A propos de la condition d'apolarité de deux complexes de droites.

Par

F. GONSETH (Zurich).

(Als Manuskript eingegangen am 11. Mai 1940.)

1° Une circonstance a retardé l'extension aux complexes de droites de la notion de système linéaire, et par conséquent aussi de la notion d'apolarité et de la théorie des pôles et polaires: c'est que l'équation d'un tel complexe n'est pas univoquement déterminée.

Supposons, en effet, que $F(v_1, v_2, \ldots, v_6) = 0$ soit l'équation d'un complexe du $n^{\text{ième}}$ degré, $v_1, \ldots, v_6$ étant les six coordonnées homogènes et courantes d'une droite; que $Q(v_1, v_2, \ldots, v_6) = 0$ soit la relation quadratique existant toujours entre ces six coordonnées, et enfin que $M(v_1, v_2, \ldots, v_6) = 0$ soit une forme homogène quelconque de degré $n-2$ de ces mêmes v_i. Alors les équations

$$F + M \cdot Q = 0 \tag{1}$$

peuvent toutes entrer, comme équations du complexe envisagé, en concurrence avec l'équation primitive $F = 0$.

En d'autres termes, si l'on représente toute droite de coordonnées v_i par un point d'un espace à cinq dimensions, en envisageant les v_i comme des coordonnées homogènes ponctuelles dans cet espace, alors

$Q = 0$ est l'équation (ponctuelle) de la quadrique (Q) (du second ordre) contenant les points images de toutes les droites,

$F = 0$ est l'équation d'une certaine hypersurface (F) du $n^{\text{ième}}$ ordre et

$F + M \cdot Q = 0$ est l'équation de toutes les hypersurfaces (H) du $n^{\text{ième}}$ ordre ayant avec (Q) les mêmes points en commun que (F).

Parmi ces hypersurfaces (H), il en est cependant une qui jouit, par rapport à la quadrique (Q), d'un caractère spécial: c'est celle qui est apolaire à (Q), lorsqu'on envisage cette dernière comme une hypersurface de seconde classe.

En effet: Une (H) est apolaire à (Q) lorsqu'elle est apolaire à toute surface (Φ) de classe n obtenue en adjoignant à (Q) une hypersurface quelconque de classe $n-2$. Soit $N_5(n-2)+1$ le nombre des coefficients d'une forme quelconque telle que M. C'est naturellement aussi le nombre des éléments indépendants à partir desquels le système linéaire des (Φ) dont il vient d'être question peut être obtenu. En posant la condition (linéaire) d'apolarité de (H) à l'ensemble de ces (Φ), on obtient donc exactement $N_5(n-2)+1$ équations linéaires inhomogènes pour déterminer les coefficients en nombre égal de la forme M.

Si quelques-unes de ces conditions n'étaient pas indépendantes, cela voudrait dire que l'on pourrait trouver au moins deux hypersurfaces (H) dont les équations pourraient s'écrire:

$$F+M_1\cdot Q=0 \quad \text{et} \tag{2}$$

$$F+M_2\cdot Q=0\ . \tag{3}$$

Comme la condition d'apolarité est linéaire, toute combinaison linéaire de ces deux hypersurfaces fournirait encore une (H) apolaire. En formant, par exemple, la différence des équations (2) et (3) on obtiendrait

$$(M_1-M_2)\cdot Q=0 \tag{4}$$

c'est-à-dire une (H) apolaire contenant la quadrique (Q) tout entière.

Nous montrerons dans un instant que ce cas est exclu.

Ainsi donc, pour tout complexe, il existe une équation (en coordonnées ponctuelles) univoquement déterminée: c'est elle que nous appellerons tout simplement l'équation ponctuelle du complexe. Et, de même, l'hypersurface correspondante sera simplement dite la représentante ponctuelle du complexe.

