# Mittel aus Dirichlet-Reihen mit reellen Restcharakteren.

Von

MAX GUT (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 10. April 1940.)

In einer Note[1]) habe ich gezeigt, dass wenn $q$ eine beliebige Primzahl ist, und man den Körperturm $k_0, k_1, k_2, \ldots$ betrachtet, der dadurch entsteht, dass man zum rationalen Zahlkörper $k_0$ sukzessive alle absolut-zyklischen Körper vom Primzahlgrade $q$ adjungiert, ferner $n_i$ der absolute Grad, endlich $\zeta_i(s)$ die Dedekind'sche Zetafunktion von $k_i$ bedeutet, die Funktionsfolge $\sqrt[n_i]{\zeta_i(s)}$ gegen eine bestimmte analytische Grenzfunktion konvergiert. Mit Hilfe der Theorie der algebraischen Körper von unendlich hohem Grade[2]) ergibt sich leicht die genaue Bestimmung dieser Grenzfunktion. Da nun diese Grenzfunktion im wesentlichen nichts anderes ist als der Limes des geometrischen Mittels sämtlicher $L$-Reihen des rationalen Zahlkörpers, deren Charakter die Eigenschaft hat, dass seine $q$-te Potenz für jede natürliche Zahl als Argument entweder gleich 1 oder 0 ist, so stellt sich sofort das Problem, dieses Mittel auch ohne die Theorie der algebraischen Körper von unendlich hohem Grade zu bestimmen.

Im folgenden will ich zeigen, dass es auf Grund der sorgfältigen Ausführungen, die E. HECKE in seinem Lehrbuch[3]) den quadratischen Restcharakteren gewidmet hat, leicht ist, im Falle $q=2$ nicht nur das geometrische, sondern auch das arithmetische und das harmonische Mittel von gleichen geeigneten Folgen aller

---

[1]) GUT, MAX, Folgen von Dedekindschen Zetafunktionen. Monatshefte für Mathematik und Physik, 48. Band, S. 153 (1939).

[2]) GUT, MAX, Ueber Erweiterungen von unendlichen algebraischen Zahlkörpern. Comment. Math. Helvet., Bd. 9, S. 136 (1936/37).

[3]) HECKE, ERICH, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Akadem. Verlagsges. m. b. H., Leipzig 1923. Siehe besonders S. 182/188.

$L$-Reihen auf Grund eines einfachen Hilfssatzes zu bestimmen. Das geometrische Mittel direkt zu bestimmen, indem man nur die Theorie der quadratischen Zahlkörper benutzt, scheint mir noch deswegen besonders als angezeigt, als ich im Falle $q=2$ die Resultate der Arbeiten 1) und 2), soweit sie uns hier interessieren, wesentlich mit Hilfe der allgemeinen Theorie des Körpers der $m$-ten Einheitswurzel und seiner Unterkörper hergeleitet hatte.[4]) Das erwähnte Lemma gestattet ausserdem, derartige Mittel für weitere Typen von solchen gewöhnlichen Dirichlet-Reihen mit reellen Restcharakteren zu bestimmen, wie sie in speziellen Fällen besonders von EULER und CESARO betrachtet wurden.[5])

Wir schicken unseren Sätzen folgende Bemerkung voraus. Es bedeute $l_1, l_2, l_3, \ldots$ die Folge der ungeraden Primzahlen in irgend einer Anordnung, z. B. also auch nach wachsender Grösse geordnet: $l_1=3$, $l_2=5$, $l_3=7$, $l_4=11$, usf. Lässt man in

$$m_t=\left[(-1)^{\frac{l_1-1}{2}}l_1\right]^{a_1}\left[(-1)^{\frac{l_2-1}{2}}l_2\right]^{a_2}\cdots\left[(-1)^{\frac{l_t-1}{2}}l_t\right]^{a_t} \tag{1}$$

die Exponenten $a_i$, für $i=1,2,\ldots t$, unabhängig voneinander die Werte 0 und 1 annehmen, so erhält man offenbar, wenn man sukzessive

$$d_t=m_t,\ d_t=-4m_t,\ d_t=8m_t,\ d_t=-8m_t, \tag{2}$$

setzt und $t$ gegen $\infty$ geht, abgesehen von der Zahl 1 jede Diskriminante jedes quadratischen Zahlkörpers und jede genau nur einmal.

