Mehrfache Kreuzhaube.

Von

K. MERZ † (Chur).

(Mit 9 Abbildungen im Text.)

(Als Manuskript eingegangen am 18. Dezember 1941.)

Eine sechsfache Kreuzhaube[1]) ist in Abb. 1_0 dargestellt. Über einem Zwölfeck besitzt sie 6 Zellen mit gemeinsamer Spitze, abwechselnd mit 6 Lücken, die zusammen über einem Prisma angeordnet sind. Die 12 Prismenflächen schliessen sich abwechselnd an die 6 Seitenflächen der Zellen und an die 6 Zwischenflächen in den Lücken an. Diese 6 Lücken werden von den Diagonal- oder Schnittflächen eingeschlossen, wie ASA_1, die alle durch die 6fache Strecke OS gehen und durch diese in Halbflächen geteilt werden wie AOS und A_1OS. Samt der Grundfläche des Prismas hat diese Kreuzhaube an Flächen $f=31$, Ecken $e=26$ und Kanten $k=60$, so dass die Charakteristik ist $c=e-k+f=-3$ und die Zusammenhangszahl $h=6$. Die vielfache Strecke wird nicht mitgezählt, aber ihre Endpunkte zählen.

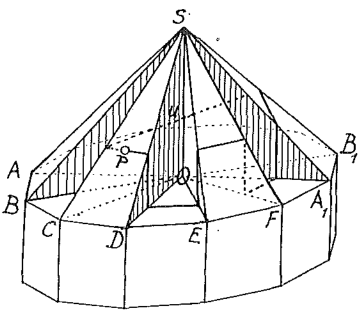

Abb. 1_0

Von dieser 6fachen Kreuzhaube folgen hier acht verschiedene Netze, aus denen durch Aufklappung sich verschiedene Anordnungen der Wendestrecken, in denen Oberseite o und Unterseite u des Netzes in Möbiusbändern zusammenstossen, auf der entstehenden einseitigen Fläche ergeben. Die Netze sind so angeordnet, dass die 6fache Strecke als Wendestrecke fortwährend in der Mehrfachheit abnimmt. Die zuerst 6fache Wendestrecke wird zu einer 5fachen usw. bis herunter zur einfachen Wendestrecke, und schliesslich fehlt sie überhaupt unter den Wendestrecken, wenn diese dann nur aus Kanten bestehen. Diese Abnahme der vielfachen Strecke in der Mehrfachheit als Wendestrecke wird erreicht durch fortgesetzte gleichmässige Änderung in der Anordnung der Flächen der

[1]) Verhandlungen der Schweizer. Naturforschenden Gesellschaft Locarno, 1940, S. 51 Vielfache Kreuzhauben.

Netze. In den Netzen sind nur gezeichnet die Dreiecke der Seitenflächen, der Zwischenflächen und der Halbflächen. Die Seitenflächen des Prismas sind weggelassen, sie können als ein Streifen von 12 Rechtecken an einer Basis, die nicht Wendestrecke ist, eines gleichschenkligen Dreiecks angesetzt werden, wie dies in Abb. 8 beim untern B angedeutet ist. Damit zeigt dann der Prismenmantel in allen acht Fällen nach aussen die Oberseite o des Netzes, während am entstehenden Modell der Kreuzhaube die übrigen Flächen noch als Dreiecke auch solche enthalten, welche die Unterseite u zeigen, durch Schraffur von o unterschieden. Die Wendestrecken, die o und u voneinander trennen, verlaufen damit alle im obern Teil der Kreuzhaube und am obern Zwölfeck des Prismas.

1. Die sechsfache Wendestrecke entsteht durch Aufklappung aus dem Netz in Abb. 1_{I}. Um die punktierten Kanten werden die rechtwinkligen Dreiecke als die 12 Hauptflächen aufgeklappt, bis die Seiten 1 bis 6 alle zusammenfallen zur 6fachen Strecke OS, nach welcher alle Flächen einzuschieben sind nach Abb. 1_{II}. Die zuerst innen im Netz liegenden

