Topologische Fragen aus der Himmelsmechanik.

Von
ANDREAS SPEISER (Zürich).

(Als Manuskript eingegangen am 15. März 1940.)

Das sogenannte asteroidische Problem (le problème restreint) der Himmelsmechanik ist von H. POINCARÉ in seiner letzten Arbeit[1]) zum Gegenstand tief eindringender Gedanken gemacht worden. Bei diesem Anlass hat er sein berühmtes «letztes Theorem» ausgesprochen und darin der Topologie ihre Wichtigkeit für dieses Gebiet vindiziert. Diese Untersuchungen wurden von G. D. BIRKHOFF in glänzender Weise fortgeführt[2]). In unserer Arbeit möchten wir insbesondere die topologische Seite weiter ausbauen und zeigen, wie man durch Berührungstransformationen den wichtigsten hier auftretenden Fall von allen Singularitäten befreien kann.

1.

Das asteroidische Problem[3]) ist ein Spezialfall des allgemeinen Dreikörperproblemes, bei welchem die eine der drei Massen als verschwindend angenommen wird, während die beiden andern Körper Kreisbahnen beschreiben. Man verwendet ein mit den beiden letzteren Massen rotierendes Koordinatensystem und findet leicht ein erstes Integral. Aus diesem ergibt sich, dass für grosse Werte der dort auftretenden Konstanten C der Asteroid entweder

[1]) H. POINCARÉ. Sur un théorème de géométrie Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 33, 1912, S. 375.

[2]) G. D. BIRKHOFF. The restricted Problem of three Bodies. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 39, 1915, S. 265.

[3]) Vergl. z. B. Die Darstellung bei CHARLIER, die Mechanik des Himmels, Bd. 2, S. 103 ff.

in einem Gebiet, das den grösseren der beiden Körper umschliesst, sich aufhalten muss (innerer Planet), oder in einem ebensolchen um den zweiten Körper (Mond), oder ausserhalb einer Kurve, welche beide Körper und die zugehörigen Gebiete umschliesst (äusserer Planet). Die drei Grenzkurven dieser drei Gebiete sind Linien mit verschwindender Geschwindigkeit. Wenn eine Bahn dorthin reicht, so weist sie dort einen Rückkehrpunkt auf, dessen Tangente senkrecht zur Kurve liegt.

Lässt man die Konstante C abnehmen, so verschmelzen zunächst die beiden ersten Gebiete und eine Unterscheidung zwischen Mond und innerem Planeten fällt dahin. Das Gebiet enthält nun zwei attraktive Punkte, die Grenzkurve ist immer noch eine Linie mit Nullgeschwindigkeit.

Unter den Bahnen des Asteroids kommen solche vor, welche in eines der Attraktionszentren gelangen. Sie weisen dort einen Rückkehrpunkt auf. Diese Tatsache ist wohl die erste wichtige Entdeckung, die L. EULER gemacht hat. Sie findet sich am Schluss seiner «Dissertatio physica de sono» (Leonhardi Euleri opera omnia series III T. 1, p. 196) und bildet dort die 3. der Behauptungen, welche zur Diskussion gestellt wurden. Sie lautet in deutscher Übersetzung: «Gesetzt (was freilich mit der Wirklichkeit in keiner Weise übereinstimmt) das Erdzentrum ziehe jeden Körper in umgekehrtem Verhältnis zur Entfernung an, und die Erde sei mit einem Loch durch das Zentrum versehen. Man fragt, was geschieht, wenn man einen Stein durch das Loch bis zum Zentrum fallen lässt: wird er dort ruhig verharren, oder wird er weiter über das Zentrum hinaus fortschreiten, oder wird er sogleich aus dem Zentrum zu uns zurückkehren? Ich behaupte, dass das letzte eintreten wird.» Wir nennen Bahnen, welche durch den Attraktionspunkt laufen und dort also einen Rückkehrpunkt aufweisen, E-Bahnen (Ejektionsbahnen). Sie spielen in allen modernen Untersuchungen eine Hauptrolle.

