Gegenseitige Bedeckbarkeit zweier Eibereiche und Isoperimetrie.[1]

Von

H. HADWIGER (Bern).

(Als Manuskript eingegangen am 8. April 1941.)

Es seien G und G_0 zwei ebene Eibereiche mit Flächeninhalt F und F_0 sowie den Randlängen L und L_0. In einer kürzlich erschienenen Note[2]) habe ich hinreichende Bedingungen dafür angegeben, dass sich einer der Bereiche durch den andern überdecken lässt. Die Bereiche G und G_0 sind als abgeschlossene Punktmengen aufzufassen, und G heisst von G_0 überdeckt, wenn alle Punkte von G innere Punkte von G_0 sind. Die Bedeckbarkeitsbedingungen habe ich aus einer allgemeinen Mittelwertsformel für Bewegung ebener Figuren in einem Figurengitter[3]) gefolgert; sie können aber auch direkt aus den Grundformeln der ebenen Integralgeometrie abgeleitet werden. Die integralgeometrische Ausgangsformel, die bereits das Wesentliche der Bedeckbarkeitsbedingungen enthält, hat W. BLASCHKE[4]) gelegentlich erwähnt. Dass sich keine hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die Bedeckbarkeit angeben lassen, in die nur Flächeninhalte und Rand-

[1]) Ausführlichere Darstellung einiger im Sommer 1941 im mathematischen Kolloquium der ETH. und der Universität Zürich mitgeteilten Resultate betreffend die Anwendung einer integralgeometrischen Formel zur Abschätzung des isoperimetrischen Defizits ebener Eibereiche.

[2]) H. HADWIGER: Überdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate. Coment. Math. Helv. 13, 195—200 (1941), bes. 199.

[3]) H. HADWIGER: Über Mittelwerte im Figurengitter. Coment. Math. Helv. 11, 221—233 (1938/39). Vgl. auch L. A. SANTALÓ: Geometria Integral 31 (Sobre valores medios y probabilidades geométricas). Math. Abh. Hamburg 13, 284—294 (1940).

[4]) W. BLASCHKE: Vorlesungen über Integralgeometrie, 1. Heft, zweite erw. Auflage, Leipzig und Berlin 1936, Formel (275) auf Seite 45.

längen der Eibereiche eingehen, habe ich in der unter [2]) zitierten Arbeit gezeigt. Die dort gewonnenen hinreichenden Bedingungen lauten so:

Wenn

$$\frac{LL_0 - \sqrt{L^2L_0^2 - 16\,\pi^2\,FF_0}}{4\,\pi\,F} > 1, \tag{1}$$

oder wenn

$$\frac{LL_0 + \sqrt{L^2L_0^2 - 16\,\pi^2\,FF_0}}{4\,\pi\,F_0} < 1, \tag{2}$$

lässt sich G durch G_0 bedecken.

Im Falle dass G und G_0 Kreise mit den Radien R und R_0 sind, ergeben die Bedingungen

$$\frac{R_0}{R} > 1 \text{ und } \frac{R}{R_0} < 1.$$

In dieser Mitteilung will ich zeigen, wie aus den gegebenen Bedingungen eine grosse Zahl von Verschärfungen der isoperimetrischen Ungleichung vom Typus der Ungleichung von T. BONNESEN[5]) und Verallgemeinerungen derartiger Verschärfungen unter Heranziehung nicht-kreisförmiger Vergleichsfiguren gewonnen werden können.

Wir setzen voraus, dass von den beiden Eibereichen G und G_0 keiner den andern bedecken kann. Es gelten dann notwendigerweise die folgenden Ungleichungen:

$$\sqrt{L^2L_0^2 - 16\,\pi^2\,FF_0} \geqq \begin{cases} LL_0 - 4\,\pi\,F, & (3)\\ LL_0 - 4\,\pi\,F_0, & (4)\\ -LL_0 + 4\,\pi\,F, & (5)\\ -LL_0 + 4\,\pi\,F_0. & (6)\end{cases}$$

Wäre nämlich eine von diesen vier Ungleichungen nicht erfüllt, so wäre eine der hinreichenden Bedeckbarkeitsbedingungen (1) oder (2), oder eine aus diesen beiden durch Vertauschen von G mit G_0 hervorgehende erfüllt, was zu einem Widerspruch mit der Voraussetzung führt.

Aus (3) und (5), bzw. aus (4) und (6) ergibt sich

$$L^2L_0^2 - 16\,\pi^2\,FF_0 \geqq \begin{cases} (LL_0 - 4\,\pi\,F)^2, & (7)\\ (LL_0 - 4\,\pi\,F_0)^2. & (8)\end{cases}$$

[5]) Vgl. den ausführlichen Bericht über diesen Fragenkreis bei T. BONNESEN und W. FENCHEL: Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3, Berlin: Springer 1934, bes. 111—113.

Nach einiger Umrechnung gewinnt man aus (7) wie auch aus (8) die für die beteiligten Bereiche symmetrische Defizitformel

$$(L^2-4\pi F)+(L_o^2-4\pi F_o)\geqq(L-L_o)^2. \tag{9}$$

Addiert man (3) und (6) sowie (4) und (5), so folgt

$$L^2L_o^2-16\pi^2 FF_o\geqq 4\pi^2(F-F_o)^2. \tag{10}$$

Wir ziehen nun zwei verschiedene Vergleichsbereiche G_o und G_1 in Betracht. Wir setzen wieder voraus, dass sowohl G_o als auch G_1 keine gegenseitige Bedeckbarkeit mit G zulässt.