L'introduction de ces équations spéciales présente l'avantage essentiel suivant: Puisque la condition d'apolarité à (Q) équivaut à une certain nombre de conditions linéaires, toute combinaison linéaire de ces équations est encore une de ces équations spéciales: nous retrouvons ainsi la possibilité de construire sans ambiguïté un système linéaire de complexes à partir de toute base donnée.

Pour trouver la possibilité de définir l'apolarité de deux complexes, il faut compléter les considérations précédents par dualité:

Rien ne nous empêche de convenir que l'hyperplan tangent en un point p de la quadrique (Q) représente aussi la même droite que ce point et que, plus généralement, deux éléments ou figures géométriques quelconques qui se correspondent par polarité par rapport à la quadrique (Q) trouvent la même interprétation dans l'espace réglé. [Un point non situé sur (Q) et son hyperplan polaire par rapport à (Q) représenteront, par exemple, le même complexe linéaire.]

Dans ces conditions, tout complexe admettra également une représentante tangentielle, qui sera simplement la transformée par polarité par rapport à (Q) de sa représentante ponctuelle.

Deux complexes seront enfin définis comme apolaires si la représentante ponctuelle de l'un est apolaire à la représentante tangentielle de l'autre.

A partir de cette définition, la théorie des figures polaires par rapport à un complexe quelconque peut être établie sans difficulté[1].

2° Je m'en vais maintenant démontrer trois théorèmes sur les variétés apolaires, dont seul un cas particulier sera d'ailleurs appliqué au point laissé en suspens dans ce qui précède.

Théorème 1. Les hyperplans tangents à une hypersurface (Φ) de classe n, dans un espace à r dimensions, comptés m fois, c'est-à-dire considérés comme des hypersurfaces dégénérées d'ordre m, forment une base suffisante pour le système linéaire des hypersurfaces (F) d'ordre m apolaires à (Φ). $(m \geq n.)$

Ce théorème est évidemment juste pour r quelconque et $n = m$; et aussi pour $r = 1$ et m et n quelconques. Nous allons le démontrer par induction suivant la dimension r, (en le supposant déjà démontré pour m et n quelconques dans un espace à $r-1$ dimensions) et par réduction suivant l'ordre n. En d'autres termes, nous allons compléter (Φ) par $m-n$ points (à envisager chacun comme une enveloppe de classe 1) pour en faire une hypersurface de classe m, auquel cas, nous venons de l'indiquer, le théorème est valable; puis nous montrerons que si le théorème est valable

[1]) F. GONSETH. Sur les moments des droites, et les complexes apolaires. Livre d'Or du Jubilé. La Chaux-de-Fonds.

pour une hypersurface de classe $k+1$, formée d'une hypersurface ψ de classe k et d'un point, il reste valable pour ψ seule. On pourra dès lors se débarrasser, l'un après l'autre, des $m-n$ points introduits pour les besoins de la démonstration.

Soit $\bar{\psi}$ l'enveloppe de classe $k+1$ formée de ψ et d'un point p. Les apolaires d'ordre m de $\bar{\psi}$ forment un système linéaire de dimension

$$N_r(m) - N_r(m-k-1) - 1 = d_1$$

et celles de ψ forment un système linéaire de dimension

$$N_r(m) - N_r(m-k) - 1 = d_2$$

La différence

$$d_1 - d_2 = N_r(m-k) - N_r(m-k-1) = N_{r-1}(m-k) + 1\,.$$

Or, si l'on passe du système linéaire construit sur les hyperplans (m-tuples) de ψ au système construit sur les hyperplans de $\bar{\psi}$, il faut simplement ajouter à la base du premier système tous les hyperplans (m-tuples) passant par p, c'est-à-dire le système linéaire de tous les hypercônes de $m^{\text{ième}}$ ordre et de sommet p. Une partie de ceux-ci fait d'ailleurs déjà partie du système construit sur les hyperplans de ψ.

Pour les énumérer, il faut tenir compte des faits suivants:

a) Pour tout ce qui regarde la formation des systèmes linéaires et les conditions d'apolarité, les hypercônes de sommet p peuvent être remplacés par leurs sections par un hyperplan quelconque ne passant pas par p. On est ainsi ramené au cas de l'espace à $r-1$ dimensions. Une hypersurface de $m^{\text{ième}}$ ordre et une hypersurface de $m^{\text{ième}}$ classe apolaires dans cet espace sont projetées à partir de p suivant deux hypercônes apolaires.

b) Les hypercônes de $m^{\text{ième}}$ ordre apolaires de cette façon (c'est-à-dire selon les normes d'une géométrie projective à $r-1$ dimensions) à l'hypercône tangent à ψ, dont p est le sommet, sont également apolaires à ψ elle-même (selon les normes de la géométrie à r dimensions.)

En supposant le théorème à démontrer déjà valable dans tout espace projectif à $r-1$ dimensions, on peut donc dire que les hypercônes de sommet p qui sont déjà compris dans le système linéaire construit sur les hyperplans m-tuples de ψ est simplement formé des hypercônes apolaires à l'hypercône tangent à ψ de sommets p (c'est-à-dire apolaires à ψ elle-même).

La dimension du système linéaire des apolaires nouvelles est donc

$$N_{r-1}(m) - \{N_{r-1}(m) - N_{r-1}(m-k) - 1\} = N_{r-1}(m-k) + 1$$

Ceci étant précisément la différence $d_1 - d_2$, la réduction de ψ à ψ est ainsi assurée, et le théorème démontré.

3° Théorème 2. Une hypersurface d'ordre n, composée d'une hypersurface d'ordre $n-2$ et d'une quadrique, ne peut être apolaire à cette dernière.

Soit (Q) cette quadrique envisagée comme une hypersurface de second ordre. Soit d la dimension du système linéaire de ses apolaires (Φ) de classe n.

On a

$$d = N_r(n) - N_r(n-2) - 1$$

La construction de ce système linéaire à partir d'une base suffisante peut être envisagée comme la construction d'un espace (linéaire) E, à d dimensions, chaque point y représentant une apolaire du système. En particulier, les points (m-tuples) de (Q) y sont contenus et se trouvent représentés par les points d'une certaine variété (V) à $r-1$ dimensions qui, d'après le théorème précédent, transformé par dualité, ne saurait être contenue dans aucun espace linéaire à moins de d dimensions.

De façon tout à fait analogue, les apolaires (F) d'ordre n, à (Q) envisagée comme une surface de seconde classe peuvent être représentées par les hyperplans du même espace E. Et si l'on établit une correspondance entre le point et l'hyperplan représentant respectivement une apolaire et sa transformée par polaires réciproques par rapport à (Q), cette correspondance est naturellement une corrélation linéaire.

Considérons maintenant les apolaires de classe n à l'une des hypersurfaces (F). Dans le système de toutes les hypersurfaces de classe n et également dans le système restreint des (Φ), ces apolaires forment un système linéaire.

Deux cas sont possibles:

a) La condition d'apolarité est remplie pour toutes les (Φ), sans exception. Cette condition est, en quelque sorte, identiquement remplie dans l'espace E.

b) La condition d'apolarité n'est pas remplie pour toutes les Φ. Elle institue alors une condition linéaire dans l'espace E: elle est donc équivalente à l'équation d'un hyperplan de cet espace.

Si ce dernier cas se présente pour deux (F) différentes, il en sera de même pour les (F) obtenues à partir d'elles par combinaison linéaire: les hyperplans correspondants s'obtiendront à partir des deux premiers par la combinaison linéaire correspondante.

Or il est certaines (F) pour lesquelles le cas b) se présente certainement: ce sont les hyperplans n-tuples tangents à (Q).

Ces hyperplans ne contiennent, en effet, pas tous les points de (Q) dont chacun, compté n fois, est précisément une (Φ).

D'après le Théorème 1, ces (F) spéciales forment une base suffisante pour tout le système linéaire des (F). Le cas b) se présentera donc sans exception pour toutes ces dernières: pour chacune d'elles les (Φ) qui lui sont apolaires sont représentées par les points d'un hyperplan de E.

Remarquons enfin que les points d'intersection de cet hyperplan avec la variété (V) représentent les points n-tuples apolaires à la fois à (Q) et à (F), c'est-à-dire les points d'intersection de (Q) et (F). (F) ne peut donc contenir (Q) entièrement puisque (V) ne peut se trouver entièrement dans un espace de dimension inférieure à celle de E.

Il va sans dire que le théorème dual est aussi valable: (Q) a été supposée à la fois de second ordre et de seconde classe.

Pour $r=5$, nous retrouvons la propriété de la représentante ponctuelle d'un complexe dont il a été question plus haut.

L'équation de cette représentante avait été déjà introduite par Clebsch, sans rapport d'ailleurs avec la condition d'apolarité, de la façon suivante: c'est, parmi toutes les équations (1), celle qui peut se mettre sous la forme d'une $n^{\text{ième}}$ puissance symbolique de l'équation d'une droite, (c'est-à-dire de l'équation du complexe linéaire des transversales d'une droite).

4° L'identité de l'équation de Clebsch et de l'équation de la représentante apolaire à (Q) n'est qu'un cas particulier du théorème suivant:

Théorème 3. Soient (Q) une hypersurface d'ordre m, et (Φ) une hypersurface de classe n, $(m \geq n)$ dans un espace à r dimensions. Si le membre de gauche de l'équation de (F)

$$F(x_0, x_1, \dots x_r) = 0$$

est la $m^{\text{ième}}$ puissance symbolique du membre de gauche de l'équation

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + \cdots + u_r x_r = 0$$

d'un hyperplan tangent à (Φ), alors (F) est apolaire à (Φ).

L'équation de (Φ) établit entre les u_i une relation du $n^{\text{ième}}$ degré

$$\Phi(u_0, u_1 \ldots u_r) = 0$$

dans laquelle nous pouvons supposer que le terme u_0^n, par exemple, ne manque pas.

Cette équation nous permettra donc d'exprimer u_0^n à l'aide des autres produits des coordonnées u_i entre elles. Nous pourrons remplacer u_0^n par cette expression dans la puissance symbolique

$$(u_0 x_0 + u_1 x_1 + \cdots + u_r x_r)^{(m)}$$

partout où elle se trouvera.

D'ailleurs ce produit symbolique s'effectue en remplaçant un produit quelconque comprenant m des u_i par un unique coefficient affecté de tous les indices des u_i. Remplacer u_0^n comme nous venons de le dire revient donc à établir certaines relations linéaires entre les coefficients de l'équation de (F).

Dans la puissance symbolique, u_0^n intervient dans un certain nombre de termes, que nous désignerons par $L(m-n)$.

$$L(m-n) = 1 + \sum_{l=1}^{l=m-n} \{N_{r-1}(l) + 1\}$$

La dimension du système des (F) est

$$N_r(m) - L(m-n) - 1$$

D'autre part le système des apolaires (A) à (Φ) a la dimension

$$N_r(m) - N_r(m-n) - 1$$

Ces systèmes auront même dimension si

$$L(m-n) = N_r(m-n) \quad \text{ou bien} \quad N_r(s) = L(s)$$

Or cette propriété est vraie pour $s = 0$.

Et d'autre part

$$L(s) - L(s-1) = N_r(s) - N_r(s-1) = N_{r-1}(s) + 1$$

Donc le système des (F) et celui des (A) ont même dimension.

Mais tout hyperplan tangent à (Φ), compté m fois, est évidemment compris dans le système des (F), puisque le membre de gauche de son équation est une puissance *effective* de l'équation d'un hyperplan de Φ. D'après le Théorème 1, ces hyperplans forment une base suffisante pour les (A), par conséquent aussi pour les (F); ces deux systèmes coincident donc bien.