Wenden wir uns zunächst dem Fall zu, wo die inneren Planeten von den Monden unterschieden sind. Das um einen der Planeten abgegrenzte Gebiet enthält einen Attraktionspunkt, ausserdem ist die Randlinie eine Kurve mit Nullgeschwindigkeit. Unser erstes Problem besteht darin, den zugehörigen Phasenraum, den Raum der Linienelemente, topologisch zu bestimmen. Es wird sich dabei, wie schon aus der Arbeit von BIRKHOFF hervorgeht, zeigen, dass der Phasenraum mit dem projektiven Raum topologisch übereinstimmt. Um dies zu beweisen, können wir von einem numerisch leichter zugänglichen Problem ausgehen, da seine topologische Struktur ohne weiteres sich als mit dem vorigen identisch erweist. Es ist der Fall der gewöhnlichen Keplerbewegung mit gegebener Energiekonstanten K, — die übrigens nicht ganz mit C übereinstimmt. K fixiert bekanntlich die grosse Axe und wir wollen ihre Länge als Einheit wählen. Die zweiparametrige Schar von Bahnen besteht jetzt aus allen Ellipsen mit dem einen Brennpunkt in O und mit der Hauptaxe von der Länge 1. Alle diese Bahnen verlaufen im Inneren des Einheitskreises. Die E-Bahnen bestehen aus den Radien. Sie weisen zwei Rückkehrpunkte auf, den einen bei O, den andern an der Peripherie des Einheitskreises. Wir betrachten nun den dreidimensionalen Raum der gerichteten Linienelemente und müssen vor allen Dingen die Umgebung eines Linienelementes definieren. Wir nennen zwei Linienelemente benachbart, wenn 1. ihre Anheftungspunkte benachbart sind, und wenn 2. die durch sie bestimmten, mit Richtung versehenen Ellipsenbögen benachbart sind.

Um die Folgerungen aus dieser Definition zu ziehen, führen wir noch eine Bezeichnung ein: Wir bezeichnen die Gesamtheit der Linienelemente, welche von einem Punkt ausgehen, als einen **Stern**. Der Stern in O ist singulär, denn er besteht aus lauter Doppelelementen, sogenannten Rückkehrelementen. Ebenso sind die Sterne an der Kreisperipherie singulär, sie bestehen aus je einem Doppelelement. Nun lege man eine Kugel auf den Einheitskreis und ziehe ihn über der Kugel zusammen, sodass die ganze Kreisperipherie in einen Punkt, etwa den Nordpol fällt. Im Sinne des dreidimensionalen Phasenraumes ist damit topologisch nichts geändert, es ist nicht Unzusammengehöriges vereinigt worden, und unser Problem lässt sich daher auch als ein solches auf der Kugelfläche deuten: es ist ein Anziehungspunkt auf ihr gegeben und ein abstossender Punkt. Diese unterscheiden sich durch das Verhalten der Bahnen in ihrer Nähe: Beim Attraktionspunkt werden die Massenpunkte, die in seine Nähe kommen, mit beliebig grosser Geschwindigkeit eine halbe Drehung um ihn herum ausführen und alsdann wieder sich entfernen. Beim repulsiven Punkt dagegen werden die Massenpunkte sich langsam nähern und, ohne ihn zu umkreisen, sich wieder entfernen. Wenn wir von repulsivem Punkt sprechen, so ist es gut, zu bemerken, dass es sich nicht etwa um eine Newton'sche Repulsion umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung handelt. Ferner sei auch auf den Umstand aufmerksam gemacht, dass die tatsächliche Bewegung in der Nachbarschaft des Attraktionszentrums, zum mindesten makroskopisch, ebensogut als Abstossung, wie als Anziehung bezeichnet werden könnte, denn das Massenteilchen nähert sich zwar mit grosser Geschwindigkeit dem Zentrum, aber es entfernt sich davon wieder mit derselben Geschwindigkeit. Das spezifische Verhalten der Attraktion äussert sich nur darin, dass das Teilchen das Zentrum umkreist, während es bei Repulsion kurz vorher umkehrt.