Ist $f(x)$ irgend eine zahlentheoretische Funktion, die für alle jene ganzzahligen Argumente $x$ erklärt ist, welche $x$ durchlaufen muss, so bedeute

$$\sum_{a_i} f(m_t)$$

dass die Summation über alle möglichen Kombinationen der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_t$ in (1) zu erstrecken ist, so dass die Summe formal aus $2^t$ Summanden besteht, wobei ein solcher Summand natürlich auch den Wert 0 haben kann.

---

[4]) GUT, MAX, Die Zetafunktion, die Klassenzahl und die Kronecker'sche Grenzformel eines beliebigen Kreiskörpers. Comment. Math. Helvet., Bd. 1, S. 160 (1929).

[5]) Vgl. z. B. LANDAU, EDMUND, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1909, 2. Band, S. 673 u. ff. Im folgenden zitiert als «Handbuch».

Ferner bedeute [vgl. (2)]:

$$\sum_{a_t} f(d_t) = \sum_{a_t} [f(m_t) + f(-4m_t) + f(8m_t) + f(-8m_t)] \,. \tag{3}$$

Wir wollen unter einer geordneten Folge von Dirichlet-Reihen mit reellen Restcharakteren eine solche verstehen, deren Glieder so aufeinander folgen, dass zuerst die Reihe mit dem Hauptcharakter („$m_t = 1$") und alle diejenigen Reihen auftreten, deren (Neben-) Charakter zu einer solchen Diskriminante gehört, die ein Teiler von $\pm 8m_1$, dann von $\pm 8m_2$, dann von $\pm 8m_3$ ist, u. s. f., entsprechend der eben gegebenen Summierungsvorschrift. Nimmt man nun das geometrische, bezw. arithmetische, bezw. harmonische Mittel sukzessive aus den $2^T$ Gliedern einer geordneten Folge, $T = 3, 4, 5, \ldots,$ so wollen wir eine solche Teilfolge der Mittel kurz eine normale Teilfolge der geometrischen, bezw. arithmetischen, bezw. harmonischen Mittel der betrachteten Dirichlet-Reihen nennen. Ist $k$ der Körper, der durch alle absolut-quadratischen Zahlen erzeugt wird, so entsprechen die normalen Teilfolgen vollständig dem Aufbau von $k$ durch sukzessive Adjunktion aller absolut-quadratischen Zahlkörper in irgendeiner Reihenfolge zum Körper $k_0$ der rationalen Zahlen, da von einer Stelle an immer der Körper der 8-ten Einheitswurzel zu $k_0$ adjungiert sein wird.

Lemma. Ist $N(n)$ die Anzahl der voneinander verschiedenen ungeraden Primteiler der natürlichen Zahl $n$ und $r$ eine beliebige natürliche Zahl, so ist bei festgehaltenem $n$ für genügend grosses $t$ immer:

$$\sum_{a_t} \left(\frac{m_t}{n}\right)^r = \left\{\begin{array}{ll} 2^{t-N(n)}, & \text{wenn } r \text{ gerade und } n \text{ beliebig} \\ & \text{oder } r \text{ ungerade und } n \text{ eine Quadratzahl}^{6)} \\ 0 & \text{, wenn } r \text{ ungerade und } n \text{ keine Quadratzahl ist.} \end{array}\right\} \tag{4}$$

Beweis: Zunächst ist klar, dass der Wert der Summe in (4) je für alle ungeraden $r$ derselbe ist und ebenso für alle geraden $r$, sodass es genügt, die Summe zu berechnen für $r = 1$ und für $r = 2$. Aus den von E. Hecke angeführten Formeln leitet man, da die Zähler der Restsymbole immer $\equiv 1 \pmod 4$ sind, leicht her, dass für alle natürlichen Zahlen $n$ und $r$ die Gleichung

$$\sum_{a_t} \left(\frac{m_t}{n}\right)^r = \left[1 + \left(\frac{(-1)^{\frac{l_1-1}{2}} l_1}{n}\right)^r\right] \left[1 + \left(\frac{(-1)^{\frac{l_2-1}{2}} l_2}{n}\right)^r\right] \ldots \left[1 + \left(\frac{(-1)^{\frac{l_t-1}{2}} l_t}{n}\right)^r\right] \tag{5}$$

besteht.

---

[6]) Also auch $n = 1$; $N(1) = 0$.

Ist zunächst $r$ gerade, oder $r$ ungerade und $n$ ein Quadrat, so kann ein Faktor der rechten Seite von (5) nur gleich 2 oder 1 sein, und zwar sind offenbar bei genügend grossem Werte von $t$ genau $N(n)$ der Faktoren gleich 1, da sooft das Restsymbol gleich 0 wird.