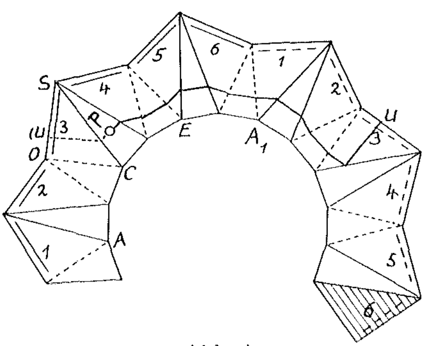

Abb. 1_{I}

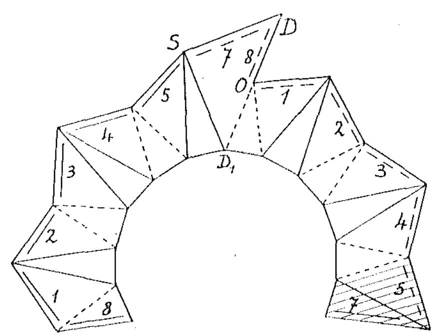

Abb. 2

Seiten A bis C... biegen sich dabei nach aussen zum Umfang der Kreuzhaube. Jedes Halbdreieck wie AOS stellt sich gewendet o gegen u zum gegenüberliegenden A_1OS, so dass OS in 6 Fällen Wendestrecke wird in allen den Schnittflächen wie ASA_1. Der Wendestreckenzug $OSOSOSO$ aus 6 Strecken fällt in die vielfache Strecke OS zusammen. Von aussen zeigt die Kreuzhaube ganz die eine Seite o des Netzes, von innen überall u, wie eine zweiseitige Fläche. Das Wendungsverhältnis ist Null. Im Netz Abb. 1_{I} ist ein Weg eingezeichnet in o von P nach U und in u von (U) nach (P) unter P. Daraus entsteht nach der Aufklappung, wobei U und (U) zusammenfallen, in Abb. 1_0 der Weg auf der einseitigen Fläche von P über U nach dem Gegenpunkt (P), der durch 12 Flächen geht. Ein anderer Weg ginge von P zur anstossenden Prismenfläche und über den Prismenmantel zur gegenüberliegenden Prismenfläche und hinauf über die anstossende Seitenfläche.

2. Die fünffache Wendestrecke entsteht aus dem Netz Abb. 2, das aus Abb. 1_{I} erhalten wird, indem darin die Wendestrecke 6 zum

Verschwinden gebracht wird. Das schraffierte Dreieck mit 6... wird weggenommen und gewendet an 6– angesetzt, womit also in dem Netz Abb. 2 das Schnittdreieck SDD_1 ganz gelassen wird, so dass noch 5 Schnittflächen in ihre 10 Halbflächen geteilt bleiben. Damit fallen bei der Aufklappung 1 bis 5 in die 5fache Wendestrecke OS und statt 6 entstehen die beiden neuen Wendestrecken 7 und 8, welche mit OS das Dreieck OSD bilden, welches die Unterseite u des Netzes nach aussen zeigt unter allen übrigen Flächen mit o. Nur eine Halbfläche erscheint damit gewendet, was das Wendungsverhältnis 1 : 60 ergibt, bei Weglassung der Grundfläche des Prismas, als an einer offenen Kreuzhaube mit 24 ganzen Flächen und 12 Halbflächen. Der Wendestreckenzug ist $SDOSOSOS$, von dem aus u links liegt, aussen gesehen.

3. Die vierfache Wendestrecke entsteht durch Aufklappung aus dem Netz Abb. 3. Im vorigen Netz ist die Wendestrecke 5 zum Verschwinden zu bringen, wozu auch das Dreieck mit 7 gewendet anzusetzen