Wir wollen nun den topologischen Typus eines Sternes im Phasenraum bestimmen. Sowohl in der offenen Ebene, als auf der Kugelfläche bildet er bekanntlich eine Kurve, die nicht auf Null reduzierbar ist. Im Falle der Kugel, wo der Phasenraum bekanntlich der projektive Raum ist, entspricht der Stern einer Geraden. Ganz anders verhält sich der Stern in unserm Fall. Die beiden Singularitäten ändern die topologische Natur desselben. Nehmen wir einen Stern, der nicht an einer der beiden singulären Stellen liegt, also weder am Nordpol noch am Südpol. Schieben wir ihn hinauf nach dem Nordpol zu. Die durch diesen Stern laufenden Ellipsen nähern sich immer mehr einer und derselben Bahn, nämlich der E-Bahn, welche durch den Anheftungspunkt bestimmt ist, und auch auf diesen Bahnen sind es benachbarte, dem Aphel nahe Stellen. Gelangt der Stern radial in den Nordpol, so schrumpft er auf das Doppelelement zusammen, das der E-Bahn angehört, welche durch den Radius gebildet ist. Dieses Element können wir nun stetig weiterführen in ein beliebiges Linienelement des Phasenraumes, und es ergibt sich, dass die Sterne nullhomolog sind, d. h. dass die zugehörigen Kurven des Phasenraumes auf einen Punkt zusammenziehbar sind.

Wir wollen entsprechend den Stern nach dem Südpol zu wandern lassen, also nach dem Attraktionszentrum. Befindet er sich schon in dessen Nähe, so sind auch hier die zugehörigen Bahnen sämtlich mit E-Bahnen benachbart, denn nur solche reichen in die Nähe des Zentrums. Aber die Bahnen, welche durch diesen Stern laufen, nähern sich diesmal nicht einer festen E-Bahn, sondern vielmehr allen E-Bahnen, und zwar zweimal durchlaufen. Man überzeugt sich dessen leicht folgendermassen. Diejenige Richtung des Sternes, welche direkt nach dem Zentrum deutet, gehört zu der E-Bahn, welche vom Radius gebildet wird, der den Stern trägt. Wir drehen nun das Linienelement in positivem Sinn. Nach einer Drehung von 90° steht es senkrecht zum Radius. Die zugehörige Bahn ist eine flache Ellipse, deren Hauptaxe die Fortsetzung des vorigen Radius ist, also um 180° gedreht erscheint, denn die Stelle, die wir im Auge haben, ist offenbar das Perihel der Bahn. Drehen wir weiter, so erhalten wir die vom Zentrum wegdeutende Richtung. Diese gehört wieder zur E-Bahn, mit der wir begonnen haben. Man sieht leicht ein, dass bei den Sternen, die dem Zentrum benachbart sind, entgegengesetzte Richtungen benachbart sind. Sie gehören zunächst zu sich deckenden Ellipsen, die jedoch entgegengesetzt gerichtete Tangentialelemente haben. Weil aber diese Ellipsen sehr flach sind, gelten sie als benachbart. Der Übergang geschieht so, dass die flache Ellipse gänzlich zur E-Bahn gestreckt wird, dass dann die beiden Radien, welche diese E-Bahn bilden, durchgedrückt werden und wieder zu Ellipsen sich aufblasen, welche aber die entgegengesetzte Orientierung der Linienelemente aufweisen. Da ausserdem die beiden Linienelemente, die wir betrachten, nahe dem Perihel sich befinden, so werden sie daher als benachbart zu gelten haben.

Hiermit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 1: Die Sterne, welche nicht zu einer singulären Stelle gehören, sind nullhomolog. Der Attraktionspunkt liefert einen Stern, der erst nach zweimaliger Umlaufung mit einem gewöhnlichen Stern homolog wird.

In unserm Phasenraum gibt es daher nur zwei Typen von geschlossenen Kurven: die nullhomologen und die mit den beiden singulären Sternen homologen, z.B. die Linienelemente, welche tangential zu den Kreisen liegen, die mit dem Attraktionspunkt konzentrisch sind. Genau dieselbe Eigenschaft hat der projektive Raum, und es ist zu erwarten, dass die beiden Räume homöomorph sind.

Satz 2: Der Phasenraum ist vom Typus des projektiven Raumes.