Wir brauchen also nur noch den Fall zu betrachten, dass $r$ ungerade ist, folglich $r=1$ gesetzt werden kann, und $n$ von der Form

$$n=2^w \,.\, n', \quad n' \text{ ungerade}, \quad w \geqq 0,$$

ist, wobei einer der 3 Fälle gilt:

I. Fall: $w$ gerade, $n'$ keine Quadratzahl,
II. Fall: $w$ ungerade, $n'$ keine Quadratzahl,
III. Fall: $w$ ungerade, $n'$ eine Quadratzahl.

Es sei $n'=q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_{N(n)}^{\alpha_{N(n)}}$, wo $\alpha_i \geqq 1$, $i=1,2,\ldots N(n)$, und die Reihenfolge der voneinander verschiedenen (ungeraden) Primzahlen $q_i$ sei so genommen, dass der Exponent der ersten $u$ Primzahlen ungerade, der Exponent der weiteren $N(n)-u$ Primzahlen gerade ist. Dann ist offenbar $n'=q_1 q_2 \ldots q_u \,.\, n''$, wo $n''$ eine Quadratzahl ist, und nach Voraussetzung ist im I. und II. Falle $u \geqq 1$, im III. Falle $u=0$. Sei $\mathcal{N}$ immer ein quadratischer Nichtrest mod. $q_1$.

Im I. Fall kann man eine Primzahl $l$ so bestimmen, dass

$$l \equiv 1 \pmod{4}$$
$$l \equiv \mathcal{N} \pmod{q_1}$$
$$l \equiv 1 \pmod{q_i}, \text{ für } i=2,3\ldots N(n).$$

Es wird

$$1+\left(\frac{l}{n}\right)=1+\left(\frac{l}{n'}\right)=1+\left(\frac{l}{q_1}\right)\left(\frac{l}{q_2}\right)\cdots\left(\frac{l}{q_u}\right)=1-1=0,$$

d. h. bei genügend grosser Wahl von $t$ wird wenigstens ein Faktor auf der rechten Seite von (5) gleich 0.

Im II. und III. Fall kann man eine Primzahl $l$ so bestimmen, dass

$$l \equiv 5 \pmod{8}$$
$$l \equiv 1 \pmod{q_i}, \text{ für alle } i=1,2,\ldots N(n).$$

Es wird, da $w$ ungerade ist:

$$1+\left(\frac{l}{n}\right)=1+\left(\frac{l}{2^w}\right)\left(\frac{l}{n'}\right)=1+\left(\frac{l}{2}\right)^w\left(\frac{l}{n'}\right)$$

$$=1+\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{q_1}\right)\left(\frac{l}{q_2}\right)\cdots\left(\frac{l}{q_u}\right)=1-1=0,$$

und der weitere Schluss ist derselbe, womit das Lemma bewiesen ist.

1. Satz. Jede normale Teilfolge der geometrischen Mittel aller $L$-Reihen der absolut-quadratischen Körper strebt für $\sigma > 1$ gegen

$$\sqrt[8]{\frac{\zeta^2(2s)(2^{2s}-1)}{2^{2s}}}. \tag{6}$$

Hiebei ist für die Wurzel immer diejenige Determination zu nehmen, die für $\mathfrak{I}(s) = 0$ reell ist, und wie üblich ist $\sigma = \mathfrak{R}(s)$.[7])

Beweis: Es sei im folgenden immer $\sigma > 1$, dann ist

$$\log L(s, d) = -\sum_p \log\left[1 - \left(\frac{d}{p}\right)\frac{1}{p^s}\right] = \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{rp^{rs}}\left(\frac{d}{p}\right)^r,$$

wobei hier und im folgenden immer der Hauptwert des Logarithmus genommen werden soll.

Da der gesuchte Limes existiert und von 0 verschieden ist, wie sich durch Umformung der rechten Seite ergeben wird, so bezeichnen wir ihn zunächst nur im Sinne einer Abkürzung mit $G$. Es ist:

$$\log G = \lim_{t=\infty} \frac{1}{2^{t+2}} \sum_{a_i}\left[\sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{rp^{rs}}\left(\frac{d_t}{p}\right)^r\right].$$

