Über Integralmittelwerte bei geschlossenen sternförmigen Kurven.

Von

H. HADWIGER (Bern).

(Als Manuskript eingegangen am 9. Januar 1942.)

Eine geschlossene, doppelpunktlose Kurve C heisst in bezug auf einen umschlossenen Punkt P «sternförmig», wenn C von jedem von P ausgehenden Halbstrahl in genau einem Punkt geschnitten wird. Die Möglichkeit, dass der Halbstrahl die Kurve berührt, werde für das Folgende ausdrücklich ausgeschlossen.

Wenn wir voraussetzen, dass die Kurve C «glatt» ist, d. h. in jedem Punkt eine stetig sich verändernde Tangente besitzt, so wird, falls θ den nicht stumpfen Zwischenwinkel von Halbstrahl und Tangente im zugeordneten Punkt bezeichnet, stets

$$0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

gelten.

Es sollen nun $R(\varphi)$ und φ, $0 \leqq \varphi < 2\pi$, die Polarkoordinaten für die Punkte einer in bezug auf den Ursprung sternförmigen, glatten Kurve C bedeuten. Offenbar werden

$$R = R(\varphi) \text{ und } \theta = \theta(\varphi)$$

eindeutige und stetige Funktionen von φ sein, und zwar wird es zwei positive Werte r und δ geben, so dass für alle φ

$$0 < r \leqq R(\varphi) < \infty, \ 0 < \delta \leqq \theta(\delta) \leqq \frac{\pi}{2}$$

ausfällt. Somit existieren für alle positiven und negativen α die Integralmittelwerte

(1) $$R_\alpha = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^\alpha \, d\varphi \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

und

(2) $$S_\alpha = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sin\theta} \right)^\alpha d\varphi \right\}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Ergänzen wir die Definitionen (1) und (2) noch durch

(3) $$R_0 = e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log R \, d\varphi}$$

und

(4) $$S_o = e^{-\frac{1}{2\pi}\int\limits_o^{2\pi} \log \sin \theta \, d\varphi},$$

so sind die Mittelwerte R_α und S_α für alle α erklärt.

Nach einem bekannten Theorem [1]) sind R_α und S_α im Intervall $-\infty < \alpha < \infty$ stetige und nicht abnehmende Funktionen von α.

Ausgezeichnete Bedeutung haben:

1. Die arithmetischen Mittel R_1 und S_1
2. die geometrischen Mittel R_o und S_o
3. die harmonischen Mittel R_{-1} und S_{-1}
4. die Maximalwerte R_∞ und S_∞
5. die Minimalwerte $R_{-\infty}$ und $S_{-\infty}$.

Die Monotonierelationen

(5) $$R_\alpha \leqq R_\beta \qquad (\alpha < \beta)$$

(6) $$S_\alpha \leqq S_\beta \qquad (\alpha < \beta)$$

lassen sich als Erweiterungen der bekannten Ungleichungen, die zwischen den obengenannten gewöhnlichen Mittelwerten bestehen, auf die sinngemäss verallgemeinerten Mittelwerte mit kontinuierlichem Parameter interpretieren.

Es soll nun L die Gesamtlänge der Sternkurve C bezeichnen und F den Flächeninhalt des von C umrandeten Gebietes.

In der vorliegenden Note werden einige Relationen abgeleitet, die zwischen den Integralmittelwerten R_α und S_α einerseits, und den der Sternkurve zugeordneten elementaren Werten L und F anderseits bestehen.

Der gegenüber Ähnlichkeitsabbildungen invariante Mittelwert S_α stellt offensichtlich ein Mass für die Abweichung der Sternkurve von der Kreisform und für die Exzentrizität des Ursprungs dar; es gilt

(7) $$1 \leqq S_\alpha,$$

wo das Gleichheitszeichen nur dann gelten kann, wenn C eine Kreislinie ist, und der Ursprung mit dem Kreismittelpunkt zusammenfällt. Es ist verständlich, dass die R_α in Verbindung mit den S_α zu solchen Grössen in Beziehung treten, die wie etwa das isoperimetrische Defizit geeignet sind, eine Extremaleigenschaft des Kreises zu charakterisieren.

Den Ausgangspunkt für die Herleitung derartiger Formeln bilden die Darstellungen von Flächeninhalt F und Randlänge L durch die Funktionen R und $\sin\theta$, auf welche sich die Mittelwertsbildungen (1) bis (4) beziehen. Es gilt

(8) $$F = \frac{1}{2}\int\limits_o^{2\pi} R^2 \, d\varphi$$

[1]) Vgl. etwa: G. PÓLYA und G. SZEGÖ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis Bd. I, S. 55, Nr. 83.

und

$$L = \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sin\theta}\, d\varphi \,. \tag{9}$$

Sodann wird von der HÖLDER'schen Ungleichung[2])

$$\int P(\varphi)\, Q(\varphi)\, d\varphi \leqq \left\{\int [P(\varphi)]^{\alpha} d\varphi\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \left\{\int [Q(\varphi)]^{\beta} d\varphi\right\}^{\frac{1}{\beta}} \tag{10}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\,,\ \alpha > 1\right)$$

bzw.

$$\int P(\varphi)\, Q(\varphi)\, d\varphi \geqq \left\{\int [P(\varphi)]^{\alpha} d\varphi\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \left\{\int [Q(\varphi)]^{\beta} d\varphi\right\}^{\frac{1}{\beta}} \tag{11}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\,,\ 0 < \alpha < 1 \text{ oder } \alpha < 0\right)$$

wesentlich Gebrauch gemacht werden.