Beweis: Wir geben die topologische Abbildung des Phasenraumes auf den projektiven Raum geometrisch. Den Linienelementen des Grenzkreises, bezw. des Nordpoles ordnen wir die Punkte der z-Axe zu. Wir verschieben sie nun so, dass sie die Erzeugenden der einen Schar des hyperboloschen Paraboloides $y=xz$ durchläuft und ordnen ihnen die tangentialen Linienelemente der mit O konzentrischen Kreise zu. Der Attraktionsstern (Südpol) liefert die unendlich ferne Gerade der xy-Ebene. Nachdem die Kreise auf O zusammengezogen sind, lassen wir sie wieder zurücklaufen und geben den tangentialen Linienelementen jetzt den umgekehrten Richtungssinn. Ihnen entsprechen die Erzeugenden der linken Hälfte unseres Paraboloides. Da entgegengesetzte Richtungen, wenn sie an den Grenzkreis geführt werden, in dasselbe Element einmünden, so stimmt das damit überein, dass wir mit den Erzeugenden wieder in die z-Axe einmünden.

Nun drehen wir die bisher tangentialen Linienelemente sämtlich um einen bestimmten Winkel und lassen das Paraboloid um die z-Axe um denselben Winkel sich drehen. Einem Stern entspricht in dieser Weise ein Kreis, dessen Ebene senkrecht zur z-Axe liegt und dessen Mittelpunkt dieser Axe angehört. Die Punkte der Axe bleiben ungeändert entsprechend der Tatsache, dass die Linienelemente des Grenzkreises bei einer Drehung sich nicht ändern. Lassen wir ferner die Sterne nach der Mitte zu sich bewegen, so entspricht das einer unendlichen Vergrösserung des Radius unserer Kreise und damit einer zweimaligen Umlaufung der unendlich fernen Geraden der xy-Ebene, wie das verlangt wird. Die anderen Scharen von Erzeugenden unserer Paraboloide entsprechen den Linienelementen, welche mit einem Radius einen festen Winkel bilden und den um 180 Grad gedrehten.

Man kann die eine der beiden Singularitäten, diejenige bei O, folgendermassen wegschaffen: statt der schlichten Ebene legt man eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit den Windungspunkten bei 0 und ∞ zugrunde. Die Keplerellipsen schliessen sich erst bei zweimaliger Umlaufung. Auch der Grenzkreis wird zum zweimal umlaufenen Einheitskreis. Hierauf bildet man die Fläche konform auf die schlichte Ebene ab durch die Funktion $\sqrt{z}$. Die Ellipsen werden wieder in Ellipsen übergehen, welche aber jetzt 0 als Mittelpunkt haben. Sie sind dadurch charakterisiert, dass zwei Scheitel, die zu verschiedenen Axen gehören, die Distanz 1 haben. Es gibt nun keine singulären Sterne mehr, alle können an den Rand verschoben werden und sind nullhomolog. Der Phasenraum hat den Typus der Dreisphäre. Da jedem Punkt des vorigen Phasenraumes jetzt zwei Punkte entsprechen, so haben wir es hier mit dem Übergang der Dreisphäre in den projektiven Raum zu tun, der durch Identifizierung von Gegenpunkten hergestellt wird. Durch diese Abbildung wird aber die Singularität am Grenzkreis nicht weggeschafft, sie ist nur von lokalem Interesse.

Topologisch sind die Phasenräume, welche aus Flächen mit singulären Punkten entstehen, von einem gewissen Interesse. Es sind Verallgemeinerungen der Probleme, welche W. THRELFALL in seiner Abhandlung «Räume aus Linienelementen» (Jahresbericht der Deutschen Math. Ver. Bd. 42, 1932, S. 87) behandelt hat. Es sei mir darum noch erlaubt, die Homologie- und Fundamentalgruppe des nächsthöheren Falles mit zwei Attraktionspunkten innerhalb einer Kurve der Geschwindigkeit Null zu bestimmen. Auch hier sind die gewöhnlichen Sterne nullhomolog, weil sie an den Rand geschoben werden können, wo nur je ein Linienelement auftritt. Ferner sind die beiden Attraktionssterne, wenn man sie zweimal umläuft, mit den gewöhnlichen Sternen und daher mit 0 homolog. Linienelemente einer Bahn, welche einen oder beide singulären Punkte einmal umlaufen, lassen sich dagegen nicht reduzieren. Die Homologiegruppe ist daher hier die Vierergruppe. Die Fundamentalgruppe ergibt sich daraus, dass man zwei freie Elemente von der Ordnung 2, A und B, nimmt. Das Element AB erzeugt eine unendliche Gruppe, die Kommutatorgruppe wird durch $ABAB = (AB)^2$ erzeugt, ihre Faktorgruppe ist in der Tat die Vierergruppe.

