhang, aber nicht auf Grösse, Form, Länge beruhen; d. h. solche Eigenschaften, die sich nicht ändern bei stetigen Deformationen, bei allen Übergängen, welche nichts zerreissen, was zusammengehört, und nichts zum Zusammenfallen bringen, was getrennt ist. Man denke etwa an einen Kreis, und einen, der von Hand schlecht gezeichnet wurde: zwar hat man vieles zerstört (Symmetrie, Länge, Form), aber er ist eine einfach geschlossene Linie geblieben; das wäre nicht mehr der Fall, wenn man ihn einschnürt oder zerreisst. Bei dem am Anfang erwähnten EULER'schen Polyedersatz handelt es sich um etwas, das allen Flächen und Polyedern zukommt, die «von der Art der Kugel sind», d. h. sich in sie deformieren lassen; sie dürfen krumm sein, verschieden an Form und Grösse, immer ist die Zahl Ecken + Flächen — Kanten gleich 2. So wie man elementargeometrisch zwischen zwei kongruenten Figuren nicht zu unterscheiden braucht, so gibt es topologisch keinen Unterschied zwischen Kugel, Würfel, Eifläche usw., wohl aber zwischen Kugel und Ringfläche und Doppelringfläche (vgl. Abb. 3). Dass es nicht möglich ist, das

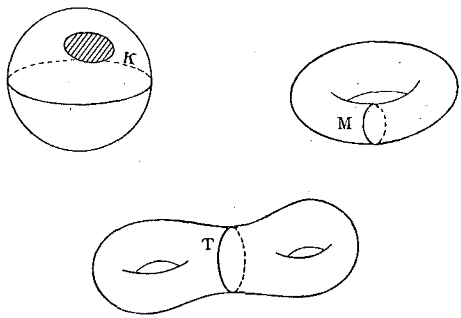

Abb. 3

eine stetig in das andere zu deformieren, ergibt sich schon aus der Betrachtung geschlossener Linien auf solchen Flächen; es gibt da verschiedene Möglichkeiten: Kurven, die sich auf einen Punkt zusammenziehen lassen, solche, die etwas beranden und solche, die es nicht tun (in Abb. 3 sind verschiedene Fälle eingezeichnet; ein Kreis K auf der Kugeloberfläche berandet — das Innere fällt heraus, wenn man längs des Kreises aufschneidet — und ist sogar zusammenziehbar; der «Taillenkreis» T, auf der Doppelringfläche berandet — etwa die linke Hälfte —, aber lässt sich nicht zusammenziehen; der «Meridiankreis» M auf der Ringfläche tut beides nicht.)

An den Unterschieden zwischen diesen Flächen äussern sich topologische Eigenschaften der Gestalt. Es gibt auch solche der Lage: Zwei verschlungene Ringe lassen sich nicht trennen, ohne dass man sie aufbricht; ein Knoten lässt sich durch topologische Deformation des Raumes nicht in einen Kreis überführen (Abb. 4). Es handelt sich jeweils um dasselbe Gebilde, das

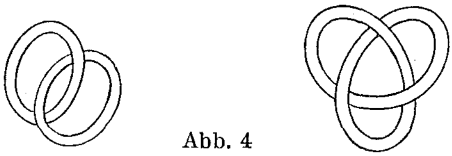

Abb. 4

aber auf verschiedene Arten im Raum liegen kann.

Ein topologischer Kern steckt in den verschiedensten mathematischen Theorien, und es ist oft sehr lohnend, ihn aus den Sätzen und Formeln herauszuschälen. So besonders in der Theorie der analytischen Funktionen, auf Grund von RIEMANN's Idee, die Gesamtheit der Funktionselemente einer analytischen Funktion als eine Fläche zu betrachten (vergleiche [3]; zwei wichtige Sätze handeln von Kurven auf dieser Fläche: der CAUCHY'sche Integralsatz, der aussagt, dass das Integral längs jeder geschlossenen Kurve = 0 ist, falls sie berandet, und der Monodromiesatz, der voraussetzt, dass die Kurve zusammenziehbar ist. Überhaupt sind die Grundgedanken der RIEMANN'schen Funktionentheorie, der Lehre von den algebraischen Funktionen und den Integralen auf RIEMANN'schen Flächen in hohem Masse topologischer Natur, und deshalb sind sie auch so übersichtlich und anschaulich.