Falls $Z$ irgendeine von 1 verschiedene natürliche Zahl bedeutet, die keine Primzahl ist, so ist:

$$\log G = \lim_{t=\infty} \frac{1}{2^{t+2}} \sum_{a_i}\left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r \cdot 2^{rs}}\left(\frac{d_t}{2}\right)^r + \sum_{2<p<Z} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r \cdot p^{rs}}\left(\frac{d_t}{p}\right)^r + \sum_{p>Z} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r \cdot p^{rs}}\left(\frac{d_t}{p}\right)^r\right]. \tag{7}$$

In (7) wähle man jetzt $Z$ möglichst gross, aber so, dass gemäss unserem Lemma Formel (4) für alle $n = p < Z$ richtig ist. Geht $t$ gegen $\infty$, so wird auch $Z$ gegen $\infty$ gehen. Dann ist nach (3) und (4) für $p = 2$:

$$\sum_{a_i}\left(\frac{d_t}{2}\right)^r = \sum_{a_i}\left(\frac{m_t}{2}\right)^r = \begin{cases} 2^t, & \text{wenn } r \text{ gerade ist,} \\ 0, & \text{wenn } r \text{ ungerade ist,} \end{cases} \tag{8}$$

[7]) Vgl. Satz 3 und Formel (7) in der in der Anmerkung 1) erwähnten Arbeit.

und für $2 < p < Z$ nach den Ergänzungssätzen des quadratischen Reziprozitätsgesetzes:

$$\sum_{a_i} \left(\frac{d_t}{p}\right)^r = \left[1 + (-1)^{\frac{p-1}{2}r} + (-1)^{\frac{p^2-1}{8}r} + (-1)^{\frac{p-1}{2}r + \frac{p^2-1}{8}r}\right] \sum_{a_i} \left(\frac{m_t}{p}\right)^r$$

$$= \left[1 + (-1)^{\frac{p-1}{2}r}\right] \left[1 + (-1)^{\frac{p^2-1}{8}r}\right] \sum_{a_i} \left(\frac{m_t}{p}\right)^r,$$

und daher

$$\sum_{a_i} \left(\frac{d_t}{p}\right)^r = \begin{cases} 2^{t+1}, & \text{wenn } r \text{ gerade ist,} \\ 0, & \text{wenn } r \text{ ungerade ist.} \end{cases} \tag{9}$$

Weil die auftretenden Reihen und Doppelreihen in (7) absolut konvergieren, folgt durch Einsetzen von (8) und (9) in (7):

$$\log G = \lim_{t=\infty} \frac{1}{2^{t+2}} \left[2^t \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2\, r\, 2^{2rs}} + 2^{t+1} \sum_{2<p<Z} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2\, r\, p^{2rs}} + \sum_{a_i} \sum_{p>Z} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r p^{rs}} \left(\frac{d_t}{p}\right)^r\right],$$

und da einerseits die letzte Doppelreihe in dieser Formel für alle $\sigma \geqq \sigma_0 > 1$ absolut und gleichmässig in bezug auf $s$ und $t$ konvergiert, ferner die Doppelreihe, die in der nächsten Formel auftritt, absolut konvergiert, folgt

$$\begin{aligned} \log G &= \frac{1}{8} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r \cdot 2^{2rs}} + \frac{1}{4} \sum_{p \neq 2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r p^{2rs}} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{p} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r \cdot p^{2rs}} - \frac{1}{8} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r \cdot 2^{2rs}} \\ &= \frac{1}{4} \log \zeta(2s) + \frac{1}{8} \log \left(1 - \frac{1}{2^{2s}}\right) \\ &= \frac{1}{8} \log \frac{\zeta^2(2s)\,(2^{2s}-1)}{2^{2s}}, \end{aligned}$$

also

$$G = \sqrt[8]{\frac{\zeta^2(2s)\,(2^{2s}-1)}{2^{2s}}},$$

womit gemäss (6) der 1. Satz bewiesen ist.

2. Satz. Jede normale Teilfolge der arithmetischen Mittel aller $L$-Reihen der absolut-quadratischen Körper strebt für $\sigma > 1$ gegen

$$\left\{1 + \frac{1}{4}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2rs}}\right\}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{2^{-\nu(n)}}{n^{2s}}\,. \tag{10}$$

Hiebei bedeutet $\nu(n)$ die Anzahl der voneinander verschiedenen Primteiler der natürlichen Zahl $n$.[8])