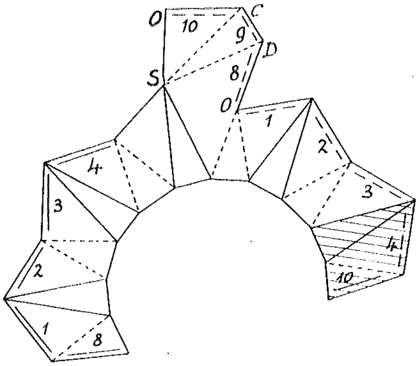

Abb. 3

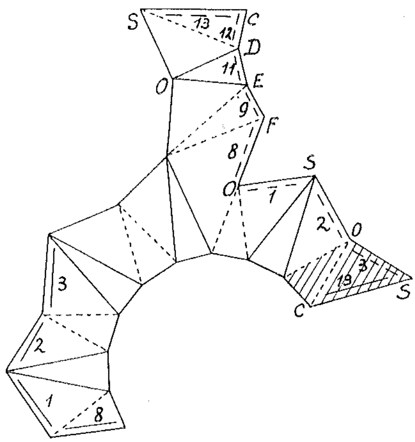

Abb. 4

ist an SD. Statt 5 und 7 entstehen die neuen Wendestrecken 9 und 10, welche mit 8 und 1 die Dreiecke CDS, COS und DOS als gewendet einschliessen mit dem Wendungsverhältnis 2 : 60. Der Wendestreckenzug ist $OCDOSOSO$, von dem aus u links liegt. Das eingeschlossene Gebiet hat eine Symmetrieebene, so dass die eine Aufklappung und die ihr entgegengesetzte die nämliche Kreuzhaube ergeben auch nach Anordnung der gewendeten Flächen. Die Wendestrecke 9 schliesst an einer Kante des Prismas, die in Abb. 3 weggelassen ist, so dass 9 nur einmal vorkommt, während die übrigen Wendestrecken je an den zwei Seiten angegeben sind, die nach der Aufklappung gewendet zusammenfallen. Dabei bedeutet 10... die auf der Unterseite liegende Strecke CO, die an 10– auf der Oberseite anzustossen kommt.

4. Die dreifache Wendestrecke, gebildet aus 1, 2, 3, ergibt sich aus dem Netz Abb. 4, das erhalten wird durch Wegnahme der drei Drei-

ecke, die in Abb. 3 unten rechts schraffiert sind und die nach Wendung angesetzt werden oben an 10. Dabei verschwinden 4 und 10, und es entstehen die neuen Wendestrecken 11, 12, 13. Damit entsteht der Wendestreckenzug *SDEFOSOS*, der als gewendete Flächen einschliesst: zwei Seitenflächen, eine Zwischenfläche und drei Halbflächen. Das Wendungsverhältnis wird 9 : 60. Man hätte auch nur die zwei Dreiecke mit 10 und 4 Abb. 3 wenden können, wodurch 12 nicht entstanden wäre und *SD* statt 13.

5. Die zweifache Wendestrecke aus 1 und 2 entsteht durch Aufklappung aus dem Netz Abb. 5. Dieses Netz wird erhalten aus Abb. 4, indem 3 mit Hilfe von 13 aufgehoben wird, so dass 14 und 15 in Abb. 5 entstehen. Der Wendestreckenzug wird damit *OBCDEFOSO* und umschliesst

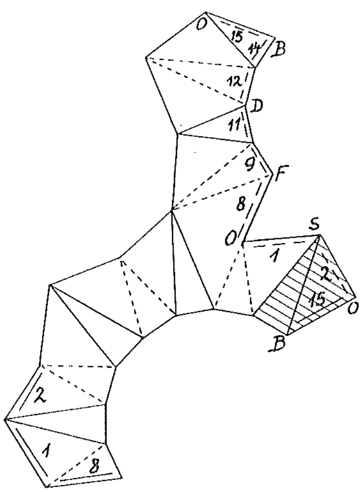

Abb. 5

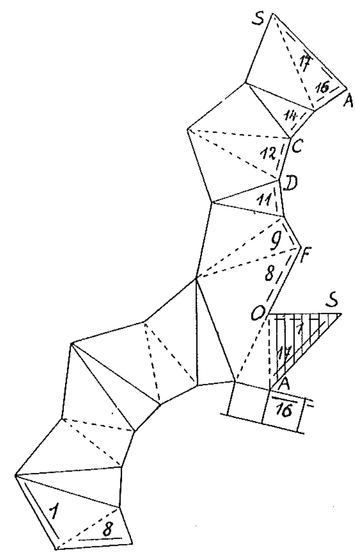

Abb. 6

zwei Zwischenflächen, zwei Seitenflächen und vier Halbflächen mit dem Wendungsverhältnis 12 : 60. Dieses Gebiet ist unsymmetrisch, so dass die zwei entgegengesetzten Aufklappungen zwei verschiedene Kreuzhauben ergeben, die zueinander symmetrisch sind, den gewendeten Flächen nach.

6. Als einfache Wendestrecke 1 tritt die vielfache Strecke auf an der Kreuzhaube, entstanden durch Aufklappung des Netzes Abb. 6, das aus Abb. 5 erhalten wird, durch Wegnahme der beiden Dreiecke an *B* unten und Wendung nach 15 oben. Damit werden 2 und 15 aufgehoben, und es entstehen Abb. 6 die neuen Wendestrecken 16 und 17. Bei *A* unten schliesst 16 an eine Prismenfläche, wie dies auch für 14 bis 9 eintritt. Der damit entstehende Wendestreckenzug *SABCDEFOS* umschliesst drei Seitenflächen, zwei Zwischenflächen und fünf Halbflächen mit dem Wendungsverhältnis 15 : 60.