2.

Kehren wir zu unserer Kugel zurück mit den beiden singulären Stellen, dem attraktiven im Südpol und dem repulsiven im Nordpol. Wir sahen, dass der zugehörige Phasenraum der projektive Raum ist. Nun erinnern wir uns der Tatsache, dass der Phasenraum der singularitätenfreien Kugel ebenfalls der projektive Raum ist. Man kann nämlich die Linienelemente mit Hilfe der durch Quaternionen dargestellten Drehungsgruppe den Quaternionen eineindeutig zuordnen, wobei die vier Komponenten als homogene Variable gedeutet werden. Hieraus ergibt sich, dass man durch Transformation der Linienelemente die beiden Singularitäten wegschaffen kann. Aber nur wenn wir eine Berührungstransformation ausfindig machen können, welche dieses leistet, werden Kurven (Elementverbände) in Kurven übergeführt. Nun ist vor allem klar, dass Punkttransformationen, d. h. Transformationen, welche die Sterne nicht auflösen, die Abbildung nicht leisten können. Denn bei diesen bleibt der topologische Typus eines Sternes ungeändert, während er in den beiden Fällen verschieden ist: im regulären Fall entspricht ein Stern einer Geraden, im Kepler-Fall ist er dagegen nullhomolog. Wir können daher nur durch eigentliche Berührungstransformationen zum Ziel kommen. Eine solche ist dadurch bestimmt, dass man angibt, in welchen Kurven (Elementverein) die Sterne übergehen.

Gehen wir von der Kugel mit Singularitäten aus, so müssen ihre Sterne in Kurven übergehen, deren Linienelemente nullhomolog sind. Dies ist nur mit Hinzuziehung von Rückkehrpunkten möglich.

Ausserdem wird verlangt, dass die Bilder der Sterne eines Meridians, die vom Nordpol zum Südpol wandern, sich in folgender Weise wandeln: zu Beginn haben wir ein Linienelement, dann entsteht eine Kurve der oben angegebenen Art, schliesslich muss sie sich auf einen zweimal umlaufenen Stern zusammenziehen. Dieses Problem hat natürlich unendlich viele Lösungen, wenn es überhaupt eine hat, denn man kann zu einer Lösung noch eine beliebige Berührungstransformation der singularitätenfreien Kugel in sich hinzufügen. Es wird also ausserdem noch verlangt, dass die Lösung analytisch möglichst einfach sei.

Die Auffindung einer geeigneten Berührungstransformation ist ziemlich mühsam und erfordert langwierige Rechnungen. Ich habe schliesslich zwei gefunden, die beide nicht kompliziert sind und von denen jede ihre Vorzüge hat. Zunächst ist es vorteilhaft, die Kugel durch stereographische Projektion auf die Vollebene mit unendlich fernem Punkt abzubilden und die Berührungstransformation von Ebene zu Ebene herzustellen.

In der ersten Ebene, welche bei 0 und ∞ Singularitäten hat, seien Polarkoordinaten r, α eingeführt, in der zweiten, der Bildebene dagegen gewöhnliche Koordinaten x, y. Dem Stern $r=1$, $\alpha=0$ möge folgende Kurve entsprechen:

$$2x = 3\cos t - \cos 3t \qquad 2y = 3\sin t - \sin 3t$$

Diese Kurve ist eine Epizykloide, welche entsteht, wenn auf dem Einheitskreis aussen ein Kreis vom Radius 1/2 abrollt. Sie besitzt auf der x-Achse zwei Rückkehrpunkte, welche nach 0 hinweisen, und besteht aus zwei Ovalen in der oberen und unteren Halbebene, ähnlich einer 8. Ihre Gleichung lässt sich umformen. So ist

$$3\cos t - \cos 3t = 2\cos t(2 - \cos 2t)$$
$$3\sin t - \sin 3t = 2\sin t(1 - \cos 2t)$$

Als praktisch erweist sich die Einführung eines neuen Winkels, welcher mit t durch folgende Gleichung zusammenhängt: $\operatorname{tg}\tau = 2\operatorname{tg} t$.