Beweis. Bezeichnet man zunächst rein formal den gesuchten Limes mit $A$ — die Umformung der rechten Seite wird seine Existenz und Wert liefern — so ist, falls im folgenden immer $\sigma > 1$ ist:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{t=\infty}\frac{1}{2^{t+2}}\sum_{a_i}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N^s}\left(\frac{d_t}{N}\right) \\ &= \lim_{t=\infty}\frac{1}{2^{t+2}}\sum_{a_i}\left\{\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N^s}\left(\frac{m_t}{N}\right) + \sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N^s}\left(\frac{-4m_t}{N}\right)\right. \\ &\qquad\left. + \sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N^s}\left(\frac{8m_t}{N}\right) + \sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N^s}\left(\frac{-8m_t}{N}\right)\right\}, \end{aligned}$$

oder, falls der Summationsbuchstabe $n$ immer nur die ungeraden natürlichen Zahlen durchlaufen soll ($n = 1, 3, 5, \ldots$ ad. inf.), wegen der absoluten Konvergenz der auftretenden Reihen und Doppelreihen:

$$A = \lim_{t=\infty}\frac{1}{2^{t+2}}\sum_{a_i}\left\{\begin{aligned} &\sum_n\frac{1}{n^s}\left(\frac{m_t}{n}\right) + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_n\frac{1}{(2^r n)^s}\left(\frac{m_t}{2^r n}\right) + \\ &+ \sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^s}\left(\frac{m_t}{n}\right) + \sum_n\frac{(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}}{n^s}\left(\frac{m_t}{n}\right) + \\ &+ \sum_n\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}}}{n^s}\left(\frac{m_t}{n}\right) \end{aligned}\right\}.$$

Gemäss unserem Lemma wird aus dem gleichen Grunde:

$$A = \lim_{t=\infty}\frac{1}{2^{t+2}}\left\{\begin{aligned} &2^t\sum_n\frac{2^{-\nu(n)}}{n^{2s}} + 2^t\sum_{r=1}^{\infty}\sum_n\frac{2^{-\nu(n)}}{(2^r n)^{2s}} + 2^t\sum_n\frac{2^{-\nu(n)}}{n^{2s}} + \\ &+ 2^t\sum_n\frac{2^{-\nu(n)}}{n^{2s}} + 2^t\sum_n\frac{2^{-\nu(n)}}{n^{2s}} + 2^{t+2}a(s,t) \end{aligned}\right\},$$

---

[8]) Obwohl für die ungeraden Zahlen $n$ die beiden Funktionen $N(n)$ und $\nu(n)$ denselben Wert haben, führen wir hier $\nu(n)$ ein, um in Uebereinstimmung mit der Bezeichnungsweise des «Handbuches» zu sein.

wobei $\lim_{t=\infty} a(s, t) = 0$ ist, und weiter:

$$A = \sum_n \frac{2^{-\nu(n)}}{n^{2s}} + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_n \frac{2^{-\nu(n)}}{2^{2rs}\, n^{2s}},$$

oder

$$A = \left\{ \sum_n \frac{2^{-\nu(n)}}{n^{2s}} \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2rs}} \right\}.$$

Dies ist aber der Ausdruck (10), womit Satz 2 bewiesen ist.

Bemerkung zu Satz 2: Da ein unendliches Produkt

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + u_j)$$

bekanntlich absolut konvergent ist, wenn die Reihe

$$| u_1 | + | u_2 | + \cdots + | u_n | + \cdots$$

konvergent ist [9], so ist für $\sigma > \frac{1}{2}$ das Produkt auf der linken Seite der Gleichung

$$\prod_{p \neq 2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2rs}} \right] = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{2^{-\nu(n)}}{n^{2s}}$$

absolut konvergent und in bekannter Schlussweise gleich der Summe auf der rechten Seite. Mithin kann man dem Ausdruck (10) auch eine der folgenden Formen geben:

$$\left[ 1 + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2rs}} \right] \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{2^{-\nu(n)}}{n^{2s}} =$$

$$= \left[ 1 + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2rs}} \right] \prod_{p \neq 2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2rs}} \right] =$$

$$= \frac{1 - \frac{3}{4} \frac{1}{2^{2s}}}{1 - \frac{1}{2^{2s}}} \prod_{p \neq 2} \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{1}{p^{2s}}}{1 - \frac{1}{p^{2s}}} = \zeta(2s) \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{1}{2^{2s}} \right) \prod_{p \neq 2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{p^{2s}} \right).$$

3. Satz. Jede normale Teilfolge der harmonischen Mittel aller $L$-Reihen der absolut-quadratischen Körper strebt für $\sigma > 1$ gegen 1.

---

[9] Vgl. z. B. É. GOURSAT, Cours d'analyse mathématique, 3. édit., tome 1, Paris 1917, pg. 430.