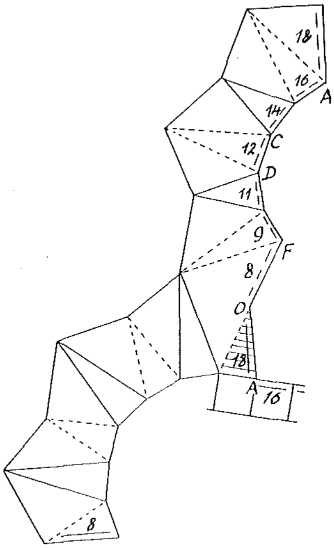

Abb. 7

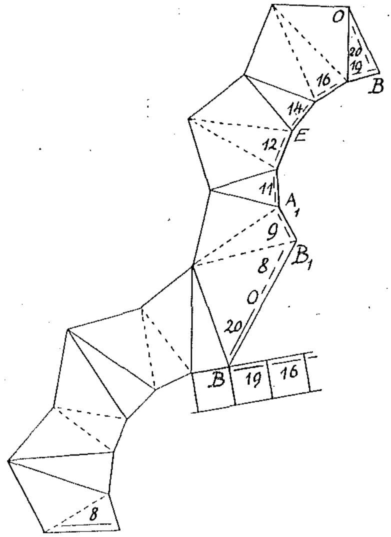

Abb. 8

7. Sieben Kanten als Wendestrecken entstehen aus dem Netz Abb. 7. Es entsteht aus Abb. 6 durch Ansetzung des Dreiecks mit 1 und 17 gewendet an 17 oben, so dass 18 entsteht in Abb. 7. Der Wendestreckenzug *OABCDEFO* in Abb. 1_0 schliesst ein: drei Seitenflächen, zwei Zwischenflächen und sechs Halbflächen, die zusammen eine symmetrische Anordnung bilden von gewendeten Flächen. Das Wendungsverhältnis ist 16 : 60. Fünf Wendestrecken 16 bis 9 liegen auf Kanten oben am Prisma.

8. Acht Kanten als Wendestrecken entstehen durch Aufklappung des Netzes Abb. 8, das durch Wendung des Dreiecks bei *O* mit 18 in Abb. 7 nach 19 und 20 in Abb. 8 erhalten wird. Dieses Netz hat eine symmetrische Anordnung seiner Flächen, abgesehen vom Prismenmantel. Aber die Aufklappung ergibt an der Kreuzhaube eine unsymmetrische Anordnung der gewendeten Flächen innert des Wendestreckenzuges $OBCDEFA_1B_1O$ Abb. 1_0. Gewendet erscheinen 3 Seitenflächen, 3 Zwischenflächen und 6 Halbflächen zum Wendungsverhältnis 15 : 60. Um noch grössere Wendungsverhältnisse zu erhalten, müssten noch Prismenflächen gewendet werden. Dies könnte hier mit 6 Prismenflächen geschehen, so dass 27 : 60 erzielt würde. Der grösste Betrag wäre 1 : 2.

Verallgemeinerung. Für eine gerade Zahl n entstehen $n$fache Kreuzhauben der beschriebenen Art, die über einem $2n$Eck n Zellen besitzen neben n Lücken. Je zwei gegenüberliegende Zellen sind zueinander in Scheitellage an der $n$fachen Strecke. Die gewöhnliche Kreuzhaube ist damit als zweifach zu bezeichnen mit ihrer Doppelstrecke. Wenn n ungerade ist, so entstehen über dem $2n$Eck zweiseitige Kreuzhauben, an denen jede Zelle in Scheitellage ist zur gegenüberliegenden Lücke[1]). Die $n$fache Kreuzhaube hat, geschlossen über einem $2n$Eck als Grundfläche des Prismas, an Flächen $f = 5n + 1$, Ecken $e = 4n + 2$, Kanten $\mathrm{k} = 10n$ und damit die Charakteristik $c = 3 - n$ und die Zusammenhangszahl $h = n$. Nach Abb. 1_1 lässt sich das Netz herstellen, so dass für n gerade durch Aufklappung die Kreuzhaube über dem $2n$Eck entsteht mit der $n$fachen Strecke als $n$fache Wendestrecke. Wird ein Schnittdreieck als ganz genommen Abb. 2, so lassen sich daran die Netze anfügen, mit der Reihe der Mehrfachheit der vielfachen Strecke als Wendestrecke, sowie auch für die übrigen Fälle mit nur einfachen Wendestrecken, entsprechend wie das ausgeführte Beispiel für $n = 6$. Damit ist ein allgemeines Verfahren angegeben zur Herstellung dieser Netze, wie sie sonst durch Versuche auch einzeln gefunden werden können, für Kreuzhauben, deren $n$fache Strecke zugleich $k$fache Wendestrecke ist, $k \leqq n$ bis $k = o$, n gerade.