Man erhält dann

$$2x = \sqrt{10 - 6\cos 2t}\;\cos(2t - \tau)$$
$$2y = \sqrt{10 - 6\cos 2t}\;\sin(2t - \tau)$$

womit Radiusvektor und Amplitude des Bildpunktes durch t und τ bestimmt sind. Übrigens lässt sich die Wurzel mit Hilfe von τ wegschaffen und man erhält

$$\sqrt{10 - 6\cos 2t} = 2\,\frac{\cos t}{\cos\tau}$$

Schliesslich leistet auch die Einführung komplexer Variabler gelegentlich gute Dienste.

Die erste Abbildung geschieht nun so, dass man die übrigen Sterne nach der Ähnlichkeit abbildet:

$$x = \frac{r}{2}(3 \cos[t + \alpha] - \cos[3t + \alpha])$$

$$y = \frac{r}{2}(3 \sin[t + \alpha] - \sin[3t + \alpha])$$

Die Abbildung der Linienelemente geschieht in diesem Fall nach allgemeinen Sätzen einfach folgendermassen (Lie-Scheffers, Berührungstransformationen, Satz 13, S. 63). Wir betrachten im Stern r, α dasjenige Linienelement, welches mit dem Radiusvektor den Winkel φ einschliesst. Hat der zugehörige Punkt den Parameterwert t, so ergibt sich für diesen Winkel gerade τ. Hiermit sind nun alle Linienelemente abgebildet, denn in den obigen Gleichungen ist zunächst r und α direkt gegeben, ferner wird durch die Angabe von φ auch τ und damit t bestimmt.

Bei vielen Rechnungen ist es sehr unbequem, dass φ in komplizierter Weise mit t zusammenhängt. Man nimmt daher mit Vorteil eine Änderung vor:

$$x = \frac{\sqrt{r}}{2}(3 \cos[t + \alpha] - \cos[3t + \alpha])$$

$$y = \frac{\sqrt{r}}{2}(3 \sin[t + \alpha] - \sin[3t + \alpha])$$

Hier findet man nun $\varphi = t$.

Überträgt man die Kurven wieder stereographisch zurück auf die Kugel, so haben die Bilder in der Nachbarschaft des Südpols die oben angegebene 8-Gestalt, der Südpol selbst zählt als zweimal umlaufener Stern. Je mehr sich aber die Kurven in der Ebene entfernen, um so mehr erhalten die Bilder auf der Kugel (gegen den Nordpol zu) eine Gestalt, die man als augenförmig, ophthalmoid, bezeichnen kann; die Rückkehrpunkte weisen nach aussen. Die Grenzlage im Nordpol ist in der Tat ein einziges Linienelement.

Wir fassen die gewonnenen Resultate in folgendem Satz zusammen:

Satz 3: Zwei Singularitäten auf der Kugel, eine attraktive und eine repulsive, lassen sich durch Berührungstransformationen, nicht aber durch Punkttransformationen entfernen.

Hiermit ist der Keplerfall und damit der einfachste Fall des asteroidischen Dreikörperproblemes auf die mathematisch bekannteste Lehre von der gewöhnlichen komplexen Ebene zurückgeführt. In höheren Fällen ist dies, wie sich aus der topologischen Natur des Phasenraumes ergibt, nicht möglich. Eine endgültige Theorie etwa des Dreikörperproblemes scheint mir erst dann möglich zu sein, wenn die topologische Natur des Phasenraumes unter Berücksichtigung der Singularitäten, die beim Zusammenstoss zweier Körper entstehen, völlig aufgeklärt ist. Als einen kleinen Schritt in dieser Richtung möchte ich die vorangehenden Ausführungen auffassen. Merkwürdig ist die Nachbarschaft der Quaternionen. Es ist zu erwarten, dass die tiefen Untersuchungen von Herrn FUETER im Gebiet der Quaternionenfunktionen berufen sind, als Wegweiser in diesen schwierigen Fragen zu dienen, denn sie behandeln Räume von topologisch viel mannigfaltigerer Struktur als die gewöhnlichen komplexen Funktionen.