Durch Addition der für G_o und G_1 gültigen Ungleichung (9) bzw. (10) folgert man unter Verwendung der Relation

$$a^2+b^2\geqq\frac{1}{2}(a+b)^2$$

die Ungleichung

$$(L^2-4\pi F)+\frac{1}{2}(L_o^2-4\pi F_o)+\frac{1}{2}(L_1^2-4\pi F_1)\geqq\frac{1}{4}(L_1-L_o)^2, \tag{11}$$

und

$$L^2(L_o^2+L_1^2)-16\pi^2 F(F_o+F_1)\geqq 2\pi^2(F_1-F_o)^2. \tag{12}$$

Ich zeige nun, dass eine grosse Zahl von zum grossen Teil bekannten Verschärfungen der klassischen isoperimetrischen Ungleichung, wo als Vergleichsbereiche Umkreis und Inkreis herangezogen werden, aus den oben angeschriebenen allgemeinen Ungleichungen als Spezialfälle erhalten werden können. Es wird besonders auf die Einheitlichkeit hingewiesen, mit welcher alle diese Ungleichungen, die in der Literatur auf viele aber verschiedene Arten hergeleitet worden sind, sich auf die hier dargelegte Weise ergeben.

Diese Einheitlichkeit wird dadurch ermöglicht, dass die allgemeinen Ausgangsformeln trotz der weitgehenden Unabhängigkeit von den individuellen geometrisch-gestaltlichen Eigenheiten der beteiligten Bereiche immer noch ausreichende Schärfe besitzen, um noch alle die gelieferten mittelmässig scharfen Relationen zu erfassen. Die Allgemeinheit der Ausgangsformeln wiederum ist eine Folge derjenigen der Hauptformeln der Integralgeometrie.

Wählen wir in den Relationen (3) bis (6) für G_o speziell Umkreis bzw. Inkreis, so gewinnen wir

$$L^2-4\pi F\geqq\left(L-\frac{2F}{R}\right)^2, \tag{13}$$

$$L^2 - 4\pi F \geqq \left(\frac{2F}{r} - L\right)^2. \tag{14}$$

(R = Umkreisradius, r = Inkreisradius.)

Man beachte noch besonders, dass die Ausdrücke in den Klammern nicht negativ sind. In (14) gilt das Gleichheitszeichen für alle Bereiche, die aus einem Rechteck und zwei an Gegenseiten als Durchmesser angesetzten Halbkreisen bestehen (äusserer Parallelbereich einer Strecke im Sinne von J. STEINER). Die Sonderstellung, welche dieser so gestaltete Bereich in diesem Zusammenhang einnimmt, lässt sich auf den Umstand zurückführen, dass eine zum Inkreis kongruente Kreislinie den Rand des Bereiches in höchstens zwei Punkten schneidet.

Ferner erhält man

$$L^2 - 4\pi F \geqq (2\pi R - L)^2, \tag{15}$$

$$L^2 - 4\pi F \geqq (L - 2\pi r)^2. \tag{16}$$

Die Ungleichung (16) ist von BONNESEN[6]), ferner von VAHLEN[7]) und CHISINI[8]) bewiesen worden. Den Fall (15) hat ebenfalls BONNESEN[9]) betrachtet.

Die analogen Spezialisierungen von (9) liefern erneut (15) und (16). Aus (10) folgt

$$L^2 - 4\pi F \geqq \left(\frac{\pi R^2 - F}{R}\right)^2, \tag{17}$$

$$L^2 - 4\pi F \geqq \left(\frac{F - \pi r^2}{r}\right)^2; \tag{18}$$

(11) liefert noch

$$L^2 - 4\pi F \geqq \pi^2 (R - r)^2. \tag{19}$$

Dies ist die bekannteste Ungleichung von T. BONNESEN[10]).

---

[6]) T. BONNESEN: Über eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung des Kreises . . . Math. Ann. 84, 216—227 (1921).

[7]) K. TH. VAHLEN: Zwei Beweise für die isoperimetrische Haupteigenschaft des Kreises. Ann. Mat. pura appl. (4) 10, 121—124 (1932).

[8]) O. CHISINI: Sulla teoria elementare degli isoperimetri. Questioni riguardanti le matematiche elementari. Raccolte da F. Enriques 3, 201—310 (Bologna 1927).

[9]) T. BONNESEN: Die in [6]) zitierte Abhandlung.

[10]) Vgl. das Buch «Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes». Paris: Gauthier-Villars (1929) auf Seite 63.

Wird (3) auf den Umkreis und (5) auf den Inkreis angewendet, so können aus den entstehenden Relationen noch die folgenden Ungleichungen gewonnen werden:

$$L^2 - 4\pi F \geqq \left(\frac{F}{Rr}\right)^2 (R-r)^2, \tag{20}$$

$$L^2 - 4\pi F \geqq \left(\frac{L}{R+r}\right)^2 (R-r)^2. \tag{21}$$

(20) und (21) sind teils schwächer teils schärfer als (19). Z. B. für äussere Parallelbereiche einer Strecke der Länge 2a, $R = r + a$, gilt für $a \longrightarrow \infty$, r fest:

$$\left(\frac{F}{Rr}\right)^2 \longrightarrow 16, \quad \left(\frac{L}{R+r}\right)^2 \longrightarrow 16,$$

so dass für derartige Bereiche eine bessere Abschätzung erreicht werden kann, als die schärfste noch allgemein gültige Ungleichung vom Typus (19), nämlich die ebenfalls von Bonnesen[11]) stammende Ungleichung

$$L^2 - 4\pi F \geqq 4\pi (R-r)^2 \tag{22}$$

zu liefern vermag.

---

[11]) Über das isoperimetrische Defizit ebener Figuren. Math. Ann. 91, 252 bis 268 (1924).