Die Funktionen P und Q in den Ungleichungen (10) und (11) sind im Integrationsintervall nicht negativ, und die Existenz der angeschriebenen Integrale ist vorausgesetzt.

Wir ziehen zunächst einige Folgerungen:

Aus (8) ergibt sich

$$R_2 = \sqrt{\frac{F}{\pi}}\,, \tag{12}$$

und im Hinblick auf die Monotonie (5)

$$R_\alpha \leqq \sqrt{\frac{F}{\pi}} \qquad (-\infty < \alpha \leqq 2)\,. \tag{13}$$

Besonders sei der Spezialfall $\alpha = -1$ erwähnt, wobei sich die Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R} \geqq \sqrt{\frac{4\pi^3}{F}}\,, \tag{14}$$

oder mit Rücksicht auf die Isoperimetrie schwächer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R} \geqq \frac{4\pi^2}{L} \tag{15}$$

ergibt.[3])

---

[2]) Vgl. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA, Inequalities. Cambridge 1934, S. 140, Theorem Nr. 189.

[3]) Das Integral tritt z. B. bei der Berechnung der magnetischen Feldstärke im Innern eines stromumflossenen Leiters auf. Die Ungleichung (14) findet sich auch in dem in Fussnote [2]) erwähnten Buch, S. 163, Nr. 218. Veranlassung zu dieser kleinen Studie gab übrigens eine Fragestellung, die sich in einer Ergänzungsvorlesung zur Experimentalphysik in Bern ergab. Es handelte sich darum, die Gestalt eines einfach geschlossenen Stromleiters fester

Wie man direkt verifizieren kann, gilt übrigens für das linksstehende Integral die definite Darstellung:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R} = \frac{4\pi^2}{L}\left[S_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{\frac{R_1}{R_2 \sin\theta_1}} - \sqrt{\frac{R_2}{R_1 \sin\theta_2}}\right)^2 d\varphi_1\, d\varphi_2\right]. \tag{16}$$

Wir stellen ihr noch die ähnliche Formel zur Seite:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R^2} = \frac{2\pi^2}{F}\left[1 + \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1}\right)^2 d\varphi_1\, d\varphi_2\right]. \tag{17}$$

Setzen wir in der Hölder'schen Ungleichung (10) bzw. (11)

$$P(\varphi) = R,\; Q(\varphi) = \frac{1}{\sin\theta},\; \alpha = \lambda,\; \beta = \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

so ergeben sich die Relationen

$$R_\lambda S_{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \leqq \frac{L}{2\pi} \quad (\lambda < 1) \tag{18}$$

bzw.

$$R_\lambda S_{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \geqq \frac{L}{2\pi} \quad (\lambda > 1). \tag{19}$$

Wird analog

$$P(\varphi) = R,\; Q(\varphi) = R,\; \alpha = \lambda,\; \beta = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

gesetzt, so erhält man

$$R_\lambda R_{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \leqq \frac{F}{\pi} \quad (\lambda < 1) \tag{20}$$

bzw.

$$R_\lambda R_{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \geqq \frac{F}{\pi} \quad (\lambda > 1). \tag{21}$$

Speziell gewinnt man

$$2\pi R_0 S_0 \leqq L, \tag{22}$$

$$2\pi R_2 S_2 \geqq L, \tag{23}$$

$$\pi R_0^2 \leqq F, \tag{24}$$

$$\pi R_2^2 \geqq F. \tag{25}$$

[Vgl. aber (12)]

Aus (12), (23) und (25) folgt z. B. für das isoperimetrische Defizit die Abschätzung

$$L^2 - 4\pi F \leqq 4\pi^2 R_2^2 (S_2 - 1)(S_2 + 1). \tag{26}$$

Länge so auszuwählen, dass die Feldstärke in einem vorgegebenen Punkt den minimalen Betrag aufweist.

Herr W. Scherrer in Bern machte mich darauf aufmerksam, dass die Lösung des Problems nach den Methoden der Variationsrechnung weit umständlicher ist, als die, welche hier dargetan wurde.

Durch Grenzübergang $\lambda \longrightarrow 1-0$ bzw. $\lambda \longrightarrow 1+0$ ergeben sich aus (18) und (20) bzw. (19) und (21) die Beziehungen

$$2\pi R_1 S_{-\infty} \leqq L\,, \tag{27}$$

$$2\pi R_1 S_{\infty} \geqq L\,, \tag{28}$$

$$\pi R_1 R_{-\infty} \leqq F\,, \tag{29}$$

$$\pi R_1 R_{\infty} \geqq F\,. \tag{30}$$

Es ist klar, dass die Relationen (18) bis (30) in ähnlicher Weise weiter verwendet werden können. Die erzielbaren Ergebnisse sind aber als Resultate naheliegender Umrechnungen ohne besonderes Interesse. Erwähnt soll nur noch werden, dass bei solchen Rechnungen die beiden Identitäten

$$\left(\frac{R_{2\alpha}}{R_{-2\alpha}}\right)^{2\alpha} = 1+\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\alpha}-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\alpha}\right]^2 d\varphi_1\, d\varphi_2 \tag{31}$$

und

$$\left(\frac{S_{2\alpha}}{S_{-2\alpha}}\right)^{2\alpha} = 1+\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\right)^{\alpha}-\left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\right)^{\alpha}\right]^2 d\varphi_1\, d\varphi_2\,, \tag{32}$$

die sich direkt verifizieren lassen, eine nützliche Rolle spielen können. So ergibt sich z. B. die Darstellung (17) als Spezialfall von (31).