6. Der allzu anschauliche Charakter solcher Betrachtungen ist manchmal geradezu gefährlich; man vergisst fast, dass etwas zu beweisen ist, und die Anschauung ist zwar sicher eine unerschöpfliche Quelle der Entdeckung, aber oft nur eine Fiktion oder eine Sache der Gewohnheit. Das hatte früher zur Folge, dass die Topologie als eine etwas ungenaue Disziplin angesehen und behandelt wurde, und ihre strenge Ausarbeitung ist auch wirklich erst sehr spät gekommen. Noch GAUSS sagte, dass man von ihr nicht viel mehr als nichts wisse. Es war wohl gerade die RIEMANN'sche Funktionentheorie, die zum erstenmal nicht nur den Anstoss zur Untersuchung der geschlossenen Flächen gab, sondern auch zeigte, dass topologische Gedanken sich durch ganze Theorien hindurchziehen. Die neuere strenge Begründung nahm ihren Ausgang von CANTOR (um 1880) und POINCARÉ (kurz vor 1900) und führte in den letzten Jahren zu einem ungeheuren Aufschwung dieses Kapitels der Geometrie. Es zeigte sich dabei immer mehr, dass es gar nicht so sehr die Beweise sind, welche Schwierigkeiten bieten, als vielmehr die richtige Wahl der Grundbegriffe — in unserer Sprechweise: das geeignete Schema.

Der Begriff, den man hier aus dem komplexen Ganzen herausgelöst hat, so wie es in der abstrakten Algebra mit den Rechenoperationen geschieht, ist derjenige der Nachbarschaft oder U m g e b u n g ; er verknüpft die einzelnen Punkte mit benachbarten, eine Beziehung, die nicht zerstört werden darf (das nennt man Stetigkeit). Auf den Geraden oder auf Kurven sind die Umgebungen kleine Bögen, also von vereinzelten Punkten begrenzt, auf Flächen sind es von Kurven begrenzte Stücke, und im Raum von Flächen begrenzte Raumstücke. Diesen Begriffen, so klar und präzise sie sich fassen lassen, haftet im Vergleich zu den algebraischen Vorgängen etwas Transzendentes, Unergründliches an, das mit den unbegrenzten Möglichkeiten der Verfeinerung und Unterteilung zusammenhängt (und mathematisch zu den Begriffen Konvergenz, Häufungspunkt usw. führt).

Beim Ausbau des Schemas geht man nun wiederum, ähnlich wie man in der Algebra einen abstrakten Standpunkt einnehmen kann, zur abstrakten Raumkonstruktion über. Als geometrische Figuren gelten dann nicht nur Gebilde des gewöhnlichen Raumes; man kann als «Punkte» irgendwelche Dinge nehmen, deren individuelle Natur gleichgültig ist, wenn sie nur durch Beziehungen der Nachbarschaft verknüpft sind und infolgedessen ein Kontinuum, eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, in der es stetige Übergänge und beliebig feine Unterschiede gibt. Der Begriff eines solchen Kontinuums darf wohl als eine der ursprünglichsten Ideen nicht nur der Geometrie, sondern auch aller Naturbeschreibung bezeichnet werden. Ihr steht das Algebraische gegenüber, in welcher es nur isolierte Dinge gibt, und zwischen ihnen nur sprunghafte Übergänge, die Rechenoperationen. Im Begriff der reellen Zahl ist beides vereinigt und erweist sich beides als unerlässlich.

7. So hat man die Dinge fein säuberlich getrennt und glaubt nun mit den zwei entgegengesetzten Prinzipien: T o p o l o g i e und A l g e b r a , Umgebung und Rechnen, transzendent und algebraisch, kontinuierlich und sprunghaft (oder «diskret») an die

Fragen herantreten zu können. Man möchte vielleicht schon darüber streiten, welchem der Vorrang zu geben sei, welches die «tieferen Gründe» an den Tag bringe, welches aufschlussreicher oder bequemer sei, und so fort.

Aber im gleichen Augenblick melden sich auch schon die Zusammenhänge. Sie sind verschiedener Art. Naheliegend, aber darum nicht weniger interessant sind diejenigen, die auf der gewöhnlichen analytischen Geometrie beruhen; da übersetzt man einfach Sätze des Raumes vermittelst der Koordination in solche der reellen Algebra — es handelt sich also hier um «konkrete» Topologie und Algebra I. Als Beispiel sei folgender Satz erwähnt, den schon POINCARÉ bewiesen hat: Wenn auf der ganzen Kugeloberfläche eine Strömung gegeben ist, also ein Feld von Richtungen, die sich von Punkt zu Punkt stetig ändern, so müssen immer Wirbel oder Quellen oder andere Ausnahmepunkte (Unstetigkeiten) entstehen (versucht man es etwa mit einer Strömung längs der Meridiane oder der Breitenkreise, so bilden die Pole solche Unstetigkeiten). Algebraisch kann man diesen Satz dahin aussprechen, dass gewisse Gleichungssysteme mit drei Unbekannten reelle Lösungen besitzen. Man kann aber nur den Satz, nicht etwa den Beweis übertragen, und es ist übrigens bisher gar kein rein algebraischer Beweis für ihn bekannt; so löst also die Topologie gewisse Probleme der reellen Algebra, die diese selbst noch nicht gelöst hat. — Ähnliches gilt für viele andere Sätze über Richtungsfelder und Strömungen, und ihre algebraischen Konsequenzen sind gar nicht oder nur teilweise wirklich algebraisch bewiesen worden.

8. Diese Anwendungen sind deswegen nicht so überraschend, weil sie die Vermittlung der reellen Zahlen benützen, in welchen eben beide Gesichtspunkte schon drinstecken. Es gibt aber auch Anwendungen der abstrakten Algebra auf die Topologie, und das ist überhaupt die wichtigste Methode zur Untersuchung topologischer Eigenschaften.

Denken wir etwa an die Kugel, die Ringfläche oder ähnliche Flächen. Wir können sie mit einem Netz von Dreiecken überspannen; diese Dreiecke sind zwar krummlinig begrenzt, können aber in geradlinige deformiert werden. Dieses Dreiecksnetz ist eine Art Gerüst für die Fläche und ersetzt sie in grober Weise. Wir können nun jedes Dreieck — das liegt im Wesen des Kontinuums — beliebig fein unterteilen, nach einer festen Vorschrift, und so jeden Punkt der Fläche beliebig genau einschliessen. Aber dieses Verfeinern, durch welches die Fläche immer genauer beschrieben wird, ist ja durch das ursprüngliche Netz schon vollständig festgelegt, d. h. die Eigenschaften der Fläche müssen schon in diesem Netz enthalten sein, in der Verknüpfung der Eckpunkte zu Dreiecken; man muss nur wissen, welche drei Punkte jeweils ein Dreieck bilden, und welche Dreiecke aneinanderstossen. Damit wird aber die Untersuchung zu einem Kombinieren von endlich vielen diskreten Dingen (den Eckpunkten), und man verwendet dabei mit Vorteil den Formalismus der abstrakten Algebra; diese kombinatorische oder algebraische Topologie (vgl. [2], [4]) ist geradezu ein Zweig der reinen Algebra, und vom Kontinuum ist darin nicht mehr die Rede. Dass es trotzdem möglich ist, damit geometrische Eigenschaften zu untersuchen, das beruht auf einer ebenso merkwürdigen wie wichtigen Tatsache, welche die Verbindung mit dem Kontinuierlichen herstellt: man kann im kombinatorischen Schema «topologische Invarianten» finden, d. h. algebraische Grössen, die nur von der topologischen Beschaffenheit des betreffenden geometrischen Gebildes, aber nicht von Grösse, Form usw., insbesondere nicht vom speziellen Eckpunktgerüst abhängen, an welchem man algebraische Topologie treibt. Z. B. ist die Zahl: Anzahl der Ecken —Anzahl der Kanten + Anzahl der Flächen bei einer Triangulation einer geschlossenen Fläche eine solche Grösse, sie ist für jede Triangulation einer Fläche und auch jeder anderen Fläche vom gleichen topologischen Typus gleich gross (was man ja etwa von der Anzahl der Ecken nicht behaupten kann); für die Kugel oder eine Fläche vom Typus der Kugel hat sie den Wert 2 — das ist der EULER'sche Polyedersatz — und für den Typus der Ringfläche den Wert 0.

Besonders die Theorie der Berandung, von der oben die Rede war, ist vollständig von der algebraischen Methode durchdrungen, während in der Theorie der Deformationen (Zusammenziehen einer Kurve u. a.) erst wichtige Ansätze dazu vorhanden sind. Alles, was ich bisher an Sätzen über Flächen — Berandung, Richtungsfelder usw. — oder über Kurven im Raum erwähnt habe, beweist man am besten mit dieser algebraischen Methode, und noch viel mehr; man kann direkt geometrische Eigenschaften «berechnen» aus der Zahl der Ecken, Kanten, Dreiecke usw. und aus ihrer Verknüpfung, und die Methode lässt sich nicht etwa nur auf Gebilde unseres Raumes oder seiner Verallgemeinerung auf mehr Dimensionen anwenden, sondern, nach den neuesten Untersuchungen, auch auf viel allgemeinere abstrakte Räume. Dagegen ist es bisher noch nicht gelungen, die geometrische Struktur vollständig durch die algebraische zu charakterisieren, d. h. zu ersetzen; es sind nur einzelne Eigenschaften eines geometrischen Gebildes, die man so bestimmen kann, und es bleibt in dieser Hinsicht noch manches Problem ungelöst.

9. So äussert sich in mannigfachen Anwendungen eine gewisse Verwandtschaft unserer beiden scheinbar wesensverschiedenen Schemata Algebra und Topologie. Besonders eindrücklich aber tritt sie zutage in ihrer S y n t h e s e : Man betrachtet Systeme, die gleichzeitig eine algebraische und eine topologische Struktur besitzen (d. h. Gesamtheiten von Elementen, mit denen man rechnen kann, und die gleichzeitig Punkte eines Umgebungsraumes bilden).

Das Beispiel, an dem ich versuchen möchte, die besondern Züge dieser Synthese anzudeuten, ist die Theorie der «kommutativen topologischen Gruppen», wie sie vor wenigen Jahren von PONTRJAGIN [5] entwickelt worden ist — nicht etwa, dass es das einzige Beispiel wäre, aber es ist besonders einfach und übersichtlich, und auch in mancher Hinsicht von grundlegendem Interesse. Ich darf wohl zuerst einige Gedanken und Resultate dieser Theorie in kurzen Worten skizzieren.

Der Kreis vereinigt topologische und algebraische Eigenschaften in sich. Er ist eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit, und gleichzeitig eine Gruppe; denn zu jedem Punkt gehört ein Winkel (von einem festgewählten Anfangspunkt aus gerechnet), und die Winkel kann man addieren, wobei die Summe stetig von den Summanden abhängt. Man spricht in diesem Falle von einer t o p o l o g i s c h e n G r u p p e (und zwar einer geschlossenen, im Gegensatz etwa zur Zahlgeraden, die offen ist; ein anderes Beispiel einer geschlossenen topologischen Gruppe ist die Ringfläche).

Wir nehmen nun einen zweiten Kreis zu Hilfe und ordnen jeden Winkel im ersten Kreis den doppelt so grossen Winkel im zweiten zu; wenn also ein Punkt den ersten Kreis einmal umläuft, so umläuft der zugeordnete Punkt den zweiten Kreis zweimal — so wie der Stundenzeiger sich zweimal herumdreht, während die Sonne ihren Kreis einmal durchläuft. Eine solche Zuordnung, die weder am stetigen Zusammenhang noch an der Gruppenoperation etwas zerstört, nennt man einen C h a r a k t e r der topologischen Gruppe.

Einen andern Charakter des Kreises erhält man, wenn man statt des doppelten den dreifachen Winkel nimmt (oder den vierfachen usw.), oder indem man jedem Winkel den negativen (gleich gross im andern Drehsinn) zuordnet, oder den doppelten, dreifachen negativen Winkel usw.; man kann auch den nullfachen Winkel nehmen, d. h. jedem Winkel den Winkel 0 zuordnen. Auf diese Weise erhält man a l l e Charaktere des Kreises; dass es keine anderen gibt, das hängt eng mit der Eigenschaft des Kreises zusammen, die ich am Anfang dieser Ausführungen als zweites Beispiel erwähnt habe.

Jeder Charakter des Kreises ist also durch eine ganze Zahl 0, ± 1, ± 2, ... gegeben; die Gesamtheit der Charaktere bildet also etwas Diskretes, nicht Kontinuierliches, das Musterbeispiel der reinen Algebra: die Gruppe der ganzen Zahlen.

Dieses Übertragungsprinzip, das ich hier im Falle des Kreises angedeutet habe, kann man auch bei jeder andern (kommutativen) topologischen Gruppe verwenden. Man ordnet ihre Punkte in ähnlicher Weise denjenigen eines Kreises zu und nennt diese Zuordnung einen Charakter der Gruppe; die Gesamtheit der Charaktere der topologischen Gruppe bildet dann etwas rein Algebraisches, eine Gruppe, die aus abzählbar vielen isolierten Elementen besteht, also diskret ist. So gehört zu jeder geschlossenen topologischen Gruppe eine ganz bestimmte d i s k r e t e Gruppe, ihre C h a r a k t e r e n g r u p p e.

Das Hauptergebnis der Theorie besagt nun, dass die kontinuierliche und die diskrete Gruppe, die so zusammengehören, einander vollständig bestimmen. In den algebraischen Eigenschaften der diskreten Gruppe sind alle topologischen Eigenschaften der kontinuierlichen enthalten, und umgekehrt. Z. B. ist der sogenannte Rang der diskreten Gruppe gleich der Dimension der kontinuierlichen (gibt also an, ob sie eine Linie oder eine Fläche usw. ist); das Auftreten von Elementen endlicher Ordnung (die mehrmals addiert 0 ergeben) in der diskreten Gruppe bedeutet, dass das topologische Gebilde aus mehreren getrennten Stücken besteht; bis in speziellste Umgebungseigenschaften lassen sich solche Zusammenhänge verfolgen.

So werden in diesem Falle die beiden Grundbegriffe — Rechnen und Raum — in eleganter Weise ineinander übergeführt und erweisen sich gewissermassen als identisch, nur in verschiedenen Sprachen formuliert.

Lässt sich etwas Ähnliches aussagen, wenn man statt geschlossenen offene topologische Gruppen, wie z. B. die Zahlengerade, betrachtet? Hier liegen die Dinge anders. Wohl bilden auch hier die Charaktere eine Gruppe, aber sie ist selbst etwas Kontinuierliches, nämlich wieder eine offene topologische Gruppe. Zwar ist es auch hier so, dass diese die ursprüngliche vollständig bestimmt, und dass topologische in algebraische Eigenschaften übergehen; aber man kann dies jetzt nicht in derselben reinen Form erfassen wie vorher, denn gleichzeitig gehen algebraische in topologische über! Es verhält sich etwa so wie in einem allzu symmetrisch angelegten Park: man hat Mühe zu sagen, in welchem Teil man sich eigentlich gerade befindet.

10. Dies alles findet den dem Mathematiker und Naturwissenschafter wohlbekannten Ausdruck in der harmonischen Analyse. Dort betrachtet man — wenn wir wieder beim einfachsten Beispiel einer topologischen Gruppe, dem Kreis, bleiben — Funktionen auf dem Kreis, d. h. des Winkels, also periodische Funktionen oder Schwingungen, und löst sie auf in harmonische Schwingungen (Grundton und Obertöne, das sind besonders einfache Funktionen des Winkels, des doppelten, dreifachen Winkels usw.; es sind nichts anderes als die Charaktere). Die Zahlen, welche angeben, wie stark die einzelnen harmonischen Schwingungen vertreten sind, die «Fourierkoeffizienten», ersetzen bekanntlich die Funktion vollständig; man ersetzt etwas Kontinuierliches, die Funktion, durch eine diskrete Reihe von Zahlen. Dagegen muss man bei gewöhnlichen, unperiodischen Funktionen — d. h. Funktionen auf der Zahlgeraden — ein kontinuierliches Spektrum von Frequenzen nehmen, wenn man sie in harmonische Schwingungen auflösen will, und sie bleibt etwas Kontinuierliches (statt der Fourierreihe hat man das Fourierintegral). Ähnlich ist es bei allen (kommutativen) topologischen Gruppen; sie bilden, zusammen mit ihren Charakterengruppen, das eigentliche Substrat der harmonischen Analyse [6]. Man beachte dabei, wie wenig eigentlich in diesem Begriff der topologischen Gruppe steckt; er resultiert aus der Vereinigung der beiden strukturbildenden Operationen, die wir aus der Fülle der Möglichkeiten ausgelesen haben: der algebraischen (Addition) und der topologischen (Umgebungsbegriff; man muss dazu nur noch das Prinzip hinzunehmen, dass jede unendliche Menge von Punkten einer Umgebung eine Häufungsstelle besitzt).

Überhaupt ergibt — man stosse sich nicht am paradoxen Klang der Worte — diese Synthese vollständig das, was man Analysis nennt. Denn wenn man von den geschlossenen topologischen Gruppen absieht, so bleiben für die offenen im wesentlichen nur die Vektorräume übrig, also die gewöhnliche analytische Geometrie. Und wenn man zur Addition in der Gruppe noch die Multiplikation hinzunimmt (Körper), so gibt es als einzige Möglichkeiten solcher topologischer Körper die «gewöhnlichen» Zahlen der Analysis, d. h. die reellen Zahlen, die komplexen Zahlen und die Quaternionen; das ist ein interessanter Satz von PONTRJAGIN [5], der neues Licht auf wichtige Fragen der Axiomatik wirft.

11. Die Gegenüberstellung von Topologie und abstrakter Algebra hat uns zu bemerkenswerten Ergebnissen geführt und eigenartige Beziehungen zwischen den beiden aufgedeckt. Verschiedenen anschaulichen und formalen Bedürfnissen entspringend, erfüllen die beiden Denkweisen verschiedene Funktionen und sind der Ausdruck zweier verschiedener Wege des Verstehens und der

Anschauung; sie ergänzen und unterstützen einander dabei aufs schönste. Aber die Verschiedenheit der beiden ist nur scheinbar; ihre Synthese ergibt nicht nur ein geschlossenes Ganzes, sondern lässt sie gewissermassen ineinander aufgehen. In der Vereinigung ist es eigentlich nur eine Frage des Standpunktes, ob man eine Eigenschaft der einen oder der andern Seite zuschreibt; ein vom Ganzen aus gesehen künstlicher Eingriff lässt zufällig die eine besser hervortreten als die andere.

Man muss hier unwillkürlich an eine ähnliche Erscheinung in der Physik denken: Licht, und auch Materie, zeigt manchmal die Natur von Wellen, manchmal von Korpuskeln (Teilchen); der modernen Quantentheorie ist es gelungen, eine Formulierung zu finden, welche beide Erscheinungsformen vereinigt, besser gesagt, welche über beiden steht (dafür allerdings auf Anschaulichkeit verzichtet); dass man einmal das eine, einmal das andere Verhalten beobachtet, das wird nur durch das Experiment veranlasst, also einen künstlichen Eingriff, welcher einmal die Wellen-, einmal die Korpuskelnatur bevorzugt und in Erscheinung treten lässt. Die Analogie mit unserem Dualismus Raum — Zahl ist bestechend; vielleicht ist es mehr als nur eine Analogie.

Es wäre leicht, an Beispielen des täglichen Lebens auf ähnliche Fälle hinzuweisen, wo man je nach dem Standpunkt einer Sache zwei ganz verschiedene Seiten abgewinnen kann — aber dann geht es meistens nicht so friedlich aus wie in der Mathematik.

Dass Raum und Zahl in ihren elementarsten Eigenschaften so eng miteinander verknüpft sind, wie ich es zu schildern versucht habe, ist gewiss überraschend. Es gibt in der Mathematik und den Naturwissenschaften noch viele andere Beispiele dieser Art, wo zwei scheinbar verschiedene Dinge sich ganz unerwartet als gleichwertig, miteinander vertauschbar, erweisen, und das scheint kein Zufall zu sein. Vielleicht darf ich es so formulieren: Um an unsere Umwelt heranzutreten, konstruieren wir verschiedene Bilder, Schemata — verschiedenen Ursprungs, mit verschiedenen Mitteln und zu verschiedenen Zwecken —, und wenn sie trotzdem gleich oder gleichwertig herauskommen, so ist offenbar der Konstrukteur daran schuld, der gleiche mathematische Geist, der bei allen tätig war; und auf ihn kommt es mehr an als auf das spezielle Beispiel, an dem er sich übt. Die Beziehungen haben allgemeinere Gültigkeit als die Gegenstände, an denen sie sich äussern.

Gewiss sind und bleiben immer die einzelnen, speziellen, konkreten Probleme das eigentliche Arbeitsgebiet des Mathematikers, und er wird ihrer Bezwingung seine ganze Kraft widmen. Aber er strebt danach, sie mit möglichst wenig blinder Rechnung und möglichst viel sehenden Gedanken zu lösen. Und wenn er dabei das Allgemeine sucht und die grösste Abstraktion nicht scheut, so entfernt er sich deswegen nicht von der Wirklichkeit, sondern findet immer wieder Beziehungen und Gesetzmässigkeiten, die allen unsern Arten zu denken und die Welt zu sehen gemeinsam sind, und denen wir offenbar nicht entrinnen können.

Literaturverzeichnis

Unsere Ausführungen sind, dem Charakter des Vortrages entsprechend, allgemein gehalten, auch was die Formulierung von Sätzen und Resultaten betrifft; wegen der genauen Formulierung und Begründung, sowie der Ausführung der Einzelheiten, verweisen wir auf die folgenden Werke:

[1] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie (Leipzig und Berlin 1913).

[2] H. Seifert und W. Threlfall: Lehrbuch der Topologie (Leipzig und Berlin 1935).

[3] H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig und Berlin 1913).

[4] P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie I (Berlin 1935), bes. 2. Teil.

[5] L. Pontrjagin, Topological groups (Princeton 1939), Kap. V.

[6] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications (Paris 1940), Kap. VI.