Beweis: Bezeichnet man zunächst wieder analog zu den Beweisen der beiden ersten Sätze rein formal das gesuchte Mittel mit $H$, so ist wegen der absoluten Konvergenz der Reihe für $\sigma > 1$:

$$\frac{1}{H} = \lim_{t=\infty} \frac{1}{2^{t+2}} \sum_{a_i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \left(\frac{d_t}{n}\right),$$

wo $\mu(n)$ die Möbius'sche Funktion bedeutet [10]).

Gemäss (3) wird:

$$\frac{1}{H} = \lim_{t=\infty} \frac{1}{2^{t+2}} \sum_{a_i} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \left(\frac{m_t}{n}\right) + \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \mu(n)}{n^s} \left(\frac{m_t}{n}\right) + \\ \displaystyle + \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \mu(n)}{n^s} \left(\frac{m_t}{n}\right) + \\ \displaystyle + \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}} \mu(n)}{n^s} \left(\frac{m_t}{n}\right) \end{array} \right\}.$$

Da für alle $n$ ausser $n=1$ immer $\mu(n^2) = 0$ ist, folgt vermöge unseres Lemmas

$$\frac{1}{H} = \lim_{t=\infty} \frac{1}{2^{t+2}} \left\{ 2^t + 2^t + 2^t + 2^t + 2^{t+2} h(s, t) \right\},$$

wobei $\lim\limits_{t=\infty} h(s, t) = 0$ ist. Folglich wird $H = 1$ und Satz 3 ist bewiesen.

In gleicher Weise beweist man eine Fülle von Sätzen, von denen ich nur im Sinne von Beispielen folgende erwähnen will:

4. Satz. Jede normale Teilfolge der geometrischen, bezw. arithmetischen, bezw. harmonischen Mittel aller Dirichlet-Reihen der absolut-quadratischen Körper von der Form:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} \left(\frac{d_t}{n}\right)$$

konvergiert für $\sigma > 1$ gegen (6), bezw. (10), bezw. 1. Hiebei ist $\lambda(n)$ die auf Seite 570/71 des «Handbuches» definierte zahlentheoretische Funktion.

---

[10]) Vgl. z. B. S. 567 des «Handbuches».

5. Satz. Jede normale Teilfolge der arithmetischen, bezw. harmonischen Mittel aller Dirichlet-Reihen der absolut-quadratischen Körper von einer der Formen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} \left(\frac{d_t}{n}\right) \quad \text{oder} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)\, 2^{\nu(n)}}{n^s} \left(\frac{d_t}{n}\right)$$

konvergiert für $\sigma > 2$ gegen

$$\left(1 - \frac{1}{2 \cdot 2^{2s}}\right) \zeta(2s) ,$$

bezw. gegen den reziproken Wert dieser Grösse.

6. Satz. Jede normale Teilfolge der arithmetischen Mittel aller Dirichlet-Reihen der absolut-quadratischen Körper von der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma(n)}{n^s} \left(\frac{d_t}{n}\right)$$

konvergiert für $\sigma > 1$ gegen

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma(n)}{n^{2s}} - \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2rs}} .$$

Hiebei ist $\gamma(n)$ die auf Seite 688 des «Handbuches» definierte zahlentheoretische Funktion.

7. Satz. Jede normale Teilfolge der geometrischen, bezw. arithmetischen, bezw. harmonischen Mittel aller Dirichlet-Reihen der absolut-quadratischen Körper von der Form:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \left(\frac{d_t}{n}\right)$$

konvergiert für $\sigma > 2$ gegen

$$\sqrt[8]{\frac{1 - \frac{1}{2^{2(s-1)}}}{1 - \frac{1}{2^{2s}}} \cdot \frac{\zeta^2(2(s-1))}{\zeta^2(2s)}} ,$$

bezw.

$$\left[1+\frac{1}{8}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2r(s-1)}}\right]\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{\varphi(n)\cdot 2^{-\nu(n)}}{n^{2s-1}},$$

bezw.

$$\frac{1-\frac{1}{2^{2s}}}{1-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2^{2s}}}\prod_{p>2}\frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{1-\frac{p+1}{2}\cdot\frac{1}{p^{2s}}}=\frac{1}{\zeta(2s)}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2^{2s}}}\prod_{p>2}\frac{1}{1-\frac{p+1}{2}\cdot\frac{1}{p^{2s}}}.$$

Hiebei ist

$$\varphi(n)